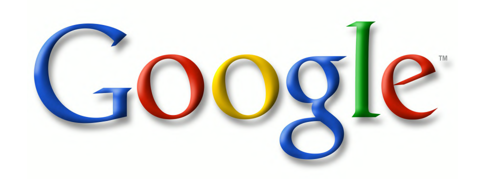
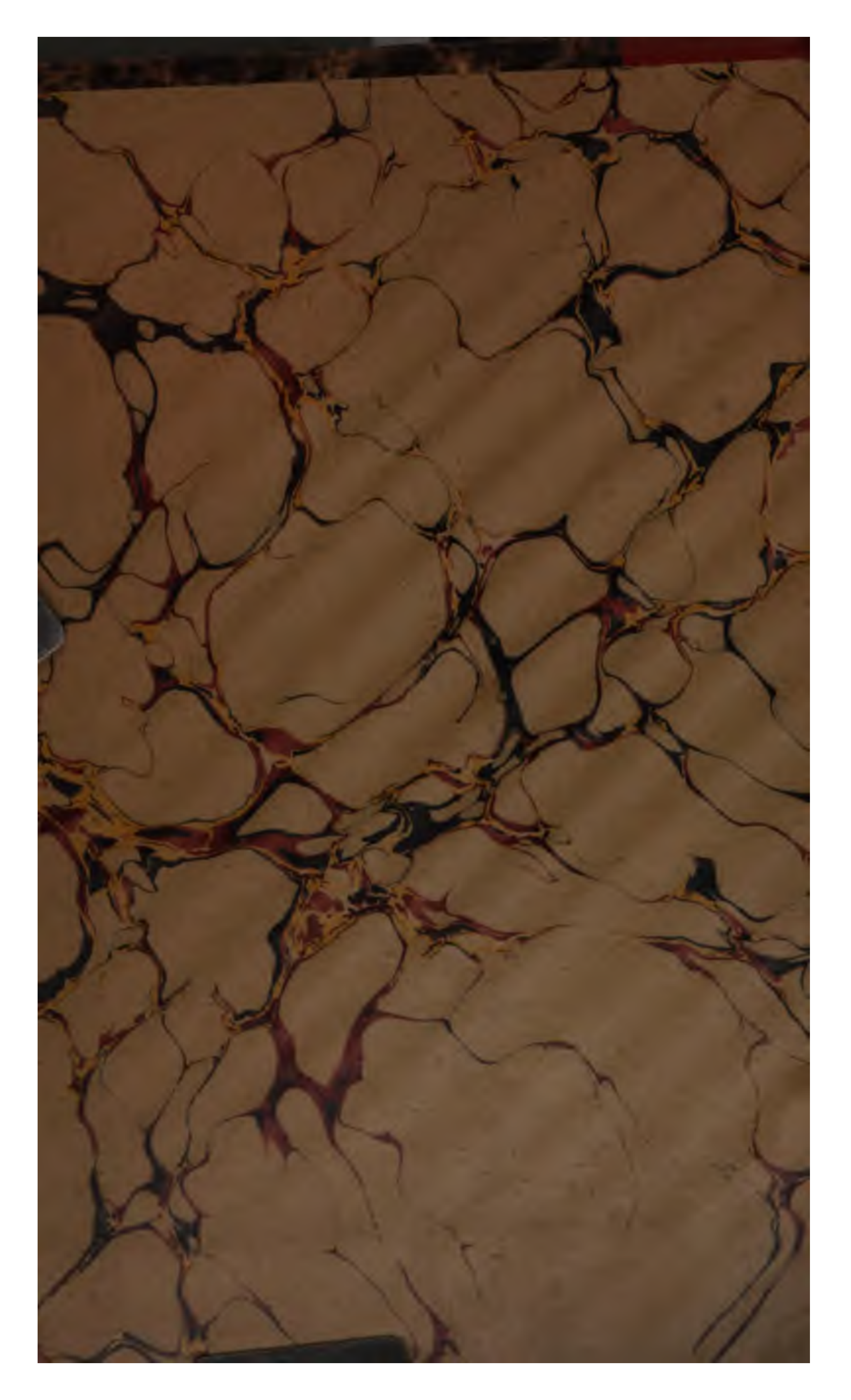
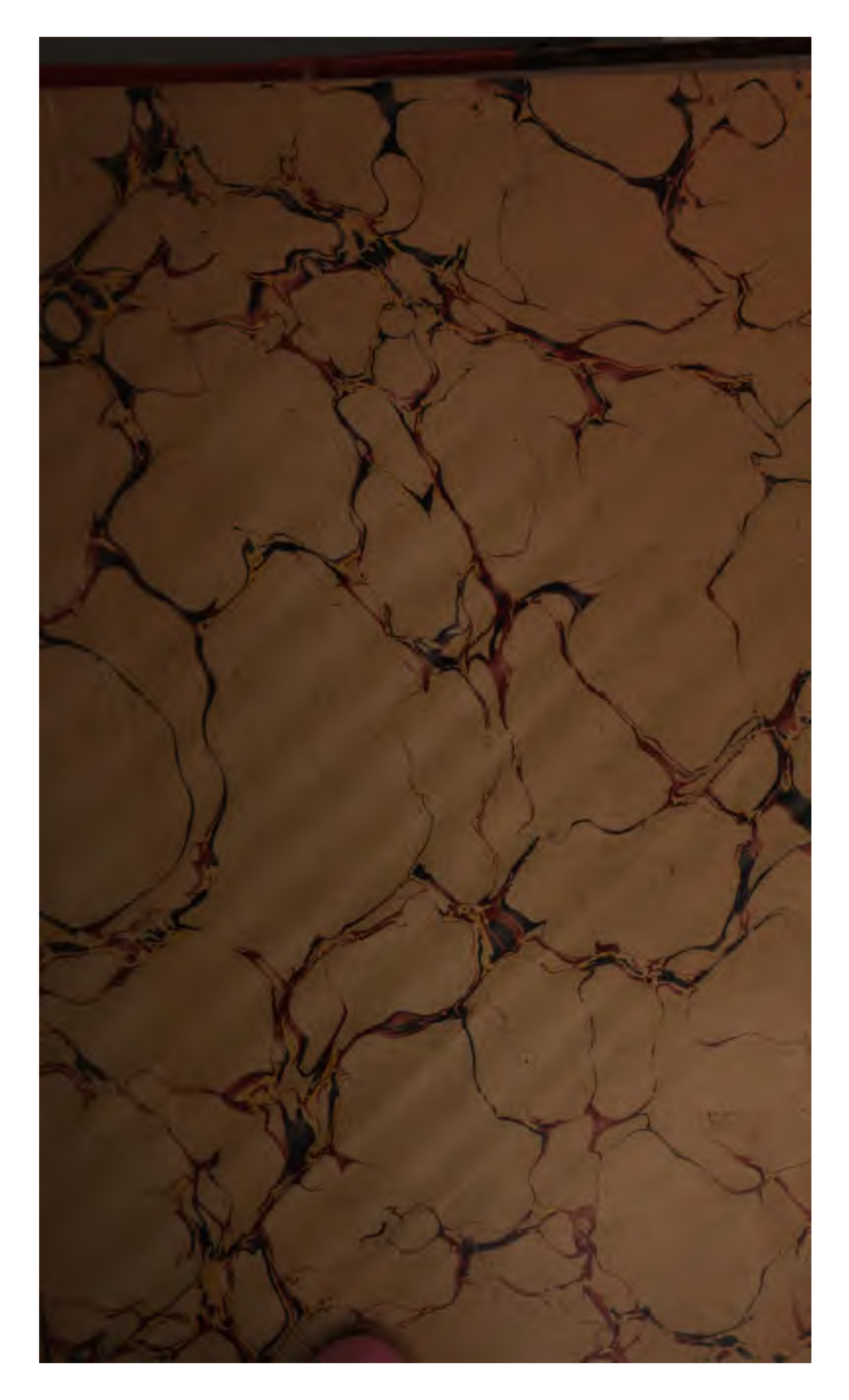
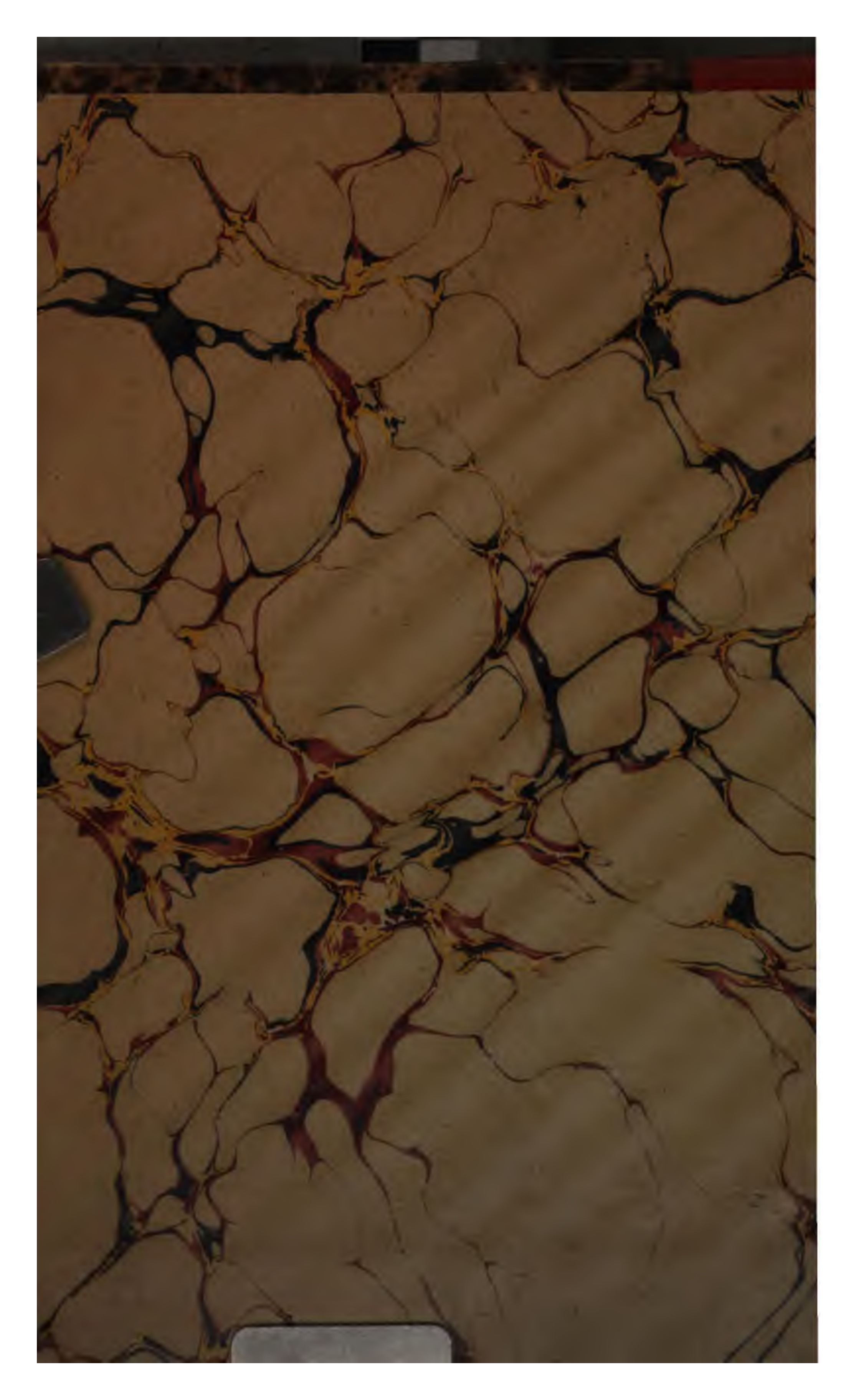
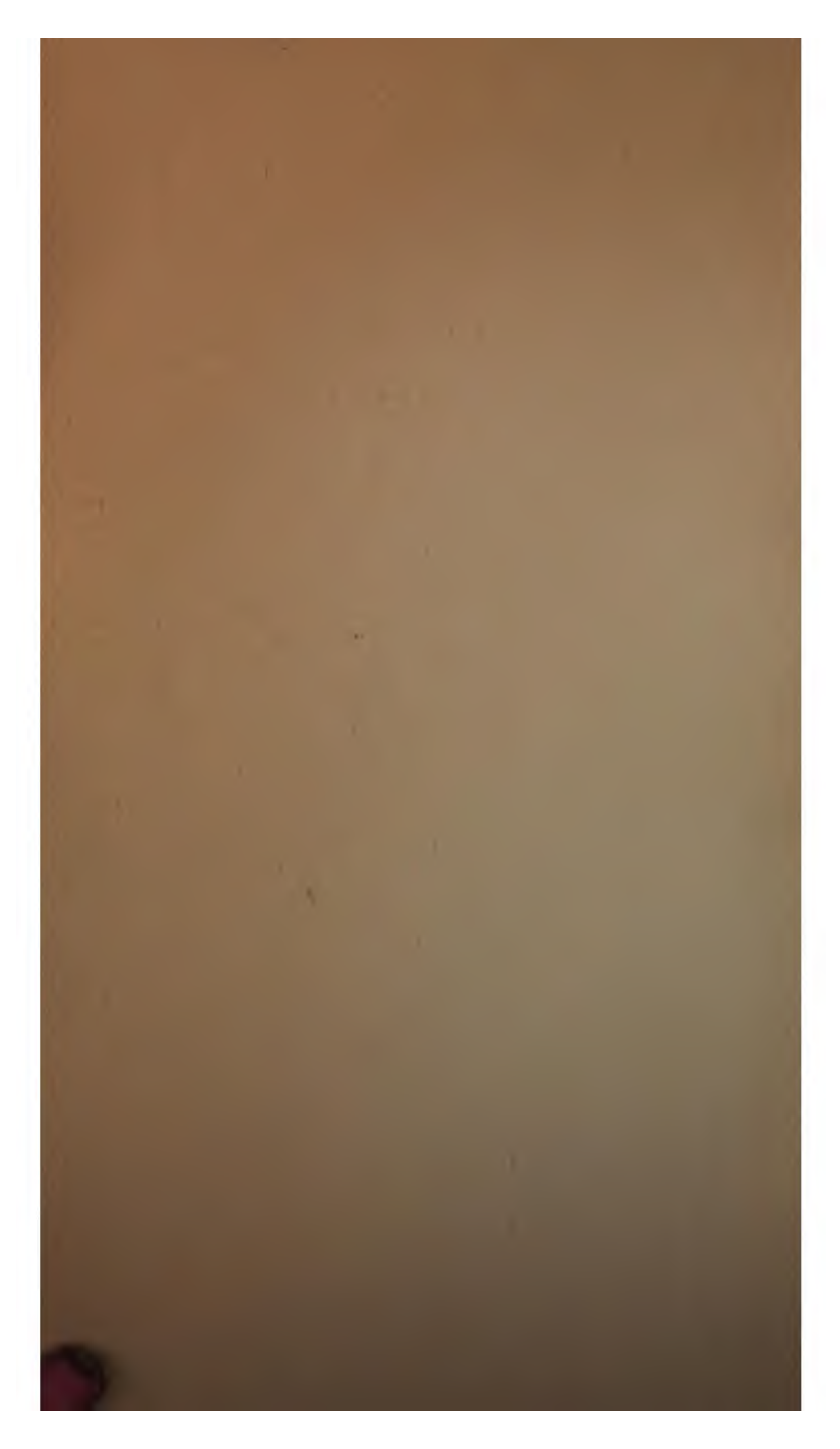










BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES,

RÉDIGÉ PAR M. G. DARBOUX,
AVEC LA COLLABORATION DE MM. HOÜEL ET LŒWY,
SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

TOME PREMIER. — ANNÉE 1870.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1870

COMITÉ DE RÉDACTION.

AVERTISSEMENT.

Les géomètres n'ont pas oublié les utiles services qu'a rendus M. de Férussac par la publication de son *Bulletin* consacré aux différentes branches de la science. Établir un lien entre les savants, faire connaître à ceux qui sont le plus isolés les principaux travaux accomplis dans les différentes parties du monde, telle était la tâche que s'était proposée M. de Férussac et qu'il a remplie pendant plusieurs années avec le plus grand succès.

Nous nous proposons de reprendre, sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique, et de la Commission des Hautes Études, la publication du *Bulletin* interrompue au grand regret des géomètres. Nous nous rattachons directement par le but et le plan de notre publication au *Bulletin des Sciences mathématiques*, et nous serions heureux si le public mathématique voulait bien nous accueillir avec la même faveur que notre savant prédécesseur. Les circonstances nous ont paru d'ailleurs très-favorables à la réalisation de notre entreprise. Au commencement de ce siècle, les *Annales* de M. Gergonne étaient le seul journal exclusivement consacré aux sciences mathématiques. Depuis, le nombre des publications périodiques s'est accru dans une grande proportion, et l'on peut compter aujourd'hui, chez les différentes nations, plus d'une vingtaine de Recueils consacrés à la publication des travaux et Mémoires mathématiques. Ces Recueils suffisent pleinement aux besoins de la science; ils sont bien connus et en possession de la faveur méritée des géomètres. Aussi, nous garderons-nous bien de leur faire une concurrence inutile. Au lieu de publier des Mémoires originaux et inédits, nous rendrons compte régu-

lièrement des travaux de toute nature publiés soit en France, soit à l'étranger; nous ferons tous nos efforts pour tenir nos lecteurs au courant des progrès accomplis soit dans l'enseignement, soit dans la marche des sciences mathématiques.

L'utilité de notre œuvre avait été vivement sentie par M. de Férussac. Voici comment il s'exprime à ce sujet dans son Avertissement :

« Il est une vérité incontestable, c'est qu'en répandant partout, et plus généralement que cela ne se fait aujourd'hui, la connaissance des divers travaux publiés, ou celle des faits observés, on multiplie, d'une part, les chances de débit pour les Ouvrages; et, d'un autre côté, cette connaissance plus générale des faits augmente, dans une progression indéfinie, l'impulsion donnée aux esprits occupés des sciences, régularise la marche de leurs travaux, évite une foule d'essais, de tâtonnements, d'écrits inutiles, fruits naturels de l'isolement où sont en général les savants. On peut présumer ce que produirait en résultats utiles le temps ordinairement perdu par cette absence d'un lien commun et d'une correspondance active qui montrerait, aux savants des parties les plus reculées, l'état de la branche des sciences qu'ils cultivent, ce qu'il reste à faire, et le point d'où ils doivent partir s'ils veulent lui faire faire des progrès. »

Le nouveau *Bulletin* sera exclusivement consacré aux Mathématiques et à l'Astronomie. Il comprendra trois Parties principales : 1° *les comptes rendus de Livres; 2° les analyses de Mémoires; 3° les Communications de peu d'étendue, et les traductions de Mémoires importants et peu répandus.*

Nous recevrons avec reconnaissance les renseignements, les traductions, notes historiques, livres, brochures qu'on voudra bien nous adresser, et nous tâcherons de mettre en œuvre tous les matériaux réunis de manière à être utiles à la fois aux auteurs des Mémoires, et aux personnes qui désirent simplement se tenir au courant des progrès de la science.

G. DARBOUX.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

SERRET (Paul), Docteur ès Sciences, Membre de la Société philomathique. — Géométrie de direction. *Application des coordonnées polyédriques. Propriété de dix points de l'ellipsoïde, de neuf points d'une courbe gauche du quatrième ordre, de huit points d'une cubique gauche.* — In-8, avec figures dans le texte, xx-523 pages; 1869. Paris, Gauthier-Villars. Prix : 10 francs.

Ce nouvel Ouvrage d'un auteur déjà connu et apprécié contient des propositions d'Analyse et de Géométrie qui nous paraissent d'une véritable importance; nous croyons qu'il sera lu avec profit par toutes les personnes qui s'intéressent aux progrès de la Géométrie analytique.

Les principes posés par l'auteur sont susceptibles d'applications très-variées. M. Serret a surtout développé celles qui concernent la *théorie des surfaces du second ordre,* assimilée par lui au premier étage de la Géométrie. Nous goûtons peu, nous l'avouons, ces comparaisons si détaillées, dont la première idée est due au savant M. Terquem. En tous cas, elles ne nous paraissent pas de nature, puisqu'on nous affirme que les étages inférieurs ne sont pas construits, à encourager ceux qui, dès à présent, s'occupent des parties les plus élevées de l'édifice.

Quoi qu'il en soit de cette image hardie, qui importe peu d'ailleurs

à notre sujet, nous reconnaissons volontiers que l'Ouvrage de M. Serr ajoute plusieurs propriétés nouvelles à ce qu'on savait déjà sur l surfaces du second ordre, et nous allons essayer de donner à nos le teurs une idée des principes fondamentaux employés et de la métho suivie dans le cours de l'Ouvrage.

Jusqu'ici on ne connaissait pas de relation analytique simple lia six points d'une conique ou dix points d'une surface du second ordr du moins ces relations ne se présentaient pas sous une forme qui f appropriée aux applications et à la démonstration des théorèmes. Pe sonne, croyons-nous, n'aurait songé à établir une théorie des surfac du second ordre, en partant de l'équation de la surface passant par ne points ou tangente à neuf plans quelconques. C'est pourtant ce q fait M. Serret; mais, auparavant, il remplace cette équation par u relation tout à fait équivalente, et dont la forme se prête avec la pl grande facilité aux applications. Cette relation, intéressante en ell même, une fois établie, le lecteur est conduit sans effort à la démon tration des théorèmes les plus difficiles, ainsi qu'à la construction d premiers et des plus importants problèmes qu'on doit se proposer début d'une théorie complète des surfaces du second degré. Quelque uns de ces problèmes n'avaient encore été traités par personne; d'a tres, au contraire, ont fait l'objet des travaux de nombreux géomètre M. Serret emploie pour les résoudre une méthode uniforme dont l'o gine est dans le principe fondamental posé presque au début de l'O vrage, et dont nous allons essayer de donner une idée à nos lecteur

Commençons par le cas le plus simple, celui de la ligne droite. C sait que l'équation de la ligne droite passant par deux points ou, l'on veut, la relation entre trois points d'une ligne droite, s'obtient égalant à zéro le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Mais il y a une proposition très-simple de Géométrie qui tient li de cette équation : « Si trois points sont en ligne droite, l'un d'e peut toujours être considéré comme le centre des moyennes distanc du système formé par les deux autres, pourvu qu'on attribue à c derniers points des masses quelconques. » Il suit de là que, si l'o

désigne par P, P_1, P_2 les distances des trois points à un axe arbitrairement choisi, on a, entre ces distances, la relation

$$\lambda P + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0,$$

où λ, λ_1, λ_2 sont des paramètres fixes affectés à chaque point. En d'autres termes :

Pour que trois points soient en ligne droite, il faut qu'il y ait toujours une même relation linéaire et homogène entre les distances de ces trois points à une droite quelconque.

On connaît toute l'importance de cette proposition dans la théorie de la ligne droite; elle équivaut, en effet, on s'en assure aisément, à l'équation même de la ligne droite, et peut la remplacer dans tous les cas.

C'est cette proposition si utile que M. Serret a étendue aux courbes et aux surfaces de degré supérieur. Voici, par exemple, le théorème pour le cas des sections coniques :

Pour que six points 1, 2,..., 6 *soient sur une conique, il faut qu'on puisse choisir six coefficients* $\lambda_1, \ldots, \lambda_6$ *tels, qu'en désignant par* $P_1, \ldots, P_6$ *les distances de ces points à une droite quelconque, on ait la relation*

$$\sum_1^6 \lambda_i P_i^2 = 0.$$

Les paramètres λ, bien entendu, ne dépendent en aucune manière de la position de l'axe. Si, pour fixer les idées, on considère le point (i) comme ayant une masse positive ou négative λ_i, l'équation exprime que le moment d'inertie du système des six points par rapport à une droite est toujours nul, quelle que soit la position de cette droite.

M. Serret regarde la proposition comme nouvelle. En réalité, elle a déjà été donnée par M. Hesse dans un opuscule intitulé : *Vier Vorlesungen*... (Quatre leçons de Géométrie analytique...) (*). Dans ce petit Ouvrage, que nous recommandons à l'attention des savants français, M. Hesse donne, en effet, le théorème de M. Serret avec

(*) *Vier Vorlesungen aus der analytischen Geometrie* von Dr OTTO HESSE. (Extrait du *Zeitschrift für Mathematik und Physik*; 1866. Teubner, Leipzig.)

quelques autres systèmes de formules dont il déduit d'une maniè tout à fait neuve le théorème de Pascal. On trouvera plus loin cet démonstration, que nous avons pris la liberté de traduire, en faisant quelques changements.

Mais cette proposition arrive incidemment dans l'Ouvrage de l'au teur allemand; elle forme, au contraire, la base même de l'Ouvra de M. Serret. Nous n'avons pas trouvé d'ailleurs, dans l'excellen *Géométrie analytique à trois dimensions* de M. Hesse, les relations an logues pour les surfaces du second degré et leurs courbes d'interse tion. Ces relations, qu'on trouve dans l'Ouvrage de M. Serret, sont l suivantes :

Pour que dix points soient sur une surface du second ordre, il fa et il suffit qu'il y ait entre leurs distances à un plan quelconque P *u relation de la forme*

$$\sum_1^{10} \lambda_i P_i^2 = 0.$$

De même,

Pour que neuf points soient sur une courbe gauche du quatrième ord il faut et il suffit qu'il y ait entre leurs distances à un plan quelconq une relation de la forme

$$\sum_1^{9} \lambda_i P_i^2 = 0,$$

etc., etc....

Les propositions précédentes conduisent, entre les mains M. Serret, à des applications aussi nombreuses que variées. No donnerons l'un des exemples les plus simples.

Considérons une conique et deux triangles conjugués à cet conique. Soient

$$P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \quad P_3 = 0$$

les équations tangentielles des sommets du premier triangle conj gué. On sait que l'équation tangentielle de la conique prend forme simple

$$\lambda_1 P_1^2 + \lambda_2 P_2^2 + \lambda_3 P_3^2 = 0.$$

De même, soient

$$P_4 = 0, \quad P_5 = 0, \quad P_6 = 0$$

les équations des sommets du second triangle conjugué. On aura une deuxième équation de la conique

$$\lambda_4 P_4^2 + \lambda_5 P_5^2 + \lambda_6 P_6^2 = 0.$$

Ces deux équations ne doivent différer que par un facteur constant; à cause de l'indétermination des coefficients λ, on peut supposer que leur somme soit identiquement vérifiée. On a donc l'identité

$$\sum_1^6 \lambda_i P_i^2 = 0.$$

C'est la condition nécessaire et suffisante pour que six points soient sur une conique. On obtient donc ce beau théorème dû au géomètre allemand que nous avons déjà cité :

Les sommets de deux triangles conjugués à une conique sont six points d'une même conique.

La réciproque de ce théorème et les propositions analogues pour l'espace ne se démontrent pas avec une moindre facilité.

L'exemple précédent suffira, croyons-nous, pour faire comprendre à nos lecteurs la marche habituellement suivie par l'auteur. Ne pouvant donner qu'une idée nécessairement imparfaite des nombreuses questions traitées par M. Serret, nous parlerons surtout de la partie la plus importante de l'Ouvrage, celle sur laquelle l'auteur appelle l'attention des géomètres dans sa Préface, c'est-à-dire de la construction des surfaces du second degré et de leurs courbes d'intersection, quand on donne un nombre suffisant de points pour les déterminer.

On sait que les problèmes analogues pour les coniques se résolvent par l'emploi de théorèmes généraux comme le théorème de Pascal, celui de Desargues, celui de M. Chasles, etc. Ces théorèmes établissent tous une relation entre six points d'une conique et peuvent, par conséquent, tenir lieu de l'équation de la courbe. On ne connaît pas, malheureusement, de théorème analogue pour les surfaces du second degré. M. Serret s'est proposé d'étendre à l'espace l'une des propositions fondamentales de la théorie des coniques, le théorème de Desargues, et nous croyons qu'il a atteint, au moins en grande partie, le but qu'on doit se proposer dans la généralisation de ces théorèmes.

S'il s'agissait de trouver simplement pour les surfaces du second

ordre une propriété analogue à celle qui, pour les coniques, exprimée par le théorème de Desargues, on pourrait dire que problème est résolu depuis longtemps. Sturm, en effet, dans beau Mémoire inséré aux *Annales de Gergonne*, t. XVII, p. 180 généralisé le théorème de Desargues et a montré que toutes coniques passant par quatre points déterminent sur une droite segments en involution. Cette proposition s'étend d'elle-même surfaces ayant une courbe commune d'intersection. Mais, dans l' pace, le théorème perd, au moins en apparence, son utilité; il conduit pas à une construction de la surface passant par neuf poin comme le théorème plan à la construction de la conique détermi par cinq points. M. Serret obtient des généralisations différentes plus utiles. Nos lecteurs pourront en juger en comparant les de théorèmes correspondants que nous plaçons à côté l'un de l'autre

Une corde xy et un quadrilatère $aba'b'$ étant inscrits à une conique, les extrémités de cette corde et ses traces sur les côtés opposés du quadrilatère forment trois couples de points conjugués par rapport à une ellipse infiniment aplatie qui se réduit à un système de deux points situés sur la corde donnée. (DESARGUES.)	Un quadrilatère plan et un octaè $abcda'b'c'd'$ étant inscrits à une surf du second ordre, les deux couples côtés opposés de ce quadrilatère, traces de son plan sur les faces oppo de l'octaèdre font six couples de dro conjuguées par rapport à un m ellipsoïde infiniment aplati qui se ré à une conique située dans le plan quadrilatère. (PAUL SERRET.)

De même pour la courbe gauche du quatrième ordre :

Un quadrangle inscrit à une conique et le système de deux points formé des traces de la courbe sur une droite quelconque sont l'un et l'autre conjugués à une *même ellipse infiniment aplatie* réduite à un système de deux points situés sur la droite considérée. (DESARGUES.)	Un pentagone inscrit à une cou gauche du quatrième ordre et le q drangle ayant pour sommets les tra de la courbe sur un plan quelconque, s l'un et l'autre conjugués (*) à un mê *ellipsoïde infiniment aplati*, réduit à conique située dans le plan considér (PAUL SERRET.)

La ressemblance entre les propositions anciennement connues po le plan, et les propositions nouvelles pour les surfaces est rend évidente par les comparaisons précédentes. Mais, cette fois, l'analo

(*) M. Serret dit qu'un pentagone est conjugué par rapport à un ellipsoïde, quan plan polaire de chaque sommet du pentagone passe par le côté opposé.

qui existe déjà dans les démonstrations des deux théorèmes subsiste encore dans leurs applications. M. Serret montre, en effet, que ses théorèmes conduisent à une construction de la surface du second ordre déterminée par neuf points, de la courbe gauche du quatrième ordre déterminée par huit points, et ont, par conséquent, la même utilité que le théorème de Desargues pour les coniques.

Il subsiste pourtant une différence que nous devons signaler entre ces propositions correspondantes. Le théorème de Desargues établit une relation entre six points *quelconques* d'une conique; la proposition de M. Serret ne donne la relation géométrique entre dix points de la surface que si quatre d'entre eux sont dans un même plan. Peut-être cette légère restriction tient-elle à la nature de la question; en tous cas, les théorèmes nouveaux ont le degré de généralité nécessaire pour les applications que l'auteur avait en vue.

M. Serret n'a pas négligé l'étude d'un problème célèbre dans la théorie des surfaces de second ordre. On sait que toutes les surfaces passant par sept points vont généralement passer par un huitième point. On doit donc se proposer de construire avec la règle ce huitième point quand on connaît les sept premiers. Ce problème, qu'on appelle quelquefois *construction du huitième point*, a été traité par M. Hesse, qui en a donné une très-belle solution (*). L'auteur examine soigneusement la construction de M. Hesse, il indique un cas dans lequel elle tombe en défaut sans que le problème soit réellement indéterminé; enfin il donne des solutions nouvelles et fort simples, déduites d'un principe uniforme.

Il nous resterait à signaler plusieurs belles propriétés des sphères et des polyèdres rencontrées par l'auteur dans ses consciencieuses études. Ne pouvant tout citer, nous indiquerons les deux suivantes comme étant des plus simples et des plus élégantes:

Pour que les milieux des diagonales d'un octaèdre soient dans un même plan, il faut et il suffit que ses six plans soient parallèles à six plans tangents d'un cône de second ordre;

Tout ellipsoïde (**) qui divise harmoniquement quatre des diagonales d'un quadrilatère complet divise harmoniquement les six autres.

(*) Voir *Journal de Crelle*, t. XXVI.

(**) M. Serret appelle, pour abréger, *ellipsoïde* toute surface à centre du second degré.

Nous bornerons là l'examen de cet Ouvrage, qui se recomman(aux géomètres par le nom de l'auteur et l'importance des résulta obtenus. Le Livre de M. Paul Serret introduit en Géométrie analytiq un principe nouveau et fécond; il sera consulté par toutes les pe sonnes qui voudront se tenir au courant des progrès récents de Géométrie des surfaces du second ordre.

L'auteur a placé au commencement une Préface écrite avec bea coup de verve. Cette Préface soulève bien des questions délicates; el contient plus d'une assertion à laquelle nous ne voudrions pas no associer. M. Serret nous pardonnera de faire quelques réserves sa entrer dans un examen approfondi que ne comporte pas le plan (cette publication.

G. D.

CASORATI (Dott. Felice), prof. di Calcolo differenziale ed integra nella R. Università di Pavia. — TEORICA DELLE FUNZIONI DI VARI BILI COMPLESSE. Volume primo. — Grand in-8; 1868. Pavia, tip grafia dei Fratelli Fusi. Prix : 10 francs.

L'Ouvrage dont nous venons de transcrire le titre doit compte sans contredit, parmi les plus importantes productions scientifiqu de ces dernières années. Son but est l'exposition complète de cet branche de l'Analyse que Cauchy a fondée, et dont Riemann a été l second créateur.

Les découvertes de Cauchy ont trouvé dans notre pays de lumineu interprètes et doivent aux géomètres français d'importantes addi tions. Mais jusqu'ici la doctrine de Riemann ne nous était guè connue que par les Ouvrages de ses disciples, écrits presque tou dans une langue dont l'étude est malheureusement trop sacrifiée che nous aux prétendues exigences littéraires de l'esprit français. Aus devons-nous nous réjouir de la publication d'un livre dont la langu est facilement intelligible à tout Français un peu lettré, et compos en outre, avec un remarquable talent par un géomètre qui, tout jeun encore, a su déjà si bien se rendre maître du vaste ensemble de théories qui gravitent autour de son sujet principal.

Le premier volume, le seul qui ait paru jusqu'à ce jour, se com pose de deux Parties principales, dont la première, sous le titre d'I

troduction, contient un aperçu historique du développement de la théorie des quantités complexes. Cet aperçu, qui formerait à lui seul un excellent Mémoire, est un résumé substantiel et méthodique des plus grandes découvertes de l'Analyse moderne, où la part de chaque géomètre est indiquée et appréciée avec autant de clarté que de profondeur. Les cent quarante-trois pages que l'auteur a consacrées à cet objet seront un précieux secours pour tous ceux qui voudront se mettre au courant des hautes théories analytiques, et qui, privés de ce fil conducteur, ne sauraient comment s'orienter au milieu de tant de travaux, différents par l'esprit comme par la forme, et dont rien ne leur indique d'avance la dépendance mutuelle, non plus que l'ordre dans lequel il convient de les étudier.

Cette Introduction est divisée en deux Chapitres, dont le premier contient l'histoire de la théorie des fonctions elliptiques et abéliennes, une des plus importantes applications des quantités complexes, dans laquelle l'emploi de ces quantités a été la condition nécessaire des découvertes d'Abel et de Jacobi. M. Casorati trace le tableau des progrès successifs de cette branche de l'Analyse, depuis les travaux de Fagnani et d'Euler, jusqu'à ceux de Cayley, d'Eisenstein, d'Hermite, de Weierstrass.

Le second Chapitre traite plus particulièrement des variables complexes et des fonctions de ces variables. L'auteur commence naturellement par l'exposé des travaux de Cauchy sur ce sujet; il établit nettement et avec impartialité la part qui revient à ce grand analyste dans des découvertes dont quelques auteurs allemands semblent parfois trop disposés à attribuer tout l'honneur à leurs compatriotes.

Citons, à ce propos, quelques pages de la remarquable étude que M. Beltrami a consacrée au Livre de M. Casorati, dans le *Giornale di Matematiche* de Naples, t. VII, 1869, p. 36 et suiv. Ces pages nous paraissent éminemment propres à faire saisir les points de contact entre l'œuvre de Cauchy et celle de Riemann, et à montrer ce que le second doit au premier :

« Un de ces points de contact se présente dès les premiers pas que l'on fait dans la théorie générale des fonctions, savoir : dans la conception même de la fonction. Déjà Cauchy avait reconnu qu'il convient de faire abstraction de toute supposition, explicite ou implicite, de l'existence d'une formule analytique de nature quelconque, et de ne considérer que la dépendance qui doit avoir lieu entre la valeur

de la variable et celle de la fonction. Mais, dans le passage de la vari bilité réelle à la variabilité complexe, Cauchy avait donné à ce pri cipe une extension trop grande, ce qui l'avait conduit à distingu par une appellation spéciale (*monogènes*) les fonctions auxquell Riemann, mieux inspiré, a cru devoir réserver exclusivement dénomination de *fonctions* (d'une variable complexe). Ce point e très-clairement exposé par M. Casorati dans son préambule hist rique, ainsi que dans les premiers Chapitres de la deuxième Section.

» Quant à la définition d'une fonction au moyen de propriét caractéristiques suffisantes, ce sujet n'est pas encore traité dans volume publié, bien que l'auteur laisse entrevoir à plusieurs repris dans l'*Introduction* (p. 134-136, par exemple) toute l'importance ce nouveau point de vue, qui, employé primitivement dans l méthodes de la Physique mathématique, et introduit ensuite av beaucoup d'avantages dans l'Analyse pure, semble se rapprocher si gulièrement de celui de la Géométrie moderne, suivant lequel les pr priétés des figures s'établissent comme conséquences de quelques do nées caractéristiques, sans faire aucun usage des équations analytiqu

» Parmi les nombreux mérites qui appartiennent à Cauchy en qui touche au perfectionnement général de la science, on doit mett en première ligne celui d'avoir constamment soutenu, dès le co mencement de sa carrière scientifique, la nécessité de bien délimit l'étendue et la signification de tout symbole que l'on veut introdui et employer dans l'Analyse. En revenant sans cesse sur la discussi des meilleures règles à suivre pour parvenir à ce but, règles qu'il successivement modifiées sans jamais aboutir à leur donner une for définitive, il a montré clairement que, si l'on n'était par encore ent dans la seule voie qui conduit sûrement au but, la nécessité d'a teindre ce but ne lui en paraissait pas moins absolue. Et en cela était dans le vrai. Seulement Cauchy, entraîné, comme cela se voit souvent, au delà des justes bornes par son ardeur à réagir cont l'abus du symbole, a péché par l'excès contraire, en établissant pl d'une fois ses définitions de façon à interrompre arbitrairement continuité des variables, et à perdre ainsi de vue le guide infaillib qui aurait dû le diriger.

» Malgré l'imperfection des résultats, l'idée première est tellem vraie, et les considérations qu'il a développées en plusieurs endro sont si justes, que plus d'un lecteur du tome IV des *Exercices d'An*

lyse et de Physique mathématique a dû trouver de lui-même la véritable voie qui mène à la solution de la difficulté....

» La première Section de l'Ouvrage de M. Casorati est, en grande partie, consacrée à l'exacte détermination du sens qu'il faut attacher aux fonctions simples d'une variable complexe, et les exemples qu'il a choisis nous semblent on ne peut mieux appropriés à ce but, sous le double rapport de la continuité et de la conservation des propriétés caractéristiques.

» Les restrictions qui, comme nous le disions tout à l'heure, ont été imposées mal à propos par Cauchy à la continuité de la variable complexe qui entre dans une fonction donnée, proviennent surtout de ce qu'il prétendait séparer les diverses séries de valeurs dont est susceptible une fonction à plusieurs déterminations, et considérer chacune d'elles comme une fonction séparée. De cette manière, en supposant les valeurs de la fonction placées sur les valeurs correspondantes de la variable (ce que toutefois Cauchy n'avait pas coutume de faire), le champ des valeurs de la fonction devenait simple, mais contenait inévitablement des lignes de discontinuité. Riemann, le premier, a remarqué que, en concevant les divers champs correspondants de cette manière aux diverses séries de valeurs de la fonction, chacun d'eux présentait bien de telles lignes de discontinuité; mais que chacun de ces champs devait nécessairement se raccorder en formant la continuité avec un autre le long d'une de ces lignes, et que l'on pouvait ainsi obtenir un champ entièrement continu, composé de plusieurs couches superposées et connexes, et comprenant la totalité des valeurs de la fonction. Cette remarque a été, sans doute, un trait de génie; mais nous ne porterons pas atteinte à la sagacité de l'illustre novateur, en affirmant que son admirable invention ne pouvait plus se faire longtemps attendre, du jour où l'on commencerait à pénétrer au fond des idées de Cauchy. Ce qui frappe le plus, en effet, dans cette découverte, ce n'est pas tant la conception primitive que la sûreté avec laquelle Riemann s'en rend maître, et en dévoile, du premier coup, la puissance et la fécondité, par la construction de l'édifice colossal et majestueux que quelques instants lui ont suffi pour élever. »

Indiquons maintenant rapidement le contenu des divers Chapitres de la seconde Partie du volume, où l'auteur entre dans l'exposition de la théorie.

Cette Partie est divisée en quatre Sections, comprenant chacun plusieurs Chapitres.

SECTION I. Opérations arithmétiques et formules simples corres pondantes.

CHAPITRE I. *Opérations arithmétiques. Extension de l'idée de nombre et, par suite aussi, des opérations. Continuité.*

CHAPITRE II. *Représentation géométrique des nombres, et construction correspondantes aux opérations arithmétiques.* — L'auteur y donn une démonstration très-précise et très-complète du célèbre théorèm de Jacobi, sur l'impossibilité de l'existence d'une fonction monodrom d'une seule variable, ayant plus de deux périodes. Le Chapitre se te mine par une exposition de la représentation sur la sphère des valeu d'une variable complexe, suivant la méthode indiquée par Riemann dans ses leçons orales, et publiée par Neumann (*Vorlesungen üb Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale*).

CHAPITRE III. *Conventions particulières pour e^z et lz.*

SECTION II. Idée de fonction et distinctions fondamentales qui s' rapportent.

CHAPITRE I. *Fonctions réelles d'une variable réelle.* — L'auteur traite avec détail des diverses espèces de discontinuité, qui avaien déjà été distinguées par M. Neumann (*). Seulement, M. Casorati n classe pas parmi les discontinuités les valeurs infinies que M. Neu mann désigne sous le nom de *discontinuités polaires*, les valeurs réci proques de la fonction étant continues, et les infinis pouvant dispa raître au moyen d'une transformation homographique analogue à cell qui changerait toutes les sections coniques en ellipses.

CHAPITRE II. *Fonctions réelles de plusieurs variables réelles.*

CHAPITRE III. *Fonctions complexes de variables réelles.*

CHAPITRE IV. *Fonctions d'une variable complexe.* — Une fonctio de $z = x + yi$ est une fonction dont la valeur ne dépend que de cell du binôme $x + yi$, et qui ne changerait pas si l'on remplaçait les va

(*) *Voyez* aussi NATANI, *Die höhere Analysis, besonders abgedruckt aus dem Matem tischen Worterbuche*, p. 462.

leurs réelles de x et de y par des valeurs complexes quelconques, pourvu que le binôme $x+yi$ restât invariable. Une telle fonction w a une dérivée déterminée par rapport à z. Elle satisfait à l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{i}\frac{dw}{dy};$$

et si l'on pose $w = u + vi$, u et v étant réels, chacune de ces dernières quantités satisfait à l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} + \frac{d^2\omega}{dy^2} = 0.$$

Cette question est traitée avec beaucoup de détails particuliers à l'auteur, et qui jettent un grand jour sur cette question délicate.

Chapitre V. *Interprétations géométriques de la condition renfermée dans l'idée de fonction d'une variable entièrement indépendante. Recherches géométriques relatives à certaines fonctions particulières.* — Après avoir exposé l'interprétation géométrique des conditions

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}, \quad \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx},$$

telle qu'on la retrouve dans l'Ouvrage de MM. Briot et Bouquet (*), l'auteur s'occupe de celle qui a été donnée par Gauss, et qui consiste en ce que les réseaux infinitésimaux qui représentent les valeurs correspondantes de la variable et de la fonction sont composés d'éléments semblables chacun à chacun. Discussion de la représentation des fonctions z^2, z^n, e^z, $\sin z$, $\sin \operatorname{am} z$ et de leurs fonctions inverses.

Section III. Revue des expressions analytiques.

Chapitre I. *Classification.* — Distinction des fonctions en algébriques et transcendantes, monodromes et polydromes, etc.

Chapitre II. *Séries.* — Influence de l'ordre des termes d'une série. Opérations rationnelles sur les séries; différentiation, intégration. Séries ordonnées suivant les puissances entières et positives d'une va-

(*) *Théorie des Fonctions doublement périodiques et en particulier des Fonctions elliptiques*, p. 8. In-8; 1859. Librairie Gauthier-Villars (*rare*).

riable; cercle de convergence. Séries contenant des puissances négatives. Séries simples ou doubles, à périodicité simple ou double. Influence du groupement des termes d'une série double. Étude des séries Θ, simples ou multiples. Cette étude, fondée sur une application de la série de Fourier, et présentée par l'auteur avec une remarquable simplicité, semble destinée à entrer, tôt ou tard, dans les Traités d'Algèbre, à la suite de la théorie des fonctions exponentielles et circulaires.

Chapitre III. *Produits infinis.* — La théorie de ces produits, tant simples que multiples, est traitée d'une manière analogue à la théorie des séries infinies.

Chapitre IV. *Intégrales.* — Ce Chapitre renferme l'exposé des découvertes capitales de Cauchy. L'auteur développe avec beaucoup de soin l'idée d'intégration le long d'un contour donné. Le théorème fondamental relatif à l'intégration d'une différentielle exacte

$$u\,dx + v\,dy$$

le long d'un contour fermé est démontré de deux manières différentes: d'abord par la méthode de Cauchy, reproduite par les auteurs français; puis par la méthode de Riemann, fondée sur des considérations analogues à celles que Gauss avait employées dans son Mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes. Examen des intégrales des fonctions $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{z^2+1}$, $\frac{1}{(z-\gamma)^{n+1}}$.

Section IV. Analyse des manières dont les fonctions peuvent se comporter, dans l'hypothèse de la monodromie, autour des diverses valeurs de la variable.

Chapitre I. *Comment une fonction se comporte autour d'une valeur de la variable pour laquelle elle est monodrome, continue et finie.* — Démonstration de la formule de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{f(x)\,dx}{x-z}.$$

Théorème de Cauchy sur le développement d'une fonction monodrome, continue et finie suivant les puissances entières et positives de $z-\gamma$. Conséquences. Indices d'ordre des zéros.

Chapitre II. *Comment une fonction se comporte autour d'une valeur de la variable pour laquelle elle est monodrome, continue et infinie* (dans le sens indiqué au Chapitre I de la Section II). — Détermination d'une fonction rationnelle, infinie de la même manière que la fonction proposée. Indices d'ordre des infinis. Expression de l'indice d'un point au moyen de l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int dlw$.

Chapitre III. *Comment une fonction se comporte autour d'une valeur de la variable pour laquelle, isolément, elle est discontinue.* — Théorème de Laurent. Propriétés des fonctions fondées sur la distinction des discontinuités en séparées et non séparées des infinis.

Chapitre IV. *Examen des manières dont une fonction peut se comporter pour la valeur* ∞ *de la variable, en supposant qu'autour de cette valeur elle doive être monodrome et continue.* — L'auteur emploie la représentation sur la sphère de Riemann, considérée comme résultant de la déformation du plan. Il introduit le plan antipode, dont l'idée est due à M. Neumann, et qui correspond au changement de la variable z en $\frac{1}{z}$.

Chapitre V. *Comment se comportent, autour de chaque valeur de la variable, la dérivée et l'intégrale d'une fonction, par comparaison avec la fonction elle-même.*

Ces indications, nécessairement incomplètes, ne peuvent donner qu'une idée bien imparfaite de la richesse des matières contenues dans le volume de M. Casorati. Tous ceux qui liront cet Ouvrage désireront, comme nous, avec impatience, que le savant professeur nous donne bientôt la suite, qui doit traiter des parties plus élevées de la théorie qu'il a si bien approfondie, et qu'il expose avec tant de lucidité.

J. Hoüel.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK IN ZWAI GLOSEN HEFTEN. — Als Fortsetzung des von A. C. CRELLE : gegrü deten Journals, herausgegeben unter Mitwirkung der Herr Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass; von C. W. BOI CHARDT (*). T. LXXI, n° 1, 15 octobre 1869; n° 2, 15 décemb 1869.

OLIVIER (A.). — *Sur la théorie de la génération des courbes géom triques.* (15 pages.)

Ce travail peut être considéré comme la suite d'articles précéder qui ont pour base les beaux théorèmes de M. Chasles insérés en 18 aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* sur la gé ration des courbes de degré supérieur.

WEYR (Eduard). — *Sur un théorème de Steiner.* (2 pages.)

Le théorème dont il est question dans ce court article se rappo aux vingt-sept points dans lesquels une courbe du troisième de peut avoir, avec une conique, un contact de l'ordre le plus élevé.

WEYR (Eduard). — *Sur quelques théorèmes de Steiner et sur l relation avec un mode de transformation dans lequel à un élément chaque figure correspondent en général deux éléments de l'aut* (10 pages.)

Si l'on considère deux points P, Q sur une courbe du troisiè degré, deux droites passant respectivement par ces deux points, et coupant sur la courbe, peuvent être considérées comme form deux faisceaux correspondants. Alors, à une droite de l'un des fa ceaux correspondent évidemment deux droites de l'autre. C'est mode de correspondance qu'étudie M. Weyr en s'appuyant sur théorème bien connu de Steiner, relatif à une série de polygo dont les côtés passent successivement par deux points fixes de courbe du troisième degré.

(*) Ce Journal a été fondé, à la fin de 1825, par Crelle, à une époque où les *Ann de Gergonne* étaient, en Europe, le seul journal consacré aux Mathématiques. I dirigé, depuis la mort de Crelle (1856), par M. BORCHARDT. Il paraît par Cahiers déta in-4 d'à peu près 100 pages. Quatre Cahiers forment un volume. Prix pour l'abo ment à quatre Cahiers : Allemagne, 16 francs; France, 20 francs. Les seize der volumes embrassent une période de douze années à peu près.

WEBER (H.). — *Note sur la démonstration, donnée par Riemann, du principe de Dirichlet.* (10 pages.)

Le principe de Dirichlet, dont Riemann a fait des applications si capitales, a été l'objet dans ces derniers temps, au point de vue de la rigueur et de la généralité, d'objections qui paraissent fondées. Le travail de M. Weber est consacré au développement d'une démonstration nouvelle et plus rigoureuse de cet important principe.

BAUER. — *Sur le discriminant de l'équation du troisième degré qui détermine les axes principaux d'une surface du second ordre et la décomposition de ce discriminant en une somme de carrés.* (5 pages.)

La question a été déjà traitée d'une manière très-remarquable par plusieurs savants, notamment par MM. Kummer (*), Borchardt (**), Hesse (***). Ces géomètres avaient examiné l'équation plus générale qu'on rencontre dans la théorie des perturbations des planètes. M. Bauer démontre que, dans le cas du troisième degré, le résultat s'obtient directement d'une manière fort simple.

BAUER. — *Sur les sections circulaires des surfaces du second degré.* (6 pages.)

LORBERG (H.). — *Sur la théorie du mouvement de l'électricité dans les corps à plus d'une dimension.* (37 pages.)

Les équations du mouvement de l'électricité ont été données par M. Kirchhoff dans le tome CII des *Annales de Poggendorff.* M Weingarten avait déjà étudié le mouvement dans les corps linéaires. Le Mémoire de M. Lorberg comprend deux Parties. Dans la première l'auteur reprend les équations de M. Kirchhoff, et les étend au cas où il existe des forces extérieures. La deuxième Partie contient l'application au mouvement de l'électricité dans une sphère.

FUCHS (L.). — *Les modules de périodicité des intégrales hyperelliptiques considérés comme fonctions d'un paramètre.* (45 pages.)

M. Fuchs développe les équations différentielles qui sont analogues

---

(*) KUMMER. *Journal de Crelle*, t. XXVI, p. 268 : Bemerkungen über die cubische Gleichung durch welche die Hauptaxen der Flächen zweiten Grades bestimmt verden.

(**) BORCHARDT. *Journal de Crelle*, t. XXX; *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, t. XII, p. 50 : Développements sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inegalites séculaires du mouvement des planètes.

(***) HESSE (Otto Dr). *Vorlesungen über die anal. Geometrie des Raums*, p. 320.

à l'équation du second ordre trouvée par Legendre, et à laque satisfait, dans le cas des fonctions elliptiques, l'intégrale compl considérée comme fonction du module. Les équations différentiel trouvées par M. Fuchs sont de degré supérieur au second et varial suivant la classe des fonctions considérées. Le Mémoire se termi par l'application aux fonctions elliptiques.

Fuchs (L.). — *Sur une relation rationnelle entre les modules de pér dicité des intégrales hyperelliptiques.* (40 pages.)

L'auteur développe des relations analogues à la célèbre formule

$$KJ' - JK' = \frac{\pi}{2}.$$

Stern. — *Sur les résidus quadratiques, trigonaux et bitrigona* (27 pages.)

Gordan. — *Sur les invariants des formes binaires quand on effec des transformations de degré supérieur.* (31 pages.)

On n'a guère étudié jusqu'ici les invariants des formes algébriq qu'au point de vue des transformations *linéaires*. M. Gordan s' cupe d'un problème beaucoup plus général, et qui n'a été traité q dans des cas restreints et par un petit nombre de géomètres. C'est cel où les formules de transformation qui donnent les nouvelles variabl par rapport aux variables primitives sont d'un degré quelconq par rapport à ces dernières. Il ne faut pas oublier, M. Gordan le d'ailleurs, que, dans son travail sur les équations du quatrième du cinquième degré, M. Hermite avait résolu d'importants pr blèmes de ce genre.

A. Olivier. — *Recherche de l'ordre d'une courbe qui est engend par l'intersection des courbes correspondantes de deux faiscea* (2 pages.)

Riemann. — *Démonstration du théorème : « Toute fonction de n v riables ayant plus de 2n périodes simultanées est impossible ».* (3 page

(Extrait d'une lettre de Riemann à M. Weierstrass.) (*).

(*) Tous les Mémoires contenus dans ces deux Cahiers sont écrits en allemand.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, publiées par M. L. PASTEUR, Membre de l'Institut, avec un Comité de rédaction composé de MM. les Maîtres de Conférence de l'École (*). T. VI; 1869.

DIDON (F.). — *Sur deux systèmes d'équations aux dérivées partielles.* (16 pages.)

Ce travail est la suite des belles études de M. Didon, sur les polynômes introduits dans la science par M. Hermite (voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LVIII et LX *passim*).

DARBOUX (G.). — *Sur un mode de transformation des figures et son application à la construction de la surface du deuxième ordre déterminée par neuf points.* (8 pages.)

SIMON (Ch.). — *Mémoire sur la rotation de la Lune* (deuxième Mémoire). (16 pages.)

DIDON (F.). — *Sur certains systèmes de polynômes associés.* (16 pages.) Étude sur une classe de polynômes analogues aux fonctions X_n de Legendre.

JACOBI (C. G. J.). — *Lettres sur la théorie des fonctions elliptiques.* (30 pages.)

Ces lettres sont celles que Jacobi a écrites successivement à Legendre pour lui annoncer les belles et importantes découvertes qu'il venait de faire dans la théorie des fonctions elliptiques. Elles nous paraissent destinées à intéresser vivement les savants. Voici comment s'exprime M. Bertrand dans quelques lignes d'introduction placées au commencement de l'article :

« Nous devons à l'obligeance de M. Alfred Arago la précieuse communication de onze lettres inédites de *Jacobi* à *Legendre*, sur la théorie des fonctions elliptiques. Quoique les découvertes qu'elles

(*) Ce Recueil paraît depuis 1864, tous les deux mois, par Cahier de 56 à 64 pages. Prix de l'abonnement par année : Paris, 30 francs (Librairie Gauthier-Villars). Il contient à peu près par moitié des Mémoires de Mathématiques et des Mémoires se rapportant aux Sciences physiques. Nous ne rendrons compte que des Mémoires se rattachant directement aux Mathématiques. Les personnes qui désireront des renseignements plus complets pourront lire un article de M. J. Bertrand, inséré dans le *Journal des Savants*, année 18[illegible], et intitulé : *Annales de l'École Normale supérieure*.

contiennent soient aujourd'hui bien connues des géomètres, ils dieront sans doute avec un vif intérêt la forme que leur donne l'illı inventeur; on prendra plaisir à voir Jacobi, avec une modestie d de son talent, s'incliner devant l'illustre vieillard qu'il a déjà déj de si loin, et saluer en même temps par de véritables cris d'admir les premiers résultats du jeune émule qui vient tout à coup par sa gloire : « La découverte d'Abel, dit-il, est au-dessus de mes él » comme elle est au-dessus de mes propres travaux. »

» Jacobi seul avait le droit de prononcer un tel jugement, do sévérité, sous toute autre plume que la sienne, irait jusqu'à justice. »

Serret (J.-A.). — *Sur un théorème de calcul intégral.* (8 page

Dans cet élégant travail, M. Serret démontre, par des considér indépendantes du calcul des probabilités, les beaux théoreme M. Crofton a fait connaître à l'Académie. La plus importante d propositions s'énonce de la manière suivante :

« Soit un contour convexe de forme quelconque, dont la lon totale est L et qui renferme un espace Ω, si l'on appelle θ l' des deux tangentes menées d'un point extérieur (x, y) à ce con on aura l'intégrale

$$\int\int(\theta - \sin\theta)\,dx\,dy = \frac{1}{2}L^2 - \pi\Omega$$

pour toute la surface du plan extérieure au contour » (voir *Co rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXV, p. 994).

Baillaud. — *Note sur les séries à termes positifs.* (20 pages.)

Le jeune géomètre examine à un point de vue nouveau les que différents auteurs ont fait connaître pour reconnaître la c gence des séries. Il reprend et généralise la règle de Gauss. E montre que toutes les fois que les règles données par MM. de M Raabe, Bertrand, Bonnet permettent de reconnaître la conve ou la divergence, on peut trouver une fonction $\varphi(n)$ telle, que men du produit $u_n\varphi(n)$ permette de décider la question. O depuis Abel que cette propriété n'a pas lieu pour toutes les séri

Aoust. — *Sur l'analyse des courbes rapportées à un systèm conque de coordonnées.* (28 pages.)

RADAU (R.). — *Sur la rotation des corps solides.*

Dans cet important travail, l'auteur reprend la théorie de la rotation. Il retrouve et analyse les résultats auxquels avaient été déjà conduits MM. Richelot, Serret, Sylvester.

BELTRAMI (E.). — *Essai d'interprétation de la Géométrie non euclidienne* (traduit de l'italien par J. Hoüel). (38 pages.)

Ce Mémoire est consacré à l'étude approfondie des surfaces à courbure constante négative. Il sera lu avec fruit par toutes les personnes qui désirent connaître le développement qu'ont reçu dans ces derniers temps les idées de Gauss relatives à l'origine des vérités géométriques. Du reste, les résultats qui y sont énoncés ont une valeur réelle, indépendante de toutes les idées qu'on peut se faire sur le *postulatum* d'Euclide.

BACH (M.). — *Du passage de Vénus sur le disque du Soleil en 1874, et du calcul de la parallaxe du Soleil.* (58 pages.)

BELTRAMI (E.). — *Théorie fondamentale des espaces de courbure constante* (traduit de l'italien par J. Hoüel). (30 pages.)

DIDON (F.). — *Sur une équation aux dérivées partielles.* (4 pages.)

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, publiés par MM. les Secrétaires perpétuels (*). T. LXX; 1870.

N° 1. Séance du 3 janvier 1870.

État de l'Académie des Sciences au 1er janvier 1870.

M. BERTRAND. — Sur la démonstration relative à la somme des angles d'un triangle.

(*) Ces *Comptes rendus* paraissent régulièrement tous les dimanches, depuis 1835, en un Cahier de 32 à 40 pages, quelquefois de 80 à 120. Ils forment, à la fin de l'année, deux volumes in-4, ensemble de 2400 à 3000 pages. Deux Tables, l'une par ordre alphabétique de matières, l'autre par ordre alphabétique de noms d'auteurs, terminent chaque volume. Prix de l'abonnement par an : Paris, 20 francs (Librairie Gauthier-Villars). Les extraits des Mémoires lus par les membres de l'Académie comprennent au plus 8 pages par numéro; les Notes des personnes qui ne sont pas membres de l'Académie ne peuvent dépasser 4 pages.

Nous ne parlerons que des Mémoires se rattachant aux Mathématiques et à l'Astronomie.

P. Secchi. — Lettre à M. le Secrétaire perpétuel sur la constitu de l'auréole solaire et sur quelques particularités des tubes de Geiss

M. Boussinesq. — Essai sur la théorie de l'écoulement d'un liq par un orifice en mince paroi.

N° 2. Séance du 10 janvier 1870.

M. Delaunay. — Sur la constitution physique de la Lune.

P. Secchi. — Sur la constitution de l'auréole solaire. (Ar dont il a été fait mention plus haut.)

M. Piarron de Mondesir. — Nouvelle méthode pour la solu des problèmes de la Mécanique (2e Partie).

N° 3. Séance du 17 janvier 1870.

M. Delaunay présente un Rapport sur les importantes recher de M. Puiseux, relatives à la théorie de la Lune. Nous reprodui ce Rapport, qui donnera à nos lecteurs une idée très-nette du p sur lequel ont porté les recherches de M. Puiseux :

« Lorsqu'on veut déterminer toutes les inégalités du mouver de la Lune dues à l'action perturbatrice du Soleil, on doit attri à ce dernier astre, à chaque instant, la position exacte qu'il oc par rapport à un système d'axes coordonnés de directions consta passant par le centre de la Terre. Les coordonnées du Soleil, l'on doit aussi considérer, sont exactement les mêmes que celle la Terre rapportées à un système d'axes parallèles et de sens traires, menés par le centre du Soleil. C'est donc, en définitiv mouvement de la Terre autour du Soleil qui permet d'obtenir coordonnées du Soleil dont on a besoin pour effectuer le calcul inégalités lunaires.

» Si l'on admet, dans une première recherche, que la Terre se autour du Soleil en suivant rigoureusement les lois du mouve elliptique, on obtient ainsi la plus grande partie des inégalités do mouvement de la Lune est affecté; c'est en cela que consiste le tr publié récemment par l'un de nous, et formant les tomes XX et XXIX des *Mémoires de l'Académie*. Mais les inégalités du mo ment de la Terre, qui doivent être jointes à son mouvement el tique considéré seul d'abord, pour fournir son mouvement réel au du Soleil, contribuent aussi à produire, dans le mouvement d

Lune, des inégalités qu'il n'est pas possible de négliger. Parmi ces inégalités du mouvement de la Lune, dues à l'existence des inégalités du mouvement de la Terre, une des plus importantes est celle qui affecte progressivement le moyen mouvement de notre satellite. Laplace a démontré, en 1787, que la diminution séculaire de l'excentricité de l'orbite de la Terre produit une accélération progressive dans le moyen mouvement lunaire; et il a levé par là une difficulté qui préoccupait beaucoup les savants, en dévoilant la cause de l'accélération séculaire découverte depuis longtemps dans ce moyen mouvement de la Lune, par l'examen attentif des données de l'observation. A partir de là, et jusqu'à ces derniers temps, on a regardé la cause assignée par Laplace comme correspondant complétement à l'effet qu'il s'agissait d'expliquer; mais des doutes se sont produits, il y a quelques années, sur l'exactitude de cette correspondance : un calcul plus complet de l'effet produit sur le moyen mouvement de la Lune par la diminution séculaire de l'excentricité de l'orbite de la Terre, a conduit à penser que cette cause trouvée par Laplace ne rendait compte que d'une portion de l'accélération séculaire qui affecte réellement ce moyen mouvement. On s'est demandé tout naturellement à quelle autre cause la partie restante pourrait être attribuée, et diverses idées ont été émises à ce sujet. Mais avant tout, il était bon de s'assurer si l'on avait bien tenu compte de tous les effets de ce genre que peut produire l'action perturbatrice du Soleil sur la Lune.

» Parmi les inégalités dont le mouvement elliptique d'une planète est affecté, la variation séculaire de l'inclinaison de son orbite sur un plan fixe et celle de l'excentricité de cette orbite jouent des rôles entièrement analogues; le déplacement séculaire du plan de l'écliptique dans l'espace ne pourrait-il donc pas produire une accélération dans le moyen mouvement de la Lune, tout aussi bien que la diminution progressive de l'excentricité de l'orbite de la Terre? Telle est la question que M. Puiseux s'est posée.

» Les divers savants qui se sont occupés du mouvement de la Lune avaient toujours regardé l'influence du déplacement progressif de l'écliptique sur le moyen mouvement de cet astre comme insensible; mais c'était en se bornant aux premières approximations qu'ils avaient été conduits à ce résultat, et l'on sait combien, dans la théorie de la Lune, les conclusions tirées des premières approximations auxquelles on s'est arrêté tout d'abord se trouvent quelquefois changées

lorsqu'on passe aux approximations suivantes. M. Puiseux a do entrepris d'effectuer le calcul de la partie de l'équation séculaire la Lune qui peut être due au déplacement séculaire du plan de l'écli tique, en poussant les approximations assez loin pour qu'il ne res aucun doute sur la véritable influence de cette cause spéciale de p turbation.

» Nous n'entrerons dans aucun détail sur la marche que l'aut a suivie pour atteindre ce but. Nous nous contenterons de dire q dans le développement des longs et pénibles calculs qu'il a eu à fa pour y arriver, on retrouve la netteté et la précision qui sont le car tère distinctif de ses travaux. Quant au résultat, il est le même q celui auquel on était parvenu en se bornant aux premières appro mations : le changement de position du plan de l'écliptique d l'espace n'a aucune influence sensible sur la valeur de l'équati séculaire de la Lune. Cette conséquence, bien qu'elle soit négati n'en a pas moins une grande importance; et tous les amis de science se féliciteront de ce que le doute qui pouvait rester sur point soit complétement dissipé.

» Nous proposons à l'Académie de décider que le Mémoire M. Puiseux sera inséré dans le *Recueil des Savants étrangers*. »

Les conclusions de ce Rapport sont adoptées.

N° 4. Séance du 24 janvier 1870.

M. Piarron de Mondesir. — Nouvelle méthode pour la solut des problèmes de la Mécanique (3e Partie).

N° 5. Séance du 31 janvier 1870.

M. Boussinesq. — Essai sur la théorie de l'écoulement d liquide par un orifice en mince paroi (suite).

N° 6. Séance du 7 février 1870.

M. de Saint-Venant. — Rapport sur un Mémoire de M. Mau Levy, présenté le 3 juin 1867, reproduit le 21 juin 1869, et intitu « Essai sur une théorie rationnelle de l'équilibre des terres fraîc ment remuées, et ses applications au calcul de la stabilité des m de soutènement. »

M. de Saint-Venant. — Sur une détermination rationnelle,

approximation, de la poussée qu'exercent des terres dépourvues de cohésion, contre un mur ayant une inclinaison quelconque.

M. Laussedat. — Sur les applications utiles de la méthode graphique à la production des éclipses de Soleil.

M. Heis. — La lumière zodiacale observée à Munster, en Westphalie, les 25 et 30 janvier.

M. Heis. — Aurores boréales observées au même lieu, le 30 janvier et le 1er février.

M. Piarron de Mondesir. — Nouvelle méthode pour la solution des problèmes de la Mécanique (4e et dernière Partie).

MÉLANGES.

DES RELATIONS ANALYTIQUES ENTRE SIX POINTS SITUÉS SUR UNE CONIQUE;

PAR M. O. HESSE.

Traduit de l'allemand. (*Voir* p. 11.)

Le théorème de l'hexagone de Pascal fournit un moyen très-simple de reconnaître, par la Géométrie, quand six points sont situés sur une conique; mais on ne connaît pas encore de relation analytique simple entre les équations (tangentielles) de six points situés sur une conique. Nous nous proposons, dans ce qui va suivre, d'établir de telles relations.

Soit $W = 0$ l'équation *tangentielle* d'un point pris arbitrairement sur une conique. Il est clair que cette équation peut se mettre sous la forme

$$(1)\qquad W = A + B\lambda + C\lambda^2 = 0,$$

où A, B, C sont trois fonctions linéaires des coordonnées. En effet tous les points définis par l'équation précédente, quand on fait varier λ, se trouvent sur la conique dont l'équation tangentielle est

$$B^2 - 4AC = 0.$$

D'après cela, six points situés sur une conique, 1, 2,..., 6 peuvent être déterminés par les équations

$$(2)\qquad W_1 = 0,\quad W_2 = 0, \ldots,\quad W_6 = 0,$$

où $W_1, W_2, \dots, W_6$ désignent les expressions suivantes :

$$(3)\quad \begin{cases} W_1 = A + B\lambda_1 + C\lambda_1^2, \\ W_2 = A + B\lambda_2 + C\lambda_2^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ W_6 = A + B\lambda_6 + C\lambda_6^2, \end{cases}$$

les six quantités λ_i désignant six valeurs tout à fait arbitraires de variable λ qui figure dans l'équation (1).

Il existe entre les six expressions W de remarquables relations q se déduisent toutes d'un théorème bien connu de la théorie des fra tions rationnelles.

Si l'on désigne par $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_6$ les produits des six quantités définis par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \pi_1 &= (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)\dots(\lambda_1 - \lambda_6), \\ \pi_2 &= (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)\dots(\lambda_2 - \lambda_6), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \pi_6 &= (\lambda_6 - \lambda_1)(\lambda_6 - \lambda_2)\dots(\lambda_6 - \lambda_5); \end{aligned}$$

et si d'ailleurs $\varphi(\lambda)$ désigne une fonction quelconque, du quatrièr degré au plus, de λ, on sait qu'on aura identiquement

$$(4)\quad \frac{\varphi(\lambda_1)}{\pi_1} + \frac{\varphi(\lambda_2)}{\pi_2} + \dots + \frac{\varphi(\lambda_6)}{\pi_6} = 0.$$

Posons dans cette formule $\varphi(\lambda) = W^2$, nous serons conduits au thé rème suivant :

Si $W_1 = 0, W_2 = 0, \dots, W_6 = 0$ *sont les équations tangentielles six points d'une conique, on peut toujours déterminer six grande* $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_6$ *telles, que l'on ait identiquement*

$$(5)\quad \frac{W_1^2}{\pi_1} + \frac{W_2^2}{\pi_2} + \dots + \frac{W_6^2}{\pi_6} = 0.$$

Il est vrai que, d'après les équations (3), les six expressions W a une forme tout à fait déterminée; mais, sous quelque forme que soie écrites les équations de nos six points, il est clair qu'elles ne diffère des six équations (3) que par des multiplicateurs constants, en so que les équations les plus générales des six points seraient de la for

$$V_1 = a_1 W_1 = 0, \quad V_2 = a_2 W_2 = 0, \dots, \quad V_6 = a_6 W_6 = 0.$$

L'équation (5) devient alors

$$\frac{V_1^2}{a_1^2 \pi_1} + \frac{V_2^2}{a_2^2 \pi_2} + \ldots + \frac{V_6^2}{a_6^2 \pi_6} = 0,$$

et l'on voit qu'*elle conserve la même forme*. Toutefois les facteurs constants $a_1^2 \pi_1$ n'ont plus la signification simple qui leur avait été attribuée, et ne représentent plus les produits des différences des six quantités λ. On peut d'ailleurs donner du théorème qui précède une démonstration directe qui permettra d'établir la réciproque.

A cet effet considérons six points d'une conique, dont les coordonnées homogènes soient : $x_1\, y_1\, z_1$, $x_2\, y_2\, z_2, \ldots,$ $x_6\, y_6\, z_6$. Soit

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = 0$$

l'équation de la conique, on aura les six équations

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} Ax_1^2 + A'y_1^2 + \ldots = 0, \\ Ax_2^2 + A'y_2^2 + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Ax_6^2 + A'y_6^2 + \ldots = 0, \end{array}\right.$$

qui expriment que les six points sont sur la conique.

On peut toujours évidemment déterminer six grandeurs $\pi_1, \ldots, \pi_6$, telles, que cinq des six équations suivantes soient satisfaites :

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x_1^2}{\pi_1} + \dfrac{x_2^2}{\pi_2} + \ldots + \dfrac{x_6^2}{\pi_6} = 0, \\[2ex] \dfrac{y_1^2}{\pi_1} + \dfrac{y_2^2}{\pi_2} + \ldots + \dfrac{y_6^2}{\pi_6} = 0, \\[2ex] \dfrac{z_1^2}{\pi_1} + \dfrac{z_2^2}{\pi_2} + \ldots + \dfrac{z_6^2}{\pi_6} = 0, \\[2ex] \dfrac{y_1 z_1}{\pi_1} + \dfrac{y_2 z_2}{\pi_2} + \ldots + \dfrac{y_6 z_6}{\pi_6} = 0, \\[2ex] \dfrac{x_1 y_1}{\pi_1} + \dfrac{x_2 y_2}{\pi_2} + \ldots + \dfrac{x_6 y_6}{\pi_6} = 0, \\[2ex] \dfrac{z_1 x_1}{\pi_1} + \dfrac{z_2 x_2}{\pi_2} + \ldots + \dfrac{z_6 x_6}{\pi_6} = 0. \end{array}\right.$$

Or, si l'on divise les équations (6) respectivement par $\pi_1, \ldots, \pi_6$ et qu'on les ajoute par lignes verticales, on voit que de cinq équations du système (7) résulte toujours la sixième.

Les systèmes (6) et (7), sont donc équivalents et le second, auss bien que le premier, suffit à exprimer que les six points $1, 2, \ldots,$ (sont sur une conique.

Cela posé, multiplions les équations (7) par u^2, v^2, w^2, $2vw$, $2uv$ $2wu$ respectivement, et ajoutons-les par lignes verticales. Le coefficien de $\frac{1}{\pi_i}$ sera $(ux_i + vy_i + wz_i)^2$. Posons $W_i = ux_i + vy_i + wz_i$ $W_i = 0$ sera l'équation tangentielle du point $x_i y_i z_i$, et l'on aura *iden tiquement*

$$\frac{W_1^2}{\pi_1} + \frac{W_2^2}{\pi_2} + \ldots + \frac{W_6^2}{\pi_6} = 0.$$

C'est l'équation de condition (5). Si l'on exprime d'ailleurs que cett équation est identique, c'est-à-dire vérifiée, qu'elles que soient les va leurs du u, v, w, elle se décompose dans les six équations (7). On peu donc énoncer le théorème suivant :

Si $W_1 = 0$, $W_2 = 0, \ldots, W_6 = 0$ *sont les équations de six points, si les premiers membres de ces équations satisfont à une équation iden tique de la forme* (5), *les six points sont sur une conique.*

L'équation (5) a été obtenue en remplaçant, dans l'équation (4 $\varphi(\lambda)$, qui est une fonction du quatrième degré au plus, par W^2. O peut encore remplacer $\varphi(\lambda)$ par W ou λW ou $\lambda^2 W$, et l'on obtie les nouvelles équations identiques

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{1}{\pi_1} W_1 + \frac{1}{\pi_2} W_2 + \ldots + \frac{1}{\pi_6} W_6 = 0, \\ \frac{\lambda_1}{\pi_1} W_1 + \frac{\lambda_2}{\pi_2} W_2 + \ldots + \frac{\lambda_6}{\pi_6} W_6 = 0, \\ \frac{\lambda_1^2}{\pi_1} W_1 + \frac{\lambda_2^2}{\pi_2} W_2 + \ldots + \frac{\lambda_6^2}{\pi_6} W_6 = 0. \end{cases}$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Si $W_1 = 0, \ldots, W_6 = 0$ *sont les équations de six points d'une coniqu on peut toujours trouver six arbitraires* λ *et six arbitraires* π, *telles, q les trois équations* (8) *aient lieu identiquement.*

La réciproque de cette proposition est encore vraie :

Si $W_1 = 0$, $W_2 = 0, \ldots, W_6 = 0$ *sont les équations de six points,*

si l'on peut trouver six arbitraires λ, et six autres constantes π, telles, que les équations (8) aient lieu identiquement, les six points seront sur une conique.

Pour établir cette réciproque, nous montrerons que, lorsque les équations (8) ont lieu, les six points forment un hexagone de Pascal, c'est-à-dire un hexagone dont les côtés opposés se rencontrent en trois points p, q, r situés sur une même droite.

A cet effet, nous remarquerons qu'en éliminant deux des symboles W, les équations (8) fournissent de nouvelles identités, ne contenant que quatre de ces symboles. Multiplions, par exemple, pour éliminer W_5, W_6, les trois équations respectivement par

$$\lambda_5 \lambda_6, \quad -(\lambda_5 + \lambda_6), \quad 1,$$

et ajoutons. Nous obtenons

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} &(\lambda_1 - \lambda_5)(\lambda_1 - \lambda_6)\frac{W_1}{\pi_1} + (\lambda_2 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_6)\frac{W_2}{\pi_2} \\ &+ (\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_6)\frac{W_3}{\pi_3} + (\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_6)\frac{W_4}{\pi_4} = 0. \end{aligned} \right.$$

On obtient de cette manière, en éliminant W_3 et W_6, W_1 et W_4, W_2 et W_5, les équations identiques

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} &(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_6)\frac{W_1}{\pi_1} + (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_6)\frac{W_2}{\pi_2} \\ &+ (\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_6)\frac{W_4}{\pi_4} + (\lambda_5 - \lambda_3)(\lambda_5 - \lambda_6)\frac{W_5}{\pi_5} = 0, \\ &(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_1)\frac{W_2}{\pi_2} + (\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_1)\frac{W_3}{\pi_3} \\ &+ (\lambda_5 - \lambda_4)(\lambda_5 - \lambda_1)\frac{W_5}{\pi_5} + (\lambda_6 - \lambda_4)(\lambda_6 - \lambda_1)\frac{W_6}{\pi_6} = 0, \\ &(\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_2)\frac{W_3}{\pi_3} + (\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_2)\frac{W_4}{\pi_4} \\ &+ (\lambda_6 - \lambda_5)(\lambda_6 - \lambda_2)\frac{W_6}{\pi_6} + (\lambda_1 - \lambda_5)(\lambda_1 - \lambda_2)\frac{W_1}{\pi_1} = 0. \end{aligned} \right.$$

Soient maintenant les trois équations suivantes, *qui ne sont plus*

des identités et qui représentent trois points en coordonnées tangentielles:

$$p)\qquad (\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_6)\frac{W_1}{\pi_1}+(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_6)\frac{W_2}{\pi_2}=0,$$

$$q)\qquad (\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_1)\frac{W_2}{\pi_2}+(\lambda_3-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_1)\frac{W_3}{\pi_3}=0,$$

$$r)\qquad (\lambda_3-\lambda_5)(\lambda_3-\lambda_2)\frac{W_3}{\pi_3}+(\lambda_4-\lambda_5)(\lambda_4-\lambda_2)\frac{W_4}{\pi_4}=0.$$

Considérons l'un de ces points, le premier par exemple. En vertu de la première des identités (10), son équation pourrait s'écrire

$$(\lambda_4-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_6)\frac{W_4}{\pi_4}+(\lambda_5-\lambda_3)(\lambda_5-\lambda_6)\frac{W_5}{\pi_5}=0.$$

On voit donc que ce point est à la fois sur les côtés (12) d'après la première équation, et (45) d'après la seconde. C'est donc le point d'intersection des deux cotés opposés (12) et (45) de l'hexagone. On verrait de même que le point q) est à l'intersection des cotés (23) et (56) et le point r) à l'intersection des cotés (34) et (61).

D'ailleurs si l'on multiplie les trois équations p), q), r), par

$$(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_5),\quad (\lambda_3-\lambda_6)(\lambda_3-\lambda_5),\quad (\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_6),$$

et qu'on les ajoute, on retrouve l'équation identique (9), multipliée par $(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_2)$. Puisque les équations des trois points ont une somme identiquement nulle, les trois point sont en ligne droite, ce qui est le théorème de Pascal $(^*)$.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Annuaire pour l'an 1870, publié par le Bureau des Longitudes, avec des Notices scientifiques. In-18 jésus, 635 pages. Paris, Gauthier-Villars. 1 fr. 25 c.

$(^*)$ On pourrait deduire de la méthode de M. Hesse les théorèmes plus compliqués relatifs aux différents hexagones de Pascal. Nous pourrons revenir sur ce sujet dans une autre occasion. G. D.

Argelander (F. W. A.). — Beobachtungen und Rechnungen über veränderliche Sterne. Gr. in-4. Bonn, Marcus. 2 thlr.

Bertin (E.). — Étude sur la houle et le roulis. Gr. in-8; 1869. Cherbourg, Bedelfontaine.

Bertrand (J.). — Traité de Calcul différentiel et intégral (*Calcul intégral*. Première Section : *Intégrales définies et indéfinies*). In-4, XII-725 pages, avec figures dans le texte; 1870. Paris, Gauthier-Villars. 30 fr.

Bienaymé (I. J.). — Sur un principe que Newton avait cru découvrir et qu'il avait appelé : *Loi des grands nombres*. In-8, 14 pages. Paris, Anger.

Berichte der zur Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss d. J. 1868, nach Aden unternommenen österr. Expédition. 7 Bericht (Schluss); Lex. in-8. Wien, Gérold. 12 ngr.

Bassac. — Topographie de précision, méthode de cheminement au théodolite. In-8, XXIV-81 pages, 5 tableaux et 1 plan. Noyen, Audrieux.

Connaissance des Temps ou *des mouvements célestes*, à l'usage des astronomes et des navigateurs, pour l'an 1871, publié par le Bureau des Longitudes. Gr. in-8; 1869. Paris, Gauthier-Villars.

Avec additions. 6 fr. 50 c.

Sans additions. 3 fr. 50 c.

Drew (W. H.). — A Geometrical Treatise on conic Sections; with numerous examples. 4[e] édition, 136 pages, cloth. London, Macmillan. 4 sh. 6 d.

Duda (Th.). — Versuch einer naturgemässen Entwickelung der Aehnlichtkeitslehre. Brieg, Bänder's Buchh. $\frac{1}{6}$ thlr.

Geiser (C. F.). — Einleitung in die Synthetische Geometrie. Ein Leitfaden beim Unterrichte an höheren Realschulen und Gymnasien. Gr. in-8. Leipzig, Teubner. 1 thlr.

Hesse (O.). — Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, insbesond uber Oberflächen zweiter ordnung. 2 Aufl. Gr. in-8. Leipzig, Teubner. 3 $\frac{1}{3}$ thlr.

Kommerel. — Aufgaben sammlung aus der darstellenden Geometrie. Gr. in-4. Geh. Tübingen, Fues. 12 ngr.

Matthiessen (L.). — Commentar zur Sammlung von Beispielen und

Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra, v
E. Heis. Gr. in-8. Köln, Du Mont, Schauberg. $\frac{2}{3}$ thl

Price (B.) — A Treatise on Infinitesimal Calculus. Vol. 3, 2e éd
In-8, 682 pages, cloth. London, Macmillan. 16 s

Riemann (B.). — Partielle Differential-Gleichungen und deren A
wendung auf Physikalische Fragen vorlesungen, für den Dru
bearbeitet und herausgegeben, von K. Hattendorf. Gr. in-
Braunschweig, Vieweg und Sohn. 2 thl

Salmon (G.). — Traité de Géométrie analytique (*sections conique*
traduit de l'anglais par MM. Resal et Vaucheret. In-8, avec figu
dans le texte; 1870. Paris, Gauthier-Villars. 10 :

Salmon (G.). — Elementi di geometria analitica a tre coordina
estratti dal trattato di G. Salmon, per N. Salvatore Dino. In-
105 pages. Napoli, Pellerano. 3 l. 50

Schlömilch (O.). — Fünfstellige logarithmische und trigonometrisc
Tafeln, 2 Ausfl. Braunschweig, Vieweg. $\frac{2}{3}$ th

Stéphan. — Rapport sur l'observation de l'éclipse de Soleil
18 août 1868. In-8, 76 pages, avec plusieurs cartes et photog
phies. Paris, Imprimerie impériale. (Extrait des *Archives des m
sions scientifiques.*)

Todhunter (J.). — Trattato sul Calcolo differenziale con molti esemp
Versione dall' inglese con aggiunte, per G. Battaglini. In-
440 pages. Napoli, Pellerano. 6

Todhunter (J.). — Plane Trigonometry for Colleges and Schoo
4e édit., in-8, 292 pages, cloth. London, Macmillan. 5 :

Tychsen (C.). — Grund principerne for Differentiation og Integrat
af Funktioner med een og to uafhaengige variable. Til Brug
Selvundervisning, 156 sider, 18. Kjöbenhavn, Steen. 1 rd 24

Weyr (E.). — Theorie der mehrdeutigen geometrischen Element
gebilde u. der algebraïschen Curven u. Flächen als deren Erze
nisse. Gr. in-8. Leipzig, Teubner. 18 n

Winckler (A.). — Über einige vielfache Integrale. Lex.8. Wien, (
rold. 3 n

Zetsche (K. E.). — Leitfaden für den Unterricht in der ebenen u
raümlichen Geometrie. Lex.8. Chemnitz, Brunner. 18 n

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

BERTRAND (J.), membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique et au Collége de France. — TRAITÉ DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DE CALCUL INTÉGRAL. *Calcul intégral. Intégrales définies et indéfinies.* — In 4°, XII-725 pages; 1870. Paris, Gauthier-Villars. Prix : 30 francs.

« Ce Volume, qui fait suite au *Traité de Calcul différentiel*, publié il y a six ans déjà, en 1864, contient la première Section du Calcul intégral. Les intégrales définies et indéfinies y sont étudiées avec le développement que m'a paru comporter, sur ce sujet presque illimité, un livre qui, pour les géomètres, doit rester l'exposition élémentaire des principes. Mon intention, en effet, je tiens à le répéter, n'est pas de remplacer, par la lecture attentive d'un seul ouvrage, l'étude laborieuse des œuvres originales qui ont créé la science : une telle tâche, heureusement, serait impossible. Si je puis enseigner à ceux qui me prendront pour guide ce que j'appellerais volontiers la *Grammaire* et la langue des hautes Mathématiques, et accroître, loin de le diminuer, le nombre des lecteurs des Lagrange, des Gauss, des Abel, des Jacobi et des Cauchy, j'aurai rendu à la science un service très-modeste, mais de réelle importance. »

Ces quelques lignes, qui forment le début de l'Avertissement placé au commencement du Volume, indiquent, avec toute la netteté possible, le but que s'est proposé M. Bertrand. Tous les géomètres connaissent d'ailleurs et ont soigneusement étudié le Calcul différentiel dont la première édition est maintenant épuisée. Tandis que ce premier Volume amenait, comme le désirait l'auteur, les jeunes géomètres à l'étude des Mémoires originaux écrits par les maîtres de la science, il fournissait aux savants déjà exercés la première idée de remarquables travaux sur des points importants mis pour la première fois en lumière et développés avec la plus grande simplicité. Le Calcul intégral n'aura pas une influence moins heureuse, nous l'espérons, sur le progrès des études; il était attendu avec impatience, et l'accueil qu'il recevra du public récompensera M. Bertrand du travail considérable qu'il a dû s'imposer pour la publication d'une œuvre aussi importante, et qui, dans l'état actuel de la science, paraissait presque au-dessus des forces d'une seule personne.

Avant d'entrer dans l'examen des différents Chapitres, disons quelques mots de la méthode qui nous paraît avoir été suivie dans l'exposition de ces théories si diverses et souvent si peu directes du Calcul intégral. Dès les premières pages, le lecteur appréciera sans doute l'ordonnance parfaite qui règne dans les différentes parties de l'exposition. Les géomètres très-habiles pourront, peut-être, désirer des démonstrations plus complètes et plus développées sur quelques points; l'essentiel, à nos yeux, c'est que les objections auxquelles peut prêter une démonstration généralement admise, les cas particuliers dans lesquels elle peut n'avoir aucune valeur soient indiqués avec précision, et c'est ce que ne manque jamais de faire M. Bertrand. Les jeunes étudiants, surtout, devront lui être reconnaissants de cette méthode par laquelle, sans les induire en erreur, on leur épargne ce que la science a de plus ardu et de moins intéressant, tout en leur donnant les moyens de continuer leurs études, et de lire avec fruit les Mémoires les plus difficiles, où les différentes questions sont traitées de la manière la plus complète et la plus détaillée.

Grâce aux limites imposées au développement des différents sujets, le livre, tout en étant suffisamment complet, se lit sans fatigue; chaque Chapitre et presque chaque page contiennent d'importantes démonstrations, propres à exciter vivement l'intérêt et présentées avec la clarté que connaissent les lecteurs et les élèves de M. Bertrand. C'est ainsi que nous avons réussi, pour la première fois, à bien comprendre le système nouveau et si difficile de représentation de Riemann. L'exposition rapide qu'en fait M. Bertrand aura le mérite, si la méthode de Riemann n'est pas abandonnée, de conduire plusieurs géomètres à l'étude des beaux Mémoires écrits par ce savant dont la science entière déplore la mort prématurée et qui paraît avoir été aussi remarquable par les qualités aimables du cœur que par la distinction de son esprit (*).

L'Ouvrage se compose de trois Livres principaux dont nous allons indiquer rapidement le contenu.

LIVRE I. Intégrales définies et indéfinies.

CHAPITRE Ier. *Diverses méthodes pour l'intégration des différentielles.* Préliminaires. Le § IV traite de quelques sommations réduites

(*) Voir B. RIEMANN, *Équations aux dérivées partielles publiées par K. Hattendorf*, *Préface*, et *Notice sur Riemann* dans les *Actes de la Société de Göttingue*.

des intégrales, par exemple la somme

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

lorsque n croît indéfiniment. Fonctions hyperboliques.

Chapitre II. *Intégration des fractions rationnelles.*

Chapitre III. *Intégration des différentielles algébriques irrationnelles.*

C'est à la fin de ce Chapitre qu'est traitée la réduction des intégrales elliptiques à la forme normale. Cette disposition offre l'avantage de dégager et de simplifier à l'avance la théorie des fonctions elliptiques. La méthode de réduction employée est celle qui résulte de la *transformation linéaire* de la forme

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\alpha' x' + \beta'}.$$

L'auteur termine par l'examen de quelques intégrales se ramenant aux intégrales elliptiques.

Chapitre IV. *Intégration des fonctions trigonométriques et exponentielles.*

Chapitre V. *Sur l'impossibilité de certaines intégrations.*

Cet important Chapitre contient le résumé des travaux d'Abel et de M. Liouville sur l'impossibilité de certaines intégrations. L'étude de ces travaux est justifiée par leur intérêt propre, l'ordre d'idées suivi l'amenait d'ailleurs d'une manière nécessaire. Après avoir exposé les différentes méthodes d'intégration, après avoir montré qu'elles ne réussissent que dans un nombre restreint de cas, il était bon d'expliquer que certaines intégrations sont tout à fait impossibles avec le nombre limité de *signes de fonctions* adoptés par les géomètres. Le Chapitre contient l'exposé des démonstrations de M. Liouville, au moins dans les cas les plus simples, et se termine par une application de la méthode d'Abel au cas où l'intégrale $\int \frac{P\,dx}{\sqrt{R}}$ contient un seul logarithme.

Chapitre VI. *Calcul direct des intégrales définies.*

Chapitre VII. *Emploi des séries dans le calcul des intégrales définies.*

On trouvera, à la fin de ce Chapitre, quelques formules très-géné-

rales dues à Poisson, Abel, Jacobi, Kummer, et contenant des fon tions arbitraires. Ces formules, néanmoins, sont soumises à quelqu restrictions qui sont soigneusement indiquées. Toutefois la formu suivante

$$\int_0^\pi \varphi^{(i)}(\cos x)\sin^{2i} x\, dx = 3.5\ldots(2i-1)\int_0^\pi \varphi(\cos x)\cos ix\, dx$$

est vraie dans tous les cas, comme cela résulte de la seconde monstration donnée p. 174.

Chapitre VIII. *Différentiation et intégration sous le signe $\int$. Application au calcul des intégrales définies.*

Chapitre IX. *Intégrales définies obtenues par des méthodes diver*

Théorème de Cauchy. Formules de Frullani, de Fourier. In grale de Dirichlet $\int \frac{\sin nx}{\sin x}\varphi(x)\,dx$, lorsque n croît indéfiniment.

Ces quatre derniers Chapitres forment un recueil bien comp d'intégrales définies, dans lequel les recherches sont facilitées une division méthodique et par la Table analytique placée à la fin l'Ouvrage.

Chapitre X. *Intégrales eulériennes.*

Théorie développée des intégrales eulériennes de première et seconde espèce.

Définition. Formule d'Euler. Évaluation de $\Gamma(x)$ pour x tr grand. Expression $\Gamma(n)$ sous forme de produit infini. Dévelop ment de $l\Gamma(n+1)$ en série. Calcul numérique des intégrales eu riennes. Étude de la fonction $\psi(x) = \frac{dl\Gamma(x)}{dx}$. Application au cal des probabilités. Intégrales eulériennes de première espèce. Tal d'intégrales eulériennes.

Ce Chapitre contient, on le voit, un ensemble de propositions la plus grande importance. On y retrouvera avec plaisir une t ingénieuse démonstration de Gauss, pour calculer la fonction $\psi($ lorsque x est commensurable.

Chapitre XI. *Intégrales prises entre des limites imaginaires.*

C'est à Cauchy, on le sait, que revient l'immortel honneur d'a créé cette théorie des intégrales à limites imaginaires, destinée à ren veler le Calcul intégral. Jusqu'à l'apparition du Mémoire sur les i

grales définies prises entre des limites imaginaires, on pouvait croire que le cercle d'idées ouvert par Newton et Leibnitz avait été exploré dans ses parties essentielles. Quelques théories paraissaient seules manquer au développement du Calcul intégral, et, au commencement du siècle, Lagrange, Laplace, Fourier avaient surtout étudié les applications du Calcul différentiel à la Mécanique, à l'Astronomie et à la Physique mathématique. Cauchy, par sa théorie, a ouvert une voie nouvelle dans laquelle l'ont suivi, avec le plus grand succès, les plus éminents géomètres de notre époque. MM. Puiseux, Weierstrass, Riemann, Briot et Bouquet, Clebsch et Gordan ont déjà fondé, en prenant tous pour base les travaux de Cauchy, des théories importantes dont l'étude s'impose à tous les géomètres désireux de s'instruire et de faire progresser à leur tour le Calcul intégral. Grâce aux notions dues à Cauchy et aux développements récents que nous venons de signaler, on a été conduit à une manière nouvelle de poser tous les problèmes du Calcul intégral, qui promet à notre époque de nombreuses et importantes découvertes. M. Bertrand expose, avec les développements nécessaires, la théorie de Cauchy; mais il commence par une remarque nouvelle sur un Mémoire de Poisson.

Dès 1811, on ne peut le contester, Poisson avait rencontré la difficulté relative aux imaginaires et avait fait un pas notable vers la solution. Cette remarque n'enlève rien, du reste, dans l'esprit de l'auteur, aux droits de Cauchy : « Ce passage très-remarquable, dit-il (p. 294), contient la définition précise des intégrales imaginaires qui ont joué depuis un rôle si important; mais, satisfait d'avoir écarté une difficulté singulière qui l'avait un instant étonné, Poisson n'a suivi aucune des conséquences de son ingénieuse explication, en laissant à Cauchy l'honneur de créer la théorie nouvelle. »

Les exemples choisis et développés feront bien comprendre l'utilité des idées nouvelles proposées par Cauchy; l'auteur justifie quelques démonstrations dans lesquelles les intégrales imaginaires ont été introduites sans examen suffisant; en sorte que son exposition peut être considérée comme la préparation la plus convenable à l'étude des ouvrages spéciaux où l'on glisse beaucoup trop rapidement sur les commencements de la théorie. Le Chapitre se termine par les conséquences les plus importantes : variation brusque d'une intégrale imaginaire; nombre des racines dans un contour; recherches

de M. Puiseux; aperçu sommaire des méthodes de représentati des imaginaires suivies par Riemann.

CHAPITRE XII. *Calcul numérique de la valeur approchée d'une int grale définie.*

Méthode des trapèzes, de Cotes, de Simpson. Méthode de Gau par les fonctions X_n. Application à un exemple. Formule d'Eule Cette formule si importante est celle qu'on peut écrire de la mani suivante

$$\Delta u_x = h u'_x + \frac{h}{2} \Delta u'_x - \frac{B_1}{1.2} h^2 \Delta u''_x + \ldots .$$

La démonstration en est présentée avec la plus grande simplici grâce à des développements préliminaires que M. Bertrand avait la prévoyance de placer dans le premier Volume.

LIVRE II. Applications et développements.

CHAPITRE Ier. *Évaluation des aires planes et des arcs de courbe.*

Théorèmes de Steiner sur les roulettes, de M. Holditch, de Pasc de Fagnani, de M. Chasles sur les arcs d'ellipse, et de M. Talbot.

CHAPITRE II. *Évaluation des surfaces courbes.*

Emploi des coordonnées curvilignes. Surface de l'ellipsoïde trai par les méthodes les plus simples. Introduction des rayons de co bure dans l'expression de la surface, etc.

CHAPITRE III. *Détermination des volumes.*

CHAPITRE IV. *Calcul de l'attraction des corps solides.*

Loi générale de l'attraction. Solide de plus grande attracti Attraction d'une sphère, d'un ellipsoïde. Potentiel. Principe images.

CHAPITRE V. *Théorie des intégrales multiples.*

Formule de Poisson. Méthode de Dirichlet. Changement de var bles. Courbure totale d'une surface fermée. Formule de Gree Théorie des surfaces de niveau par M. Chasles. Théorème M. Crofton. Le dernier théorème est celui qui a été communiqu l'Académie des Sciences, et qui établit une relation entre une int grale double étendue à l'extérieur d'une courbe convexe, l'aire et périmètre de cette courbe. Nous croyons nouvelle la démonstrati

que propose M. Bertrand et qui est fondée sur le calcul des probabilités.

Chapitre VI. *Calcul inverse des intégrales définies.*

Transformation d'une série en intégrale définie. Série hypergéométrique de Gauss. Fonctions génératrices d'Abel.

Les problèmes qui font l'objet de ce Chapitre ne sont pas susceptibles d'une définition précise. On peut, d'une infinité de manières, exprimer une quantité par une intégrale définie. M. Bertrand a réuni les exemples les plus élégants. Nous avons plus particulièrement remarqué le problème général traité par Abel, à l'occasion de la tautochrone dans le vide.

Chapitre VII. *Quelques développements en série.*

Formule de Taylor. Théorème de Laurent. Fonctions bien définies. Série de Lagrange, démontrée par la méthode si simple de M. Rouché. Séries trigonométriques conformément aux principes de Dirichlet. Fonctions Y_n de Laplace. Développements en séries ordonnées suivant ces fonctions.

Chapitre VIII. *Intégrabilité des fonctions différentielles.*

Cette question, on le sait, a fait l'objet des recherches de plusieurs géomètres et de M. Bertrand en particulier. On trouvera, dans ce Chapitre, des résultats élégants obtenus par l'auteur et quelques autres géomètres, Poisson, Joachimsthal, etc.

Livre III. Théorie des fonctions elliptiques.

Ce Livre, le dernier du volume, contient seulement les points essentiels de la théorie. Les fonctions elliptiques ont acquis aujourd'hui une grande importance; pour les traiter complétement, il faudrait leur consacrer au moins tout un volume. Si M. Bertrand nous avait donné une étude aussi complète, nous lui en aurions été certainement très-reconnaissants, mais il faut bien avouer qu'un tel développement aurait établi une grande disproportion entre les différentes parties de l'œuvre. On sait que deux méthodes principales et tout à fait différentes peuvent être adoptées dans l'exposition de la théorie. Jacobi et M. Hermite, laissant de côté le Calcul intégral, ont commencé par la théorie développée des fonctions Θ. M. Bertrand est resté fidèle à l'ordre historique. La méthode qu'il a suivie et qu'il avait déjà développée dans son cours du Collége de France, est celle qui a son origine dans les travaux d'Abel et de Cauchy.

Chapitre Ier. *Théorèmes relatifs à l'addition des intégrales.*

Méthodes de Lagrange, de Jacobi. Théorèmes de Poncelet. Thé rème d'Abel. Interprétation géométrique de M. Clebsch.

Le théorème d'Abel ne nous a pas paru développé d'une mani suffisamment complète. Espérons que, dans la prochaine éditic M. Bertrand lui consacrera une place plus honorable, ainsi qu'à théorie des fonctions abéliennes qui a fait dans ces derniers tem des progrès si considérables.

Chapitre II. *Double périodicité des fonctions elliptiques.*

Addition des arguments. Définition précise des fonctions ellip ques. Théorèmes généraux sur les fonctions périodiques. Propositi de M. Liouville : l'auteur fera un emploi fréquent de cette imp tante proposition qui introduit tant de simplicité dans la théo Elle remplace, en effet, d'une manière avantageuse, la considérat des fonctions symétriques des racines qui a été le point de dép d'Abel dans ses Mémoires sur la multiplication et la transfor tion.

Nous avons aussi remarqué une démonstration géométrique t simple de l'impossibilité d'une troisième période. Cette démons tion avait été déjà donnée dans le cours de M. Bertrand, mais il juste d'indiquer, à cause de l'importance du principe employé, Dirichlet avait fait usage de considérations semblables dans son *moire sur la réduction des formes quadratiques ternaires*, inséré *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. IV, p. 2

Chapitre III. *Multiplication et division de l'argument.*

D'après la méthode d'Abel, simplifiée par Jacobi. Application points d'inflexion des courbes du troisième ordre.

Chapitre IV. *Expressions des fonctions elliptiques sous forme produits.*

La théorie de la multiplication indique, comme pour les foncti circulaires, la forme de ces développements qui sont ensuite étal en toute rigueur. Influence de l'ordre des facteurs dans les prod infinis. Théorèmes de M. Cayley.

Chapitre V. *Fonctions* H(x), $\Theta(x)$ *de Jacobi.*

Développements en série. Intégrales de deuxième et de troisiè espèce.

Chapitre VI. *Transformation des fonctions elliptiques.*

Transformations linéaires. Échelle des modules de Lagrange, de Gauss. Principe algébrique de Jacobi. Théorie d'Abel.

Chapitre VII. *Calculs numériques. Tables.*

Ce dernier Chapitre est consacré à des applications et à des calculs très-intéressants. Il se termine par quatre Tables donnant les valeurs numériques des fonctions elliptiques.

C'est avec la théorie des fonctions elliptiques que se termine ce premier Volume de Calcul intégral. L'analyse rapide que nous venons d'en faire ne peut donner qu'une idée bien imparfaite des nombreuses richesses réunies et mises en œuvre dans ce volume de plus de 700 pages, dont la lecture est pourtant si facile et si attrayante. Espérons que nos jeunes mathématiciens sauront mettre à profit les leçons d'un maître si dévoué, et lui fournir l'occasion d'ajouter de nouveaux Chapitres à son livre dans la prochaine édition. En tous cas, nous serons l'interprète de tous auprès de l'auteur en le remerciant sincèrement, et en le priant de toutes nos forces de hâter l'impression du troisième Volume dont tant de parties sont déjà préparées et communiquées aux savants par l'enseignement même de M. Bertrand.

G. D.

DURÈGE (Dr H.), ord. Professor am Polytechnicum zu Prag. — Theorie der elliptischen Functionen. *Versuch einer elementaren Darstellung.* — Zweite Auflage; 1868. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. Prix : 3 Thlr. (*).

M. Durège, à qui l'on doit le premier Ouvrage spécial qui ait paru sur la *Théorie des quantités complexes* (**), avait déjà, en 1861, publié, le premier, un traité élémentaire des fonctions elliptiques,

(*) *Théorie des Fonctions elliptiques. Essai d'une exposition élémentaire;* par le Dr H. Durège, professeur ordinaire à l'Institut Polytechnique de Prague. 2e édit. Leipzig, chez B.-G. Teubner; 1868. In-8°, XII-388 pages.

(**) *Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse, mit besonderer Berücksichtigung der Schöpfungen Riemanns bearbeitet von* Dr H. Durège, ordentl. Professor am Polytechnicum zu Prag. Leipzig, Druck und Verlag von B.-G. Teubner; 1864. In-8°, XII-228 pages.

destiné à remplacer le livre déjà vieilli de Verhulst. Le succès de traité, attesté par l'écoulement rapide de la première édition, est aux qualités de rédaction qui le distinguent et au choix heureux plan le plus propre à faciliter aux commençants l'étude de ce branche importante du Calcul intégral.

Dans l'intervalle qui s'est écoulé entre les deux éditions, ont pa deux autres Ouvrages sur le même sujet et destinés au même but q celui de M. Durège. Le premier de ces Ouvrages est le volume pub à Berlin en 1864 par M. Schellbach, et intitulé : *Die Lehre von elliptischen Integralen und den Theta-Functionen*. L'auteur de ce liv a choisi le mode d'exposition recommandé par Jacobi vers la fin sa vie, en prenant pour point de départ les fonctions Θ, défin d'abord comme des produits infinis. Une fois que l'on a établi propriétés fondamentales de ces fonctions, on en déduit, avec u grande facilité, les formules relatives aux fonctions elliptiques. traité de M. Schellbach se recommande par le recueil complet formules qu'il contient et par le soin avec lequel sont exposées méthodes de calcul numérique. Seulement on est forcé de conve que les commencements sont présentés sous une forme synthétiq assez pénible à suivre, et laissent parfois quelques inquiétudes s le rapport de la rigueur des déductions. Un autre inconvénient, point de vue des commençants, résulte des changements que l'auteu cru devoir apporter aux notations classiques (*) proposées par Jaco ce qui peut causer quelque embarras, lorsqu'on veut entreprendre lecture d'un autre livre que celui qu'on a étudié.

L'autre traité dont il est question fait partie du second Volu du *Compendium der höheren Analysis* de M. Schlömilch (Brunswi 1866), et comprend 186 pages de ce volume. Il se divise en de Chapitres, dont le premier traite des *intégrales* elliptiques, d'aprè méthode de Legendre. Le second Chapitre est consacré à l'étude *fonctions* elliptiques, en partant de la double périodicité des fo

(*) Il serait temps, croyons-nous, que les géomètres s'entendissent pour faire ce la variété si grande des notations employées pour représenter les fonctions ellipti et leurs périodes. Pourquoi n'adopterait-on pas uniformément les notations de Jac

$$\sin\mathrm{am}\, u, \quad \cos\mathrm{am}\, u, \quad \Delta\mathrm{am}\, u,$$

en les remplaçant, quand les formules seraient trop longues, par les notations abr de Gudermann

$$\mathrm{sn}\, u, \quad \mathrm{cn}\, u, \quad \mathrm{dn}\, u?$$

G.

tions inverses de l'intégrale de première espèce, et passant de là aux fonctions Al de Weierstrass et aux fonctions Θ de Jacobi.

Malgré les avantages que peuvent présenter, à certains égards, les méthodes suivies par ces deux auteurs, M. Durège a maintenu à très-peu près le plan qu'il avait suivi dans sa première édition, et dont nous allons essayer de donner une idée, en analysant rapidement les diverses Sections du nouveau volume.

SECTION I. *Définition des fonctions elliptiques.*

Ces fonctions sont définies comme formées avec les lignes trigonométriques de la fonction $\varphi = \mathrm{am}\, u$, inverse de l'intégrale

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}.$$

L'auteur adopte la notation de Jacobi, en indiquant les abréviations très-commodes proposées par Gudermann. Comme exemple, il applique ces fonctions à la théorie du pendule circulaire.

SECTION II. *Périodicité des fonctions elliptiques.*

La double périodicité de ces fonctions est établie d'après la méthode de Jacobi, qui est la plus simple, quoique laissant à désirer du côté de la rigueur. Mais l'auteur revient sur cette question dans la dernière Section, où il emploie une méthode à l'abri de toute objection. Il continue à prendre pour exemple l'application des résultats obtenus au problème du pendule circulaire.

SECTION III. *Réduction des intégrales elliptiques à la forme normale.*

Cette question est traitée d'après le Mémoire de Richelot : *Ueber die Substitutionen der ersten Ordnung und die Umformung der elliptischen Integrale in die Normalform* (*Journal de Crelle,* t. XXII). Applications au pendule circulaire et à la rectification de la lemniscate.

SECTION IV. *Des trois espèces d'intégrales elliptiques.*

L'auteur suit la marche de Legendre. Comparaison des notations de Legendre et de Jacobi. Arcs d'ellipse et d'hyperbole.

SECTION V. *Sur une substitution du second ordre pour la réduction des intégrales elliptiques à la forme normale.*

Cette substitution sert à ramener à des valeurs du module et de la

limite supérieure moindres que l'unité l'intégrale

$$\int_0^v \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-\lambda^2 v^2)}},$$

où λ et v sont quelconques. Application au pendule.

SECTION VI. *Le théorème d'addition.*

Intégration de l'équation différentielle elliptique par les méthod de Sturm, d'Euler et de Lagrange. Formules fondamentales qui do nent les valeurs de sin am $(u+v)$, cos am $(u+v)$, etc., et recu des formules les plus importantes qui s'en déduisent.

SECTION VII. *Liaison entre les fonctions elliptiques et la Trigonom trie sphérique.*

Triangle sphérique dont les côtés sont am$u$, am$v$ et am$(u \pm$ Déduction des formules de Gauss au moyen des propriétés des fon tions elliptiques. Démonstration du théorème d'addition par la T gonométrie sphérique.

SECTION VIII. *Le théorème d'addition pour les intégrales de secon et de troisième espèce.*

SECTION IX. *Le théorème d'Abel.*

Cette Section constitue l'addition la plus importante que l'aut ait introduite dans sa seconde édition. Il reproduit la démonstrati donnée par Abel dans son Mémoire intitulé : *Remarques sur quelq propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcenda* (*Journal de Crelle,* t. III, et *Œuvres d'Abel,* t. I, p. 288). C démonstration est restreinte au cas où les intégrales contiennent radical carré portant sur un polynôme entier quelconque, M. I rège n'ayant pas cru qu'il fût nécessaire, dans un Ouvrage élém taire sur les fonctions elliptiques, de parler du cas le plus géné traité par Abel dans ses derniers travaux. De ce théorème on dédu comme cas particulier, le théorème d'addition pour les intégra elliptiques des trois espèces. La méthode d'Abel est exposée d'aille avec la plus grande clarté et les plus heureux éclaircissements.

SECTION X. *Construction géométrique du théorème d'addition, d'a Jacobi.*

Cette construction est tirée du Mémoire publié par Jacobi, dan tome III du *Journal de Crelle,* et intitulé : *Ueber die Anwendung*

elliptischen Transcendenten auf ein Problem der Elementargeometrie, et l'auteur indique les additions qu'y a faites Richelot (*). Elle est fondée sur la considération d'une ligne polygonale inscrite à un cercle et circonscrite à un autre, intérieur au premier. Intégration géométrique de l'équation différentielle elliptique. Condition pour que le polygone se ferme ; application aux polygones de trois, de quatre, de cinq côtés.

SECTION XI. *Transformation de Landen.*

Démonstration géométrique au moyen de la Section précédente. Applications au calcul numérique des intégrales elliptiques.

SECTION XII. *Développement des fonctions elliptiques en produits infinis.*

SECTION XIII. *Développement des fonctions elliptiques en séries.*

SECTION XIV. *Développement en séries des intégrales de seconde espèce.*

SECTION XV. *Développement en séries des intégrales de troisième espèce.*

Dans ces trois dernières Sections, l'auteur a suivi les méthodes indiquées par Jacobi dans ses *Fundamenta.*

SECTION XVI. *La fonction de Jacobi.*

M. Durège désigne sous ce nom, proposé par Dirichlet, la fonction Θ, à laquelle les travaux de Jacobi ont donné une si grande importance. Il expose, d'après les *Fundamenta*, les propriétés de cette fonction, et les relations de ces propriétés avec la théorie des nombres. Démonstration du théorème, que tout nombre est la somme de quatre carrés.

SECTION XVII. *Expression des fonctions elliptiques au moyen de la fonction de Jacobi.*

(*) *Voir aussi Journal de Mathématiques de M. Liouville*, t. X, p. 435 ; — JACOBI : « Sur l'application des transcendantes elliptiques à ce problème connu de la Géométrie » élémentaire : Trouver la relation entre la distance des centres et les rayons de deux » cercles dont l'un est circonscrit à un polygone irrégulier, et dont l'autre est inscrit à » ce même polygone ». T. XI, p. 25 ; — RICHELOT : « Application des transcendantes ellip- » tiques aux polygones sphériques qui sont inscrits à un petit cercle de la sphère, et » circonscrits à un autre petit cercle, simultanément ».

SECTION XVIII. *Des transcendantes elliptiques de troisième espèce*. Étude de ces transcendantes, exprimées à l'aide de la fonction Exposé de la belle découverte de Jacobi.

SECTION XIX. *Mouvement du pendule sphérique.*

SECTION XX. *Fonctions d'une variable complexe, et valeurs multi d'une intégrale définie.*

Cette Section contient un abrégé de la théorie des quantités co plexes d'après Cauchy, Puiseux, Riemann, et se termine par l'app cation de cette théorie à la démonstration rigoureuse de la dou périodicité, telle qu'on la trouve dans l'Ouvrage de MM. Briot Bouquet.

J. HOÜEL.

SALMON (G.), professeur au Collége de la Trinité, à Dublin. LEÇONS D'ALGÈBRE SUPÉRIEURE. Traduit de l'anglais par M. Ba Ingénieur des Ponts et Chaussées, et augmenté de NOTES M. Hermite, Membre de l'Institut. — In-8°, XII-247 pages; 18 Paris, Gauthier-Villars. Prix : 7fr,50.

Lorsque, dans la première moitié de ce siècle, on voyait se mu plier les découvertes dues aux méthodes si fécondes de la Géomé moderne, on pouvait croire cette dernière appelée à prendre le sur l'ancienne méthode de Descartes toutes les fois qu'il s'agi d'arriver à des vérités nouvelles. Guidée par la synthèse en quel sorte intuitive, la méthode analytique devait, disait-on déjà, se bo à vérifier, à généraliser les résultats obtenus sans elle. Il lui m quait, en effet, un principe général qui pût conduire directeme des théorèmes nouveaux, analogues à ceux de la Géométrie su rieure.

Ce principe est fourni par la théorie des *invariants* et des *co riants*. On appelle ainsi les fonctions des coefficients et des varia d'une expression algébrique qui ne changent pas de valeur lors les variables sont soumises à une transformation linéaire. La co dération de ces fonctions doit évidemment conduire à la découv de propriétés des courbes et des surfaces qui sont indépendante choix des axes. En outre, on prévoit l'importance de ces thé

pour l'étude des propriétés projectives des figures, puisque la perspective repose sur une substitution linéaire.

On appelle *forme* une expression algébrique rationnelle, entière et homogène. Toute fonction des coefficients d'une forme, qui ne change pas de valeur lorsque les coefficients changent par suite d'une substitution linéaire effectuée sur les variables, est un invariant absolu de cette forme; on l'appelle *invariant relatif*, ou simplement *invariant*, si sa nouvelle valeur ne diffère de la valeur primitive que par une puissance du module de la substitution. C'est ainsi que l'expression $ac - b^2$ est un invariant de la forme quadratique binaire

$$ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

parce que $a'c' - b'^2 = (ac - b^2)\Delta^2$, si nous désignons par a', b', c' les valeurs des coefficients après la transformation, et par Δ le module de la transformation.

Généralisant la définition des invariants, on appelle *covariant* une fonction comprenant à la fois les coefficients et les variables d'une forme, et dont les valeurs successives, obtenues par des substitutions linéaires, ne diffèrent que par un facteur égal à une puissance du module,

$$\varphi(a', b', \ldots, x', y', \ldots) = \Delta^p . \varphi(a, b, \ldots, x, y, \ldots).$$

Un *contrevariant* est un covariant qui, au lieu des variables x, y,... de la forme donnée, renferme d'autres variables ξ, η, ..., qui sont transformées en même temps que les premières, mais par la substitution inverse, c'est-à-dire qu'on fera

$$x = \lambda_1 x' + \mu_1 y' + \ldots, \quad y = \lambda_2 x' + \mu_2 y' + \ldots, \quad \ldots,$$

et

$$\xi' = \lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta + \ldots, \quad \eta' = \mu_1 \xi + \mu_2 \eta + \ldots, \quad \ldots.$$

Une corrélation de ce genre a lieu, par exemple, entre les coordonnées trilinéaires d'un point et les coordonnées tangentielles d'une droite; elle a lieu encore entre les variables x, y,... et les caractéristiques D_x, D_y, ..., puisque

$$D_{x'} = \lambda_1 D_x + \lambda_2 D_y + \ldots, \quad D_{y'} = \mu_1 D_x + \mu_2 D_y + \ldots, \quad \ldots.$$

Les *divariants* ou covariants mixtes renferment les deux séries de variables x, y, ..., et ξ, η, ..., et ainsi de suite.

A côté des invariants et des covariants d'une forme unique, o peut encore considérer les invariants et les covariants d'un *système* (*formes*. C'est ainsi que le déterminant d'un système d'équatio linéaires est un invariant du système. Le déterminant d'un systè de formes quelconques est un covariant, auquel on donne le nom (*Jacobien*.

L'un des invariants les plus simples est le *discriminant*; on l'obtie en cherchant la résultante des dérivées partielles d'une forme, pri par rapport à chacune des variables. Le discriminant est d'aille égal au carré du produit des différences de toutes les racines de la for (c'est-à-dire de toutes les racines de l'équation qu'on obtient en ég lant cette forme à zéro). Il s'ensuit que la réduction à zéro du disc minant d'une équation exprime la condition nécessaire pour q cette équation ait des racines égales. Si l'équation représente u courbe ou une surface, la réduction à zéro du discriminant expri la condition nécessaire pour que la courbe ou la surface ait un po double. Le discriminant de la forme $ax^2 + 2bxy + cy^2$ est ac — c'est le seul invariant que possède la forme quadratique binaire.

Les deux équations

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0,$$
$$a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 = 0,$$

représentent deux couples de points sur une ligne droite, ou b deux couples de droites passant par un même point; elles ont commun l'invariant

$$ac' + a'c - 2bb',$$

dont la réduction à zéro exprime la condition qui doit être rem pour que les quatre points ou les quatre droites soient en relat harmonique. Les covariants auxquels on donne le nom d'*éman* représentent en Géométrie les courbes ou surfaces polaires d'un p par rapport à une courbe ou surface donnée.

Ces quelques exemples suffiront pour faire comprendre l'im tance géométrique de la théorie des invariants et des covariants, r elle n'est pas moins féconde en résultats qui intéressent l'Alg ordinaire et la Théorie des nombres. La Statique et la scienc mouvement, ainsi que la Physique mathématique, y trouveront el mêmes un moyen de simplifier l'énoncé de leurs résultats.

La théorie en question forme déjà une nouvelle branche de l

gèbre supérieure, que l'on appelle quelquefois l'*Algèbre des transformations linéaires*. On peut en faire remonter l'origine aux travaux de Gauss sur les formes quadratiques; peut-être même faut-il en voir le premier germe dans la découverte des déterminants par Leibniz (1693), renouvelée par Cramer vers 1750; mais ce n'est que depuis vingt ans que la nouvelle branche d'Algèbre s'est constituée en corps de doctrine, grâce aux travaux de Cayley, Sylvester, Hermite, Aronhold, Clebsch, Brioschi, et de quelques autres géomètres. Ce qui en rend l'accès un peu difficile au premier abord, c'est l'introduction d'une foule de termes nouveaux, choisis avec plus ou moins de bonheur; mais cette terminologie est d'un grand secours pour abréger le langage, et les inconvénients qu'elle offre seraient bien moins sensibles, si l'on pouvait s'accorder sur les dénominations à employer, de manière à en restreindre un peu le nombre.

La nouvelle Algèbre fait l'emploi le plus large des méthodes symboliques. On s'habitue ici à manier les symboles d'opérations comme des quantités, à les soumettre aux procédés de calcul ordinaires; cela abrége le raisonnement, à peu près comme les lettres de change, substituées au numéraire, abrégent les opérations commerciales. Ainsi nous pouvons, dans un contrevariant, remplacer les variables $\xi, \eta, \ldots$ par les symboles $D_x, D_y, \ldots$, et nous obtiendrons un symbole d'opération qui ne varie pas lorsque les variables $x, y, \ldots$ sont transformées par une substitution linéaire; en l'appliquant à la forme primitive ou à l'un de ses covariants, nous aurons un nouveau covariant, ou même un invariant, si les variables disparaissent par la différentiation. De même nous pouvons, dans un covariant, remplacer $x, y, \ldots$ par $D_\xi, D_\eta, \ldots$, pour opérer sur un contrevariant, etc.

La méthode très-simple que M. Cayley a donnée pour la formation des invariants et des covariants repose sur les mêmes principes. Étant données plusieurs formes U, V, W, ..., nous pouvons donner aux variables $x, y, \ldots$, dans U l'indice 1, dans V l'indice 2, etc. Or, d'après la règle de la multiplication des déterminants, le symbole

$$\overline{123}\ldots = (D_{x_1}, D_{y_2}, D_{z_3}, \ldots)$$

n'est pas altéré par une transformation linéaire des variables (en faisant toujours abstraction du facteur numérique Δ^p), puisque les caractéristiques $D_x, D_y, \ldots$ se transforment par la substitution inverse.

Il s'ensuit que le résultat de l'opération

$$\overline{123}^{\alpha} . \overline{134}^{\beta} \ldots UVW \ldots$$

sera un invariant, si les variables ont disparu, ou bien un covarian s'il en reste et si l'on supprime les indices. Ainsi, en faisant

$$U = ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad V = a'x^2 + 2b'xy + c'y^2,$$

on aura, en supprimant le facteur numérique 4,

$$\overline{12}^2\, UV = ac' + a'c - 2bb'.$$

Rien n'empêche d'ailleurs de prendre pour U, V, W,... la mên fonction ; ainsi

$$\overline{12}^2\, UU = ac - b^2.$$

MM. Aronhold et Clebsch ont modifié ce procédé comme il sui En mettant x_1, x_2, x_3, pour x, y, z, la forme ternaire de degré n pe s'écrire

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^n,$$

où il faut, après développement, remplacer le produit $a_i\, a_k\, a_l$ par coefficient a_{ikl}. Si l'on fait encore $b_i\, b_k\, b_l = c_i\, c_k\, c_l = \ldots = a_{ikl}$, on au par exemple, un invariant de la forme cubique ternaire ($n = 3$) développant le produit des déterminants

$$(a_1 b_2 c_3)(b_1 c_2 d_3)(c_1 d_2 a_3)(d_1 a_2 b_3) = \overline{123}.\overline{234}.\overline{341}.\overline{412}.$$

Nous n'insistons pas plus longuement sur le détail de ces méthod ingénieuses et fécondes ; ceux qu'elles intéressent les trouveront ex sées d'une manière très-lucide dans l'Ouvrage du Rév. George Salmo dont M. Bazin vient de nous donner la traduction. M. Salmon, pr fesseur au Collége de la Trinité à Dublin, a publié en outre une *Gé métrie analytique des sections coniques* et une *Géométrie à trois dime sions,* où les nouvelles méthodes sont appliquées d'une manie magistrale ; ses Ouvrages sont devenus classiques en Angleterre, les excellentes traductions de M. Fiedler les ont popularisés en All magne. M. Bazin a certainement rendu service à la science en faisa connaître en France un abrégé substantiel des *Lessons introductory the modern higher Algebra,* complété par quelques applications em pruntées aux traités de Géométrie du même auteur. M. Hermite bien voulu enrichir le livre de plusieurs Notes extraites de ses Rech

ches sur l'équation du cinquième degré. On peut donc espérer que les *Leçons d'Algèbre supérieure* trouveront en France l'accueil que cet Ouvrage mérite à un si haut degré.

R. RADAU.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK. — Herausgegeben unter der verantwortlichen Redaction von Dr O. SCHLÖMILCH, Dr E. KAHL, und Dr M. CANTOR. T. XIV; 1869 (*).

LOMMEL (E.). — *Exposition élémentaire des phénomènes de diffraction de Fraunhofer.* (47 p., 1 pl.)

THOMAE (J.). — *Note sur la théorie de la fonction*

$$P\begin{pmatrix}\alpha, \beta, \gamma \\ \alpha', \beta', \gamma' \end{pmatrix}, x\Big).$$

(14 p.)

Étude d'une intégrale déjà considérée par Riemann

$$x^{\alpha}(1-x)^{\gamma}\int s^{-\alpha'-\beta-\gamma'}(1-s)^{-\alpha'-\beta'-\gamma}(1-xs)^{-\alpha-\beta-\gamma}\,ds,$$

et prise entre les limites $0, 1, \frac{1}{x}, \infty$.

WIENER (CHR.). — *Calcul des altérations dans un réseau variable de triangles.* (3 p.)

BECKER (J.-C.). — *Sur les polyèdres.* (2 art., 18 p.)

Étude des surfaces polyédriques au point de vue de leur connexion simple ou multiple.

SCHLÖMILCH (O.). — *Sur la valeur de* arc tg $(\xi + i\eta)$. (3 p.)

(*) *Journal de Mathématiques et de Physique*, publié sous la rédaction responsable de MM. O. SCHLÖMILCH, E. KAHL et M. CANTOR. Leipzig, chez B.-G. Teubner. Fondé en 1856 par O. SCHLÖMILCH et B. WITZSCHEL. Publié par livraisons bimensuelles, formant chaque année un volume grand in-8° (en langue allemande). Chaque livraison est accompagnée d'un Bulletin bibliographique (*Literaturzeitung*) donnant deux fois par an la liste *par ordre de matières* des Mémoires publiés dans les principaux recueils scientifiques.

HORVATH. — *Sur la valeur approchée de* $\sqrt{u^2+v^2+w^2}$. (Extrait d journal *l'Institut*, année 1868, n° 1782.)

WITTWER (C.). — *Essai d'une théorie des gaz.* (16 p.)

STAUDIGL (R.). — *Étude de quelques formes de voûte, au moy desquelles on peut couvrir un espace de base trapézoïdale.* (24 p, 1 pl

CANTOR (G.). — *Sur les systèmes simples de numération.* (8 p.)

BAUR (C.-V.). — *Résolution d'un système d'équations dont l'u est quadratique et les autres linéaires.* (2 art., 22 p.)

LOSCHMIDT (J.). — *Le potentiel des masses électriques en mou ment, déduit du potentiel relatif à l'état de repos.* (7 p.)

ENNEPER (A.). — *Sur un problème de Géométrie sphérique.*

Trouver la relation entre les éléments de deux ellipses, dont l'u est inscrite et l'autre circonscrite à un polygone donné.

CANTOR (G.). — *Deux théorèmes sur une certaine décomposition d nombres en produits infinis.* (9 p.)

SCHLÖMILCH (O.). — *Sur quelques courbes dérivées des sections niques.* (6 p.)

Lieu du pôle d'une droite de longueur constante inscrite dans u conique.

HANKEL (H.). — *La découverte de la gravitation et Pascal.* (9 p.)

HELMERT (F.-R.). — *Sur la théorie des réseaux trigonométriqu* (35 p.)

OLIVIER (A.). — *Sur la génération des courbes géométriques terminées par les points d'intersection inconnus de courbes donn* (41 p.)

SCHLÖMILCH (O.). — *Sur la série harmonique.* (4 p.)

Lejeune-Dirichlet a montré, dans les *Mémoires de l'Académie Berlin* pour 1837, qu'il n'est pas permis de changer l'ordre des ter dans une série infinie. Par exemple, les deux séries

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\cdots$$

et

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots,$$

quoiqu'elles contiennent les mêmes termes, ont une somme tout à fait différente : la première $l.2$, la seconde $\frac{3}{2}\,l.2$. Ce résultat est susceptible d'une double généralisation, en ce sens qu'on peut d'abord prendre, au lieu de la série considérée par Dirichlet, la suivante

$$S = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} - \ldots,$$

et en second lieu en ce que, au lieu de prendre deux termes positifs suivis d'un terme négatif, on peut faire suivre p termes positifs et q termes négatifs, et l'on forme une nouvelle série T, qui ne diffère de S que par l'ordre des termes. Cela posé, on a

$$T = S + \frac{1}{2}\,l.\frac{p}{q}.$$

Toeplitz (J.). — *Des relations qui existent entre les coordonnées trilinéaires et tétraédriques.* (7 p.)

Grube (F.). — *Historique du théorème de Maclaurin, concernant l'attraction des ellipsoïdes confocaux.* (6 p.)

Grube (F.). — *Attraction d'un segment limité par une surface du second degré et par deux plans perpendiculaires à son axe.* (23 p.)

Kötteritzsch (Th.). — *Distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs.* (2ᵉ art., 20 p.)

Burmester (L.). — *Sur les isophotes (lignes d'égale intensité lumineuse).* (2ᵉ part., 21 p., 1 pl.)

Schell (A.). — *Sur l'exactitude de l'équation des angles de l'instrument à niveler de Stampfer.* (8 p.)

Becker (J.-C.). — *Note additionnelle à l'article sur les polyèdres.* (*Voir* plus haut.)

Loschmidt (J.). — *Mouvement de l'électricité dans un courant galvanique.* (3 p.)

Thomae (J.). — *La formule récurrente*

$$(B + An)\varphi(n) + (B' - A'n)\varphi(n+1) + (B'' + A''n)\varphi(n+2) = 0.$$

(19 p.)

Durège (H.). — *Sur une construction facile des courbes du troisième ordre qui passent par les points à l'infini sur le cercle.* (4 p.)

Grelle (Fr.). — *Tétraèdre de volume maximum inscrit dans un el-lipsoïde à trois axes inégaux.* (4 p.)

Weyr (E.). — *Sur l'identité des caustiques avec les courbes podaires* (6 p.)

Hoppe (R.). — *De la courbe tautochrone dans le cas du frottement* (6 p.)

Grelle (Fr.). — *Sur un caractère géométrique propre à faire reconnaître l'espèce de la conique déterminée par cinq tangentes données ou cinq points donnés.*

Enneper (A.). — *Les surfaces cycliques.* (29 p.)

Surfaces engendrées par le mouvement d'un cercle variable.

Most (R.). — *Sur trois intégrations à l'intérieur de la figure*

$$\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r + \cdots = 1.$$

(4 p.)

Baur (C.-W.). — *Résolution d'un système d'équations dont l'une est quadratique et les autres linéaires.* (10 p.)

Hankel (H.). — *Démonstration d'un lemme dans la théorie des intégrales définies* (2 p.)

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(a)\int_a^b \varphi(x)dx + [f(b) - f(a)]\int_\mu^b \varphi(x)dx,$$

$$\mu = \text{moy.}\,(a, b).$$

Krumme (W.). — *Problèmes sur le plan incliné.* (3 p.)

Kurz (A.). — *Sur la démonstration de la propagation de l'état vibratoire.* (3 p.)

Weyr (E.). — *Étude analytique de la corrélation quadratique* (83 p.)

Le mode de correspondance dont il est question dans cet article est celui qui a d'abord été proposé par Magnus (*), et dans lequel à un point d'une figure, correspond en général un point de l'autre, et à une droite une conique.

(*) *Journal de Crelle*, t. VIII, p. 51.

WITTWER (W.-C.). — *Application de la théorie du choc des corps élastiques à quelques phénomènes calorifiques.* (28 p.)

SCHUBERT (H.). — *Propriété géométrique des seize sphères tangentes à quatre sphères données quelconques. Relations métriques entre les rayons des seize sphères.* (11 p.)

WEYR (E.). — *Construction du centre de courbure des courbes podaires.* (5 p.)

GRÜNWALD (A.-K.). — *Sur la théorie du potentiel.* (4 p.)

MATTHIESSEN (L.). — *Grandeur apparente et absolue du Soleil.* (7 p.)

JOCHMANN (E.). — *Sur la représentation conforme du rectangle sur la surface du cercle.*

Les problèmes de la nature de celui que traite M. Jochmann ont été d'abord proposés par Riemann. On peut les énoncer d'une manière générale comme il suit : Faire correspondre les points d'une portion du plan limitée par une courbe A à ceux d'une autre portion donnée limitée par une courbe B, de manière que les parties infiniment petites correspondantes soient semblables. On peut encore, au lieu de deux portions de plan, considérer deux portions de surface limitées par des courbes déterminées. Nous aurons l'occasion de revenir sur ces problèmes à propos des recherches de Riemann.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, publiés par MM. les Secrétaires perpétuels (*). T. LXX; 1870.

N° 7. Séance du 14 février 1870.

M. BERTRAND fait hommage à l'Académie du second Volume de son *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral.*

M. DE SAINT-VENANT. — *Sur une détermination rationnelle, par approximation, de la poussée qu'exercent des terres dépourvues de cohésion, contre un mur ayant une inclinaison quelconque.*

(*) Voir *Bulletin*, p. 29.

M. Morin. — *Rapport sur le Mémoire présenté à l'Académie* 29 *mai* 1869, *par* M. Tresca, *sur le poinçonnage et sur la théorie m canique de la déformation des corps solides.*

M. de Saint-Venant. — *Preuve théorique de l'égalité des de coefficients de résistance au cisaillement et à l'extension ou à la co pression dans le mouvement continu de déformation des solides ducti au delà des limites de leur élasticité.*

M. de Saint-Venant. — *Rapport sur cinq Mémoires de* M. Fé Lucas, *intitulés :* Recherches concernant la Mécanique des atom *présentés les* 20 *juillet,* 5 *octobre,* 16 *et* 23 *novembre, et* 1er *décem* 1868.

M. Jordan. — *Sur une nouvelle combinaison des vingt-sept droi d'une surface du troisième ordre.*

M. Pellet. — *Sur les fonctions irréductibles suivant un module p mier et une fonction modulaire.*

M. Ribaucour. — *Note sur la déformation des surfaces.*

M. Mannheim a montré que lorsqu'un corps invariable de for est assujetti à quatre conditions, ses points décrivent des surfaces, qu'à un instant déterminé, les normales à ces surfaces s'appui toutes sur deux droites. Cela posé, dans le cas où ces deux droites rencontrent toujours, les lieux de leurs points de rencontre d l'espace et dans le corps sont deux surfaces applicables l'une l'autre.

C'est là un des principaux théorèmes énoncés dans la Note M. Ribaucour. On voit que cette proposition est l'analogue de suivante : Quand une figure se déplace dans un plan, le lieu centres instantanés de rotation dans la figure forme une courbe roule sur la courbe lieu des centres instantanés sur le plan fixe.

N° 8. **Séance du 21 février 1870.**

M. de Saint-Venant. — *Rapport sur un Mémoire de* M. Bous nesq, *présenté le* 19 *avril* 1869, *avec additions du* 19 *novembre, et latif à la théorie des ondes liquides périodiques.*

M. de Saint-Venant. — *Rapport sur un complément, présenté* M. Tresca, *le* 7 *février* 1870, *à son Mémoire du* 27 *novembre* 18

relatif à l'écoulement des corps solides malléables poussés hors d'un vase cylindrique par un orifice circulaire.

M. HALPHEN. — *Mémoire sur les courbes gauches algébriques.*

L'auteur donne, dans l'extrait inséré, des théorèmes généraux sur la théorie difficile et importante des courbes gauches algébriques. L'une des conséquences les plus simples peut s'énoncer ainsi :

Les surfaces de degré minimum qui passent par une ligne algébrique quelconque tracée sur une surface du second ordre coupent en outre cette dernière, *seulement* suivant des droites d'un même système.

M. NEWCOMB. — *Aperçu d'une méthode directe et facile pour effectuer le développement de la fonction perturbatrice et de ses coefficients différentiels.*

M. MARTIN (AD.). — *Sur la méthode suivie par* L. Foucault, *pour reconnaître si la surface d'un miroir est rigoureusement parabolique.*

N° 9. Séance du 28 février 1870.

M. LAMBERT (GUSTAVE). — *Détermination expérimentale de la forme de la Terre.*

M. Lambert soumet au jugement de l'Académie différents procédés simples de mesure, qu'il se propose d'employer dans son expédition prochaine au pôle Nord.

M. LUCAS (F.). — *Note relative à l'état physique des corps.*

M. MONTUCCI. — *Sur la méthode de Gauss pour l'abaissement des équations trinômes.*

M. Montucci fait observer qu'à l'époque où il a publié une méthode pour l'abaissement des équations trinômes, il ignorait que Gauss eût traité le même sujet (*). « Cet illustre mathématicien arrive, dit-il, par un artifice algébrique, aux résultats que j'obtiens par une voie rigoureusement géométrique (**) ».

M. MARTIN (AD.). — *Méthode d'autocollimation de* L. Foucault; *son application à l'étude des miroirs paraboliques.*

(*) *Œuvres* de GAUSS, t. III, p. 87.

(**) Voir *Comptes rendus*, t. LXIX, p. 525 et 757.

N° 10. Séance du 7 mars 1870.

M. de Saint-Venant. — *Sur l'établissement des équations des mou vements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà d limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état.*

M. Brioschi. — *Sur la bissection des fonctions hyperelliptiques.*

L'éminent géomètre italien établit un théorème important, relat aux fonctions abéliennes à radicaux carrés. Si le polynôme sous radical est de degré $2p+1$, on n'a pour effectuer la bissection qu résoudre une équation de degré p. « Ce résultat, dit-il, vient con firmer et préciser le caractère exceptionnel des équations de la bi section que M. Jordan a mis en évidence au n° 491 de son excelle *Traité des substitutions et des équations algébriques.* »

M. Bourget. — *Sur le développement algébrique de la fonction pe turbatrice.*

Nous ne parlerons pas encore de cette importante Note, l'aute se proposant de présenter ses recherches développées à l'Académi

M. Lucas (F.). — *Calcul des paramètres physiques et des axes pri cipaux en un point quelconque d'un système atomique.*

MÉLANGES.

NOTICE SUR LA VIE ET LES TRAVAUX DE N.-I. LOBATCHEFSKY.

Les importants travaux auxquels ont donné lieu les découvert de Lobatchefsky dans ces dernières années, les débats auxquels s nom s'est trouvé mêlé ont attaché à la biographie de ce géomèt un intérêt réel, et M. le prince Boncompagni a rendu un vrai se vice à l'histoire scientifique en insérant dans son *Bulletin* (*) u traduction d'un éloge de Lobatchefsky, par M. le professeur Ian chefsky, de l'Université de Kazan.

Ce discours, en nous retraçant la vie du savant dont les travau tendent à prendre une place importante dans la science, nous mont

(*) Notice historique sur la vie et les travaux de N.-I. Lobatchefsky. Discours pr noncé dans la séance solennelle de l'Université impériale de Kazan, le $\frac{5}{17}$ novemb 1868, par E. Ianichefsky. Traduit du russe par A. Potocki. (*Bullettino di Bibliografia e Storia delle Scienze matematiche e fisiche*, t. II; mai 1869.)

aussi, dans le même homme, l'administrateur éminent et infatigable dont le dévouement, secondé par la libéralité habituelle du Gouvernement russe pour tout ce qui touche au progrès scientifique, a fait monter, en peu d'années, l'Université de Kazan au rang si élevé qu'elle occupe maintenant dans le haut enseignement européen. Nous regrettons que les limites imposées à cet article ne nous permettent pas d'insister sur l'histoire, si instructive, de la création de ce grand Établissement, et d'étudier les causes auxquelles il doit sa prospérité. Si nous pouvions montrer, par le détail des faits, comment, pour arriver à de si prodigieux résultats, pour implanter en si peu de temps les hautes études à l'extrême frontière de l'Europe civilisée, il a suffi de laisser se développer librement l'admirable organisation universitaire empruntée à l'Allemagne, en lui accordant généreusement les subventions nécessaires, peut-être fermerions-nous la bouche à ceux qui osent prétendre que notre pays est incapable de pareils résultats, et que, seul entre tous, il doit concentrer sur un seul point toute son activité intellectuelle. Nous nous contenterons, pour le moment, d'extraire du travail de M. Ianichefsky ce qui touche particulièrement à la biographie du géomètre, nous réservant de revenir, dans d'autres articles, sur ses travaux, dont une partie seulement est connue dans l'Europe occidentale, et dont l'importance historique est accrue par les vues nouvelles qu'ils renferment et qui intéressent encore les progrès de la science.

Nicolas-Ivanovitch Lobatchefsky naquit en 1793, dans le district de Makarief, dépendant du Gouvernement de Nijni-Novgorod. Son père appartenait à la classe des petits fonctionnaires, et ses minces émoluments lui suffisaient à grand'peine pour soutenir sa famille, composée de sa femme Praskovia Ivanovna, et de ses trois fils Alexandre, Nicolas et Alexis (*). Il mourut vers l'année 1800, laissant sa famille dans la misère. Sa veuve vint s'établir à Kazan avec ses enfants, qui entrèrent successivement comme boursiers au Gymnase de cette ville. Nicolas y fut inscrit le $\frac{5}{17}$ novembre 1802. Il y fit de bonnes études, et cultiva principalement le latin et les mathématiques.

L'Université de Kazan ayant été fondée en 1805, il y fut admis,

(*) L'aîné, Alexandre, se noya en 1807 dans la Kazanka. Le plus jeune, Alexis, habite actuellement Kazan, comme professeur retraité.

deux ans plus tard, comme élève de l'État. Vers cette époque, grâ aux soins du curateur Roumofsky, le personnel de l'Université fortifia par l'arrivée de plusieurs professeurs allemands, parmi l quels nous remarquons les noms de Bartels, l'ami d'enfance Gauss; de J. Littrow, le futur directeur de l'Observatoire de Vien et du professeur de physique Bronner. Ces trois hommes émine reconnurent bientôt l'aptitude extraordinaire du jeune Lobatchefs ils le prirent en affection, et lui consacrèrent leur attention parti lière. Ce fut par leur intervention qu'il obtint, en 1811, ses gra de candidat et de magister, qu'il avait mérités par ses fortes étud mais que l'Administration universitaire voulait lui refuser pou punir de quelques infractions à la discipline.

Il fit ses débuts dans l'enseignement en 1812, et fut chargé cours d'Arithmétique et de Géométrie pour les aspirants foncti naires, d'abord comme suppléant de son frère Alexis, et bientôt ap comme titulaire. En 1814, on le nomma professeur adjoint, en aj tant à ses fonctions celles de suppléant de Simonof, qui venait d' attaché, comme astronome, à un voyage de circumnavigation. Pro en 1816, au titre de professeur extraordinaire, il continua à s'o per de ces divers enseignements, en faisant en outre un cours plémentaire de Physique.

Depuis l'année 1819 jusqu'à la fin du règne de l'empe Alexandre Ier, l'Université de Kazan eut à traverser une crise sastreuse, et l'enseignement fut entravé et mutilé par l'esprit tra sier et le fanatisme étroit du curateur Magnitsky. Pendant ce tem Lobatchefsky, déjà absorbé par la multiplicité des leçons de div nature dont une mesquine économie surchargeait alors les pro seurs, réduits à un nombre insuffisant, dut encore fournir les inn brables Rapports de toute espèce qu'exigeait une Administra inquisitoriale sur les étudiants, ainsi que sur les Écoles et les G nases du district.

En 1820, trois ans avant sa promotion au titre de professeur o naire, il commença à prendre part à la direction de l'Université succédant à Bartels comme doyen de la Faculté physico-mathé tique, et, sauf une seule année d'interruption, il ne cessa d'occu ce poste qu'au moment où il fut élevé à des fonctions supérieure

Outre son enseignement et la direction du personnel, Lobatche eut à s'occuper de la bibliothèque et des collections de l'Univer

jusque-là dans un désordre incroyable. Longtemps ses efforts ganisation rencontrèrent des obstacles insurmontables, et il : de résultats sérieux qu'après la chute du système de Mag-

ı, en 1827, après l'avénement de l'empereur Nicolas, Mag- tomba en disgrâce, et le gouvernement confia à Moucine- ine les fonctions de curateur de l'Université de Kazan, pour e s'ouvrit dès lors une ère de prospérité. Le nouveau curateur, reconnu dans Lobatchefsky l'homme le plus capable de le ar, usa de son influence pour le faire élire recteur. Quelques après, l'Université était régénérée; le personnel enseignant mplété et mieux choisi; la direction de l'enseignement avait ré la liberté nécessaire au développement de l'esprit scienti- les bâtiments de l'Université étaient reconstruits à neuf; l'Ob- ire était fondé et muni des meilleurs instruments; la biblio- , mise en ordre, s'enrichissait de toutes les publications res et scientifiques de l'Europe; un atelier de construction s instruments de Physique était installé dans l'Université; aenses trésors minéralogiques de la Russie s'étalaient dans les ons, les plus belles peut-être du continent.

itchefsky ne reculait devant aucune fatigue pour l'exécution travaux, dont il avait tant de droits d'être fier. Afin de pou- ieux diriger la construction des édifices universitaires, il ap- architecture, et ses connaissances dans cet art le mirent à de rendre d'importants services, en revisant les plans et en iant les dépenses, qui, chose bien rare, restèrent notablement sous des devis primitifs. Il travaillait de ses propres mains à gement des livres et des collections. Un voyageur qui visita en 1843 nous a raconté qu'il trouva Lobatchefsky livré à ces itions manuelles dans un costume peu solennel, et qu'il par- : avec lui les cabinets et les ateliers, sans se douter pendant : temps que son obligeant cicerone fût le *Conseiller d'État ac-* recteur de l'Université. Ébloui de toutes les merveilles qui nt de passer sous ses yeux, il eut même, en sortant, la velléité oigner pécuniairement sa reconnaissance. Les regards indi- le son interlocuteur lui firent bien vite comprendre son erreur. r, tout était oublié, lorsqu'ils se retrouvèrent à la table hospi- : du Gouverneur.

Le courage de Lobatchefsky et son dévouement pour le personn confié à sa direction se montrèrent avec éclat pendant la terrib invasion du choléra qui vint décimer la ville de Kazan à la fin l'année 1830. Lobatchefsky recueillit plusieurs des professeurs, av leurs familles, et une partie des étudiants, dans les bâtiments l'Université, dont il fit fermer rigoureusement les portes, et q pendant toute la durée de l'épidémie, resta séquestrée du reste de ville, sans autre communication avec le dehors que celles qui étai nécessaires aux approvisionnements. Grâce aux précautions hygi niques qu'il prescrivit et à la salutaire influence qu'il exerça sur moral de ceux qui l'entouraient, la colonie des réfugiés, compos de cinq cent soixante personnes, n'eut à déplorer que seize victim du fléau, chiffre insignifiant en comparaison de l'effrayante mort lité qui régnait dans le reste de la ville.

En 1842, lors du violent incendie qui dévora la moitié de la vi de Kazan, Lobatchefsky eut la douleur de voir ses plus belles co structions, son observatoire, à peine terminé, devenir la proie flammes. Sa courageuse activité ne se démentit pas dans cette constance, et il parvint à sauver ses précieux instruments et la bliothèque. Deux ans après, les bâtiments étaient rétablis et to trace du désastre avait disparu.

Ainsi vécut Lobatchefsky pendant près de vingt ans, au milieu soins multiples du professorat et de l'administration, absorbé t entier par des travaux auxquels on eût eu peine à croire que l'ex tence d'un seul homme pût suffire. Sauf quelques courtes excu sions pour visiter les autres Universités de l'Empire, il ne s'abse guère de Kazan, et l'histoire de sa vie se confond avec celle de chère Université.

C'est à cette même époque qu'il se livra aux recherches mathé tiques qui, depuis, ont illustré son nom, mais qu'il n'eut pas la tisfaction de voir apprécier par la plupart de ses contemporai Cependant le suffrage de Gauss put le dédommager de l'indifféren générale, et lui valut l'honneur d'être élu, en 1842, correspond de la Société Royale de Gœttingue. Il faut ajouter que ses ouvra les plus considérables et les plus clairement développés ont été ré gés en langue russe, et que ceux qu'il a fait paraître en françai en allemand ne contiennent peut-être pas tous les détails nécessai pour des lecteurs non préparés.

Vers le milieu de l'année 1846, pour des raisons qui nous sont inconnues, Lobatchefsky fut mis à la retraite et enlevé, malgré le vœu unanime de ses collègues, à ses doubles fonctions de professeur et de recteur, bien que son âge et sa santé semblassent lui permettre de rendre encore d'utiles services. On le chargea de remplir, comme vice-curateur, l'intérim de la place laissée vacante par le départ du curateur Moucine-Pouchkine, appelé au même poste près de l'Université de Saint-Pétersbourg. Cette disgrâce déguisée lui fut extrêmement pénible. Au regret de quitter sa chaire de mathématiques se joignit celui de voir changer le caractère de ses relations avec ses collaborateurs, et affaiblir l'autorité morale qu'il avait puisée jusque-là dans leur libre choix. Ses rapports, autrefois si bienveillants avec le Conseil de l'Université, devinrent plus difficiles, lorsque ses anciens collègues purent voir en lui un chef imposé par l'Administration. A l'arrivée du nouveau curateur, en 1847, Lobatchefsky abandonna définitivement ses fonctions, et ne reparut plus à l'Université que pour prendre part quelquefois aux examens.

Au chagrin que lui causa son changement de position vint s'ajouter la perte d'un fils aimé, et ce nouveau malheur porta un coup fatal à sa santé physique et morale, déjà ébranlée. Pendant quelques années encore, il se survécut à lui-même, et ses amis virent avec tristesse s'obscurcir cette noble intelligence. Un seul sentiment l'animait encore, son affection pour son Université. Lorsque celle-ci, en 1855, célébra le cinquantième anniversaire de sa fondation, Lobatchefsky recueillit le reste de ses forces pour lui apporter son dernier tribut, sa *Pangéométrie*, résumé de ses belles découvertes et digne couronnement d'une vie si bien remplie. Il acheva de mourir, quelques mois après, le $\frac{12}{24}$ février 1856, à l'âge de soixante-deux ans.

J. Houël.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Besant (W.-H.). — Notes on Roulettes and Glissettes. Cambridge; Deighton, Bell and C°. 4 fr. 75.

Bremiker (C.). — Nautisches Jahrbuch oder vollständige Ephemeriden und Tafeln für d. J. 1872. Gr. in-8. Berlin, G. Reimer. $\frac{1}{2}$ Thlr.

Brewster (Sir David). — The Martyrs of Science; or the Lives of

Galileo, Tycho-Brahe, and Kepler. 7th edit., post-8, 230 p., cl
London, Hotten. 4 sh. 6

Calza (G.). — Saggio di filosofia delle matematiche, con una app dice sulla quantità fisica. In-8, 275 p. Torino, tip. S. Giusep

Darget (L.). — Du cercle, et, sans ambages, la quadrature du cer sa théorie. In-f°, 1 p. Auch, imp. Foix.

Donati (G.-B.). — Parole pronunziate il di 26 settembre 1869, occasione che gli astronomi di varie parti d'Europa, riuniti in renze per conferire intorno alla misura di un grado europeo, vis rono i lavori incominciati per la costruzione di un nuovo osser torio sulla collina di Arcetri (con a fronte la versione france In-8, 8 p. Firenze, Le Monnier.

Doergens (R.). — Theorie und Praxis der geographischen Kart netze, 1 Thlr. — Die perspektivischen Projektionen. Lex-8. Ber Schropp. $\frac{1}{4}$ Tl

Gherardi (S.). — Soluzione e dimostrazione di alcuni problem teoremi sulle serie doppie; 2a ediz. rivista e seguita da un' pendice del Dott. *D. Cipolletti*. In-4, 26 p. Roma, tip. d Scienze mat. e fisiche.

Goldberg (B.-M.). — Rest- und Quotient-Rechnung nach eigenen I schungen zum Vortrage in den höheren Klassen der Lehran ten systematisch dargestellt. Hoch-4. Hamburg, Hoffmann Campe. 2 Tl

Herschel (Sir John-F.-W.). — Outlines of Astronomy. 10th edit. I 778 p., cloth. London, Longmans. 18

Imschenetsky. — Mémoire sur l'intégration des équations aux d vées partielles du premier ordre, traduit du russe par J. Ho In-8°, 198 p. Paris, Gauthier-Villars. 5

Jahrbuch (*Berliner Astronomisches*) für 1872, mit Ephemeriden Planeten 1-108 für 1870. Herausgegeben von W. Foerster u Mitwirkung von Powalky und Becker. Gr. in-8. Berlin, Dümml Verlagsbuchhandlung. 2 T

Lespiault. — Théorie géométrique des tautochrones dans les ca la force est fonction de l'arc à parcourir. In-8, 6 p. Paris, C thiers-Villars. 6

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

PLUECKER (J.). — NEUE GEOMETRIE DES RAUMES, GEGRÜNDET AUF DIE BETRACHTUNG DER GERADEN LINIE ALS RAUMELEMENT. I Abth., 1868. II Abth. (herausg. von F. KLEIN), 1869. — Leipzig, Teubner. Prix : 5 thlr.

Dans les derniers temps de sa vie, Plücker avait repris ses recherches de Géométrie abandonnées depuis près de trente ans. Un Mémoire inséré aux *Transactions philosophiques* pour 1865, et qui a été traduit en français (*), pose les fondements d'une doctrine nouvelle dont le développement promet de conduire à d'importantes découvertes. L'impression d'un Ouvrage qui devait résumer ses travaux relatifs à la « Nouvelle Géométrie de l'espace » était commencée sous les yeux de l'auteur, quand la mort vint le surprendre, comme Archimède, au milieu de ses calculs. L'éditeur a fait paraître la première Partie de l'Ouvrage avec une préface de M. Clebsch ; la seconde Partie, achevée par M. Félix Klein, le collaborateur de Plücker et le confident de ses desseins, vient d'être mise en vente également. Quelques-uns des résultats contenus dans la première Partie avaient été déjà établis par M. Battaglini (**) en 1866 ; de son côté, M. Klein a développé les théories de Plücker, par les méthodes beaucoup plus élégantes de l'Algèbre supérieure, dans une Thèse et dans deux Notes insérées aux *Mathematische Annalen* (***). Nous allons essayer d'indiquer brièvement le point de départ de ces recherches et de donner une idée de leur portée.

L'équation

$$x\xi + y\eta + z\zeta = 1$$

est celle d'un plan (ξ, η, ζ), considéré comme lieu géométrique des points (x, y, z), ou bien celle d'un point (x, y, z), considéré comme pivot des plans (ξ, η, ζ). Un point est donc déterminé par trois coordonnées x, y, z, un plan par trois coordonnées ξ, η, ζ. Une ligne droite serait complétement déterminée par quatre constantes ou coordonnées, mais l'on obtient des formules plus symétriques en intro-

(*) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. XI.

(**) *Atti della R. Acc. di Napoli*, t. III.

(***) *Math. Ann.*, t. II, p. 198 et 371.

duisant six coordonnées liées par une équation homogène, et q
n'entrent dans les équations de la droite que par leurs rapports.

Ces six coordonnées peuvent d'ailleurs être choisies de deux
nières différentes, selon qu'on voudra définir la droite comme *ra*
c'est-à-dire comme lieu géométrique des points (x, y, z), ou
comme *axe*, c'est-à-dire comme intersection des plans (ξ, η, ζ).

Plücker prend pour *coordonnées radiales* de la droite les six qu
tités

$$X = x - x', \quad Y = y - y', \quad Z = z - z',$$
$$L = yz' - zy', \quad M = zx' - xz', \quad N = xy' - yx'.$$

Les trois premières sont les projections de la distance

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

de deux points de la droite; les trois dernières sont les projection
l'aire

$$S = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$$

qui représente le double du triangle formé par les deux points et
l'origine. On a

$$(1) \qquad XL + YM + ZN = 0,$$

et les équations

$$Yz - Zy = L, \quad Zx - Xz = M, \quad Xy - Yx = N$$

sont celles des trois projections d'un rayon. Les rapports

$$\frac{X}{R}, \frac{Y}{R}, \frac{Z}{R}, \frac{L}{S}, \frac{M}{S}, \frac{N}{S},$$

déterminent la direction du rayon et son plan, c'est-à-dire le p
passant par l'origine qui le renferme; le rapport

$$r = \frac{S}{R}$$

donne la distance du rayon à l'origine. Si R représente une force
sera le moment de cette force. Les valeurs absolues des composa
X, Y, Z, L, M, N la déterminent dans l'espace; ce sont les *six co*
données radiales d'une force, et elles représentent cinq constant
cause de la relation (1). Si l'on supprimait cette relation, les six co
données deviendraient indépendantes. Les trois premières (X, Y,
donneraient la direction et l'intensité d'une force, les trois autres

M, N) l'axe et le moment d'un couple; on pourrait donc les appeler les *six coordonnées d'un dyname,* en entendant par ce mot la cause qui produit le mouvement d'un système rigide.

Les *coordonnées axiales* d'une droite sont les six quantités $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, qu'on obtient en écrivant ξ, η, ζ à la place de x, y, z dans les expressions des coordonnées radiales. Elles satisfont à la relation homogène

$$(2)\qquad \mathfrak{X}\mathfrak{L}+\mathfrak{Y}\mathfrak{M}+\mathfrak{Z}\mathfrak{N}=0,$$

et les trois équations

$$\mathfrak{Y}\zeta-\mathfrak{Z}\eta=\mathfrak{L},\quad \mathfrak{Z}\xi-\mathfrak{X}\zeta=\mathfrak{M},\quad \mathfrak{X}\eta-\mathfrak{Y}\xi=\mathfrak{N}$$

sont celles des points d'intersection d'un axe avec les plans coordonnés. En désignant encore par $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ les quantités analogues à R, S, on trouve, pour la même droite,

$$\frac{X}{\mathfrak{L}}=\frac{Y}{\mathfrak{M}}=\frac{Z}{\mathfrak{N}}=\frac{R}{\mathfrak{S}}=\frac{L}{\mathfrak{X}}=\frac{M}{\mathfrak{Y}}=\frac{N}{\mathfrak{Z}}=\frac{S}{\mathfrak{R}}.$$

Les six coordonnées axiales, multipliées par un certain facteur, déterminent une rotation. Si l'on supprime la relation (2), elles représentent les *six coordonnées d'un mouvement,* car elles déterminent alors une rotation autour d'un certain axe et une translation parallèle à un autre axe.

Toutes ces formules deviennent encore plus symétriques par l'introduction des coordonnées homogènes ou tétraédriques du point et du plan. Soit donc

$$x_1\xi_1+x_2\xi_2+x_3\xi_3+x_4\xi_4=0$$

l'équation d'un plan $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$, ou celle d'un point (x_1, x_2, x_3, x_4). Les coordonnés radiales d'une droite seront les six déterminants

$$X_{\alpha\beta}=x_\alpha x'_\beta-x_\beta x'_\alpha,$$

qui satisfont à la relation

$$(3)\qquad X_{12}X_{34}+X_{13}X_{42}+X_{14}X_{23}=0,$$

et la droite sera représentée par quatre équations de la forme

$$x_1X_{23}+x_2X_{31}+x_3X_{12}=0.$$

On obtiendra les coordonnées et les équations axiales en écrivant

partout ξ pour x, et l'on aura généralement

$$X_{\alpha\beta}\mathfrak{X}_{\alpha\beta} = X_{\gamma\delta}\mathfrak{X}_{\gamma\delta},$$

ou bien

$$(4) \qquad X_{\alpha\beta} = k.\mathfrak{X}_{\gamma\delta},$$

en désignant par k une constante et en associant les indices $\alpha\beta$,
comme dans l'équation (3).

Considérons maintenant une équation $f = 0$, dont les variab
soient les six coordonnées radiales $X_{\alpha\beta}$; elle représente ce que Pl
cker appelle un faisceau ou *complexe de dynames*. Si les X satisfo
la condition (3), l'équation $f = 0$ est celle d'un *complexe de forc*
si, de plus, f est une fonction homogène des X, l'équation $f = 0$
présente un *complexe de rayons*. Si nous remplaçons les coordonn
radiales par les coordonnées axiales, nous avons des *complexes*
mouvements, de rotations simples et *d'axes*.

Il est clair d'ailleurs que, dans l'équation homogène $f = 0$,
peut écrire les X à la place des $\mathfrak{X}$, ou *vice versâ*, à cause de la re
tion (4). On prévoit aussi que les coordonnées absolues d'un d
name pourront remplacer celles du mouvement dont il est la cau
puisqu'il y a proportionnalité entre la cause et l'effet; on pou
confondre le dyname et le mouvement. « Ainsi, dit Plücker, dans
ligne droite se résout la réciprocité du point et du plan, dans le d
name la réciprocité des forces et des rotations. Un complexe de droi
peut se mettre en équation de deux manières, un complexe de d
names également. Les propriétés des deux espèces de complexes
frent une dualité analogue. »

On peut encore supposer que l'équation $f = 0$ soit homogène, m
que la condition (3) ne soit pas remplie. « Dans ce cas, dit Plück
on se trouve en présence de lieux géométriques qui sont aux
names ce que les lignes droites sont aux forces et aux rotations. »
s'assure facilement que l'équation $f = 0$ représente alors des co
plexes d'axes principaux.

Le degré d'un complexe est celui de son équation. Les coordonn
$X_{\alpha\beta}$, qui y figurent comme variables, peuvent être considérées com
des fonctions linéaires des coordonnées x_α, x' de deux points.
conséquent, si l'un de ces points est donné, l'équation $f = 0$ rep
sente un faisceau de droites, ou un *cône de degré n*, dont le somme
trouve au point donné. En coordonnées axiales, elle représente

courbe de la classe n, située dans un plan donné. Les lignes droites appartenant à un complexe peuvent donc être groupées de deux manières : par cônes émanant de tous les points de l'espace, et par tangentes enveloppant une courbe dans tous les plans de l'espace.

Les droites communes à deux complexes forment une *congruence ;* celles qui appartiennent à trois complexes forment une surface réglée. Quatre complexes déterminent un nombre fini de droites dans l'espace. Les complexes de droites réalisent donc une Géométrie à quatre dimensions. On s'élève à six dimensions par la considération des dynames.

Plücker n'a élaboré que la théorie des complexes du premier et du second degré. Ceux du premier degré s'appellent *complexes linéaires*.

Toutes les droites d'un complexe linéaire qui passent par un point donné sont dans un plan, et toutes celles qui tombent dans ce plan se coupent en ce point. Chaque point de l'espace a donc son plan coordonné, et réciproquement. La ligne qui joint deux points, et l'intersection de leurs plans coordonnés, forment un couple de *polaires conjuguées*. Lorsqu'un plan tourne autour d'un axe, le point coordonné décrit un rayon qui est la polaire conjuguée de l'axe, et cette relation des deux droites est réciproque. Toute droite qui rencontre deux polaires conjuguées fait partie du complexe.

Un complexe linéaire est déterminé par cinq de ses droites, ou par une droite et deux polaires conjuguées. Les deux droites qui rencontrent quatre droites du complexe sont toujours deux polaires conjuguées.

Les points coordonnés à des plans parallèles forment une ligne droite que Plücker appelle le *diamètre du complexe*. Tous les diamètres du même complexe sont parallèles entre eux. Il y en a toujours un qui est perpendiculaire à ses plans : c'est l'*axe du complexe,* et ses plans s'appellent *sections principales*. Si nous prenons cet axe pour axe des z, l'équation du complexe ne renferme plus qu'une seule constante, le paramètre k; elle devient

$$N + kZ = 0, \quad \text{ou bien} \quad \mathfrak{Z} + k\mathfrak{N} = 0.$$

Un complexe linéaire n'est point altéré par une translation parallèle à son axe, ni par une rotation autour de cet axe. Le rapport de la composante Z d'une force dirigée suivant un rayon du complexe,

au moment N de cette force par rapport à l'axe du complexe, e
constant.

Un complexe linéaire peut être envisagé comme la réunion d
tangentes menées à des hélices qui entourent l'axe du complex
Le complexe est *droit* ou *gauche*, selon que le paramètre est posit
ou négatif. Le plan coordonné à un point est un plan osculateur d
l'hélice qui passe par ce point.

Dans une congruence linéaire, qui est, pour ainsi dire, l'interse
tion de deux complexes linéaires, chaque point de l'espace a sa droi
adjointe qui le traverse (c'est l'intersection de ses deux plans coordo
nés). Chaque plan renferme deux points qui lui sont coordonnés,
la droite qui les joint est la droite adjointe à ce plan. Ces relatio
définissent la congruence linéaire. On peut encore la définir : l'e
semble de toutes les droites qui coupent deux droites données (l
directrices de la congruence). La droite adjointe à un plan est do
celle qui joint les points d'intersection de ce plan et des deux dire
trices.

Une congruence est déterminée par quatre de ses droites. De
polaires conjuguées d'un complexe sont les directrices d'une co
gruence qui appartient à ce complexe. Les deux directrices d'une co
gruence sont deux polaires conjuguées de chacun des comple
dont cette congruence fait partie.

Trois complexes linéaires déterminent une surface du second ord
et de la deuxième classe. Plücker fait voir que toutes les propri
de ces surfaces peuvent être déduites de la discussion des trois éq
tions linéaires qui représentent trois complexes.

Les complexes du second degré donnent lieu à des théorè
analogues.

Chaque plan de l'espace renferme une courbe de la deuxiè
classe, appartenant au complexe donné.

Un plan étant transporté parallèlement à lui-même, sa courbe d
crit une *surface équatoriale;* s'il tourne autour d'un axe, sa cou
décrit une surface *méridienne;* ces surfaces sont du quatrième ord
et de la quatrième classe. Les courbes génératrices s'appellent resp
tivement *parallèles* et *méridiens* de la surface qu'elles engendrent.

Les centres des parallèles d'une surface équatoriale sont situés s
une droite : c'est le *diamètre* de la surface. Les pôles de l'axe d'u
surface méridienne, pris par rapport aux méridiens successifs, fo

ment aussi une droite, la *polaire* de la surface. Chaque point de l'axe d'une surface méridienne est d'ailleurs le sommet d'un cône du complexe qui enveloppe cette surface. Les plans polaires de l'axe, pris par rapport à tous ces cônes, enveloppent la polaire de la surface méridienne. Une surface équatoriale est enveloppée par une infinité de cylindres parallèles au plan dont le mouvement engendre la surface en question.

Le diamètre d'une surface équatoriale est un diamètre du complexe; on l'appelle *axe du complexe*, s'il est perpendiculaire au plan qui engendre la surface. Un complexe du second degré a trois axes rectangulaires, qui sont parallèles aux axes d'une surface de la deuxième classe dont le centre et les dimensions restent indéterminés; Plücker l'appelle la *caractéristique* du complexe. A trois diamètres conjugués de la caractéristique correspondent trois diamètres conjugués du complexe, qui sont parallèles aux premiers, mais qui généralement ne se coupent pas. Les complexes du second degré ont, en général, un centre. Dans certains cas, ils enveloppent une surface du second degré.

Dans un complexe du second degré, à chaque plan correspond un point, qui est le *pôle* de ce plan, et à chaque point un plan, qui est le *plan polaire* de ce point. Cette correspondance est réciproque, si le complexe enveloppe une surface du second degré.

Plücker appelle *point singulier* du complexe un point dont le cône se réduit à deux plans, et *plan singulier* un plan dont la courbe se réduit à deux points. La ligne d'intersection des deux plans et la ligne de jonction des deux points sont des *droites singulières* du complexe. Les points singuliers d'un complexe du second degré forment une surface du quatrième ordre et de la quatrième classe, qu'enveloppent les plans singuliers, et qui possède 16 points doubles et 16 plans doubles.

Nous ne suivrons pas l'auteur dans la discussion des cas particuliers qui peuvent se présenter, ni dans sa classification des surfaces appartenant aux complexes du second degré. Il fait voir qu'il est facile de construire ces surfaces de manière à en avoir l'intuition géométrique. M. Epkens a fait, sous la direction de Plücker, de nombreux modèles de surfaces de ce genre.

Ce qui précède suffira pour donner au lecteur une idée des résultats auxquels conduit la méthode du géomètre allemand. M. Félix Klein, à qui nous devons la publication de la seconde Partie de

l'Ouvrage, achevée par lui à l'aide de ses souvenirs, a déjà consac à la théorie des complexes plusieurs Mémoires, où il traite le sujet un point de vue nouveau. Il suppose que l'équation de condition (3 à laquelle satisfont les coordonnées d'un complexe de droites, a é transformée par une substitution linéaire de telle manière qu'el ne renferme plus que les carrés des nouvelles variables :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0.$$

Les équations $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ... sont alors celles de six comple linéaires, que M. Klein appelle les *complexes fondamentaux*, et do deux quelconques sont « en involution ». L'équation d'un complexe second degré, étant transformée à l'aide des mêmes variables, devi

$$k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + \ldots + k_6 x_6^2 = 0.$$

C'est en discutant ces formes canoniques de l'équation du co plexe et de l'équation de condition que M. Klein arrive à une sé de théorèmes très-intéressants sur les surfaces de Kummer (surfa du quatrième ordre, qui sont ici formées par les points singuli d'un complexe du second degré).

Nous nous arrètons là, pour ne pas dépasser les limites impos à un compte rendu sommaire. Il est fort possible que les nouvel théories que Plücker a léguées à ses successeurs conduisent un j à des applications d'une grande importance. Il en a déjà indi une, en traitant par la méthode des complexes la double réfract d'un faisceau lumineux dans un cristal.

R. Radau.

BALTZER (Dr Richard), Professor am städtischen Gymnasium Dresden, Mitglied der k. sächsischen Gesellschaft der Wiss schaften zu Leipzig. — Die Elemente der Mathematik. Er Band : *Gemeine Arithmetik, Allgemeine Arithmetik, Algebra.* — Dr verbesserte Auflage. In-8°; 1868. Leipzig, Verlag von S. I zel (*).

Le succès de ces Éléments, dans un pays où les traités classiq ne manquent pas plus que chez nous, et où la concurrence n'est

(*) *Éléments de Mathématiques*, par le Dr R. Baltzer, professeur au Gymnase Ville à Dresde, Membre de la Société royale des Sciences de Saxe à Leipzig (actuelle professeur à l'Université de Giessen). Tome Ier : *Arithmétique élémentaire, Arithmé générale, Algèbre.* 3e édit., revue et corrigée. Leipzig, chez S. Hirzel ; 1868. In-8°.

entravée par des programmes uniformes, est une preuve de la haute valeur de cet Ouvrage, dont la première édition a paru en 1860, et que M. Cremona a traduit en 1865 pour l'usage des écoles publiques de l'Italie.

Nous avons déjà rendu compte, dans un autre Recueil (*), des Éléments de Géométrie, qui forment la seconde Partie du cours de M. Baltzer, et dont la seconde édition a été imprimée en 1867. Il nous reste à parler avec détail de la première Partie.

En parcourant la Table des matières de ce mince volume de 289 pages, on est tenté de croire qu'on n'y rencontrera qu'un simple recueil d'énoncés. En lisant l'Ouvrage, on est surpris d'y trouver, sous une forme concise, mais claire et complète, les démonstrations et les développements de tant de théories diverses, dont un autre auteur aurait pu remplir plusieurs gros volumes.

Comme nous l'avons fait remarquer ailleurs, ce livre n'est point destiné aux personnes qui veulent étudier sans maître, et qui ont besoin d'une exposition beaucoup plus détaillée et ne laissant rien à deviner. Mais s'il s'agit d'un précis à mettre entre les mains des jeunes gens qui suivent les leçons d'un professeur, le cadre adopté par M. Baltzer nous semble réunir au plus haut degré toutes les conditions désirables. Nous nous permettrons d'insister d'autant plus sur ce point, que les livres élémentaires qui se publient dans notre pays semblent s'éloigner de plus en plus de cet idéal, les auteurs cherchant à dissimuler la banalité du fond par la surcharge des accessoires; d'où il résulte ce double inconvénient, de ne point s'adapter à la méthode d'enseignement d'un autre professeur, et d'empêcher les élèves de chercher par eux-mêmes, en leur présentant, qu'on nous passe le mot, la besogne toute mâchée (**). Le livre de M. Baltzer, au contraire, ne donnant que le résumé des démonstrations, laisse le professeur libre de les développer à sa guise, et ses sommaires sont

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. II, p. 124-132.

(**) Nous ne saurions trop recommander aux professeurs un Ouvrage peu connu en France et conçu dans le même esprit que le cours de M. Baltzer :

J. H. VAN SWINDEN's *Elemente der Geometrie*, aus dem Holländischen übersetzt und vermehrt, von C. F. A. JACOBI, Professor an der Landésschule Pforta. Iena, Fr. Frommann; 1834. In-8°.

Ce livre est précieux par le grand nombre d'énoncés de problèmes qu'y a joint le traducteur.

cependant assez étendus pour que l'élève y trouve la substance d leçons, avec des exemples bien choisis pour la fixer dans l'esprit.

Un des principaux mérites qui distinguent les Ouvrages de M. Be tzer, c'est l'érudition aussi sûre qu'étendue dont il fait preuve dans l courtes notes placées au bas des pages, et indiquant l'origine d chaque proposition et de chaque dénomination. L'ensemble de c notes forme un précieux résumé de l'histoire des Mathématiqu élémentaires.

Le Volume, comme l'indique le titre, se divise en trois Livre subdivisés eux-mêmes en Paragraphes, et dont nous allons faire co naître brièvement le contenu.

LIVRE I. — *Arithmétique élémentaire* (p. 3-58).

§§ 1, 2, 3. Les quatre opérations fondamentales. — Nous y tro vons entre autres cette indication, de commencer la multiplicati par la gauche du multiplicateur, ce qui est très-commode pour pratique de la multiplication abrégée.

§ 4. Calcul des mesures exprimées en fractions duodécimal Calcul du temps.

§ 5. Proportionnalité des nombres.

§ 6. Règles de trois, d'intérêts, etc.

§ 7. Propriétés élémentaires des nombres entiers : Divisibili nombres premiers, etc.

§§ 8-11. Opérations sur les fractions ordinaires.

§ 12. Règle de trois avec des fractions et des mesures duodé males. — La complication de ces calculs est de nature à faire dési l'établissement universel du système métrique décimal.

§ 13. Partages proportionnels, règles d'alliage, etc. (*Voir* ci-apr Livre III, § 1.)

§§ 14-17. Opérations sur les fractions décimales.

§ 18. Calculs d'approximation; opérations abrégées.

LIVRE II. — *Arithmétique générale* (p. 61-197).

§ 1. Préliminaires : Définitions et notations.

§§ 2-4. Opérations directes (addition, multiplication, élévation aux puissances). — A partir d'ici, l'auteur indique, pour chaque Paragraphe, les exercices correspondants du Recueil de Heis (*).

§ 5. Opérations inverses.

§ 6. Formules.

§ 7. Soustraction. Nombres positifs et négatifs; quantités opposées. — L'auteur laisse au professeur le soin de donner, sur la question délicate des quantités négatives, les développements nécessaires.

§§ 8-9. Addition, soustraction, multiplication des polynômes.

§§ 10-12. Division des polynômes.

§ 13. Propriétés des nombres entiers : Divisibilité, nombres premiers et composés. Combien il y a de nombres premiers à un nombre donné et moindres que lui. Résidus des puissances. Théorèmes de Fermat et d'Euler. Résidus et non-résidus quadratiques. Théorème de Wilson.

§§ 14-15. Carré et racine carrée d'un nombre décimal.

§ 16. Radicaux carrés. Nombres rationnels et irrationnels. Nombres réels, imaginaires, complexes.

§§ 17-18. Puissances et racines. Exposants négatifs et fractionnaires. Racines de l'unité; racines primitives.

§ 19. Logarithmes des divers systèmes.

§§ 20-21. Logarithmes décimaux. Construction et usage des tables. Calculs au moyen des logarithmes. Logarithmes d'addition et de soustraction. — L'auteur aurait pu indiquer la méthode très-simple de Briggs pour calculer les logarithmes décimaux, en déterminant, par de simples multiplications abrégées, le nombre des chiffres dont se compose la puissance 10^n d'un nombre donné. Il n'emploie pas la manière adoptée en France pour écrire les caractéristiques négatives et qui est cependant beaucoup plus commode que celle dont on fait usage en Allemagne. Il calcule tous ses exemples numériques au moyen des Tables de logarithmes à 4 décimales de J.-H.-T. Müller (**).

(*) *Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra.* 23te Aufl. Köln, Du Mont-Schauberg, 1869. Prix : 1 Thlr.

(**) *Vierstellige Logarithmen der natürlichen Zahlen und Winkelfunctionen.* Halle,

§ 22. Progressions géométriques. Intérêts composés. Annuités.

§ 23. Formule du binôme pour un exposant entier et positi
Limite des racines d'un binôme.

§§ 24-25. Permutations, arrangements, combinaisons.

§ 26. Déterminants (*).

§ 27. Produits et puissances des polynômes.

§ 28. Nombres figurés et progressions arithmétiques.

§ 29. Notions sur le calcul des probabilités.

§ 30. Fractions continues.

§§ 31-32. Série exponentielle. Exposants imaginaires. Théorè
de Moivre. Série du binôme. Série logarithmique. Influence
l'ordre des termes sur la valeur d'une série dont la converge
dépend des signes des termes.

LIVRE III. — *Algèbre* (p. 201-289).

§ 1. Proportions. Grandeurs commensurables, incommensu
bles. Moyenne entre des quantités données.

§ 2. Variables, fonctions. Proportionnalité. Continuité. Foncti
algébriques et transcendantes. Fonctions homogènes. Fonctions sy
triques et alternées.

§ 3. Méthode analytique. Calculs, constructions.

§ 4. Équations. Identités. Équations non identiques, leurs racin
Équations transformées équivalentes. Degré d'une équation. Éq
tions algébriques et transcendantes.

§ 5. Systèmes d'équations à plusieurs inconnues. Équations
terminées et indéterminées. Résolution d'un système d'équati
linéaires, déterminées ou indéterminées.

---

xiv-25 p., gr. in-8°. Il serait temps de renoncer en France à la coutume peu rationn
d'employer dans l'enseignement des tables à sept décimales. Ce luxe de chiffres ne
qu'à masquer les méthodes de calcul, et à faire naître l'idée fausse d'une précision
les éléments du calcul ne peuvent jamais fournir. Une table à trois décimales, sur
carte grande comme la main, remplacerait bien utilement les gros in-octavo, qui
perdre tant de temps aux élèves, et les empêchent d'apprendre à calculer.

(*) Les éléments de la théorie des déterminants font partie de tous les Traités
dernes d'Algèbre édités en Allemagne, en Angleterre, en Italie.

§ 6. Équations du second degré. Maximum ou minimum d'une fonction du second degré. Réduction d'une forme quadratique. Systèmes d'équations non linéaires. Exercices sur les systèmes d'équations symétriques qui se ramènent à des équations du second degré.

§ 7. Équations du troisième et du quatrième degré. Équations réciproques. Calcul approché de la plus grande racine réelle de l'équation $x^m - x - a = 0$.

§ 8. Équations transcendantes. Résolution des équations numériques. Méthode de Newton.

§ 9. Résolution des équations indéterminées. Résolution des équations linéaires en nombres entiers. Équation de Pythagore, équation $x^y = y^x$, etc.

§ 10. Théorèmes sur les fonctions algébriques. Diviseurs d'une fonction entière. Diviseurs rationnels. Une équation du $n^{ième}$ degré a n racines. Racines multiples. Règle de Descartes. Théorèmes de Sturm et de Cauchy. Valeurs conjuguées d'une fonction algébrique. Norme d'une fonction irrationnelle. Résultante de deux fonctions entières.

J. Hoüel.

BRIOT (Ch.), professeur suppléant à la Faculté des Sciences. — Théorie mécanique de la chaleur. — In-8, avec figures dans le texte, XII-352 pages; 1869. Paris, Gauthier-Villars. Prix : 7 fr. 50 c.

« La Théorie mécanique de la Chaleur date seulement d'un petit nombre d'années, mais elle s'est développée avec une telle rapidité, qu'elle constitue aujourd'hui un vaste corps de doctrines appuyé sur de nombreuses recherches expérimentales. M. Briot en donne, dans son livre, une exposition théorique; il s'est attaché à mettre en relief les principes et les hypothèses fondamentales, ainsi que les conséquences les plus importantes, sans insister sur les points de détail, sur la discussion des expériences ni sur les questions encore controversées.

» Dans un premier Chapitre, l'auteur développe les principaux théorèmes de mécanique dont on fera particulièrement usage, les propriétés générales des systèmes, la définition de l'énergie et les différentes formes sous lesquelles elle se présente dans les phéno-

mènes. L'Ouvrage est ensuite divisé en deux Parties, dont l'un comprend la *Chaleur* proprement dite et l'autre l'*Électricité*.

» L'étude de la Chaleur repose sur deux principes, dont le premier appelé *Principe de l'équivalence de la Chaleur et du Travail mécanique* est la conséquence directe de l'assimilation de la chaleur à un mouvement moléculaire. Le second principe, établi d'abord par Carnot dans l'hypothèse de la matérialité du calorique, conserve toute sa importance dans la nouvelle théorie; on n'en peut pas donner une démonstration rigoureuse, parce qu'il renferme un élément, la *température,* dont on ne connait pas les conditions mécaniques, mais on peut le considérer comme une définition de la température.

» Ces deux principes, joints aux données de l'expérience, permettent d'établir les propriétés générales des gaz et des vapeurs, le jeu des machines à feu, l'écoulement des fluides, etc.

» Jusque-là on a laissé complétement indéterminée la constitution moléculaire des corps; une première tentative dans cette voie nouvelle a été faite par M. Clausius pour les gaz; l'examen de cette théorie des gaz termine la première Partie de l'Ouvrage.

» L'électricité statique repose sur la notion des fluides électriques dont les molécules obéissent à la loi de Coulomb; tous les phénomènes deviennent des conséquences de cette loi élémentaire, et la *théorie du potentiel* donne à cette partie de la science un remarquable caractère de précision et d'élégance.

» Pour la théorie des courants électriques, il faut une nouvelle hypothèse, celle de la force électromotrice, que la plupart des physiciens attribuent aujourd'hui au simple contact de deux corps, comme l'avait énoncé Volta.

» Dans la théorie de l'Électrodynamique, on admet qu'il existe entre deux éléments de courant une force dirigée suivant la droite qui joint leurs centres, et l'expérience indique qu'elle varie en raison inverse du carré de la distance. Cette loi d'Ampère n'est pas liée à celle de Coulomb, et ne suffit pas pour expliquer les phénomènes d'induction. Il y a là une lacune que M. Weber a essayé de combler, en admettant que l'action de deux molécules électriques dépend non-seulement de leur distance, mais encore de leurs vitesses. Cette formule de Weber a l'inconvénient d'entrainer l'hypothèse de deux fluides électriques; mais elle a l'avantage de renfermer les lois de Coulomb et d'Ampère, et de rendre compte des phénomènes d'induction. »

Les lignes précédentes, extraites du *Bulletin de l'Association scientifique*, expliquent, mieux que nous ne saurions le faire, la nature des questions traitées dans le livre de M. Briot. Cet important sujet des lois de la transformation des forces physiques est maintenant, s'il est permis d'employer ici une expression parlementaire, à l'ordre du jour. Verdet, M. Briot l'ont successivement exposé à la Faculté des Sciences; M. Bertrand l'a pris cette année pour texte de ses leçons au Collége de France. M. Briot aura donc contribué, à la fois par son enseignement si apprécié et par son livre, à la diffusion de ces belles et récentes idées qui paraissent destinées à renouveler la Physique tout entière. Il serait superflu, d'ailleurs, de louer la forme que l'auteur a su donner à son exposition. Ceux qui nous lisent connaissent les Ouvrages élémentaires de M. Briot qui rendent tant de services aux élèves de nos Lycées ou de nos Facultés, la *Théorie des fonctions doublement périodiques* publiée en collaboration avec M. Bouquet, et l'*Essai sur la théorie mathématique de la lumière* dont l'intérêt et le succès sont attestés par la traduction récente qui vient d'en être faite en Allemagne.

G. D.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN, gegründet von H. C. SCHUMACHER, herausgegeben von Professor Dr C.-A.-F. PETERS, Director der Sternwarte in Altona (*).

T. LXXIII, nos 1729-1752, 1869.

SCHÖNFELD. — *Sur les changements d'éclat des étoiles variables.* (32 col.; all.)

SPÖRER. — *Observations des taches du Soleil.* (8 col.; all.)

WEINGARTEN (Jul.). — *Sur un problème de géodésie* (12 col.; all.)

(*) *Nouvelles Astronomiques*, fondées par H. C. SCHUMACHER, publiées par C.-A.-F. Peters, directeur de l'Observatoire d'Altona. Altona, imprimerie et lithographie de Hammerich et Lesser.

Cette publication a été fondée en 1823, par H.-Chr. Schumacher, et paraît en allemand, en anglais et en français, par feuilles in-4° à deux colonnes; vingt-cinq feuilles forment un volume.

Secchi (A.). — *Sur les spectres d'étoiles.*(8 col.; fr.)

Falb (R.). — *La comète de Halley et ses météorites.* (4 col.; all.)

Lüroth (J.). — *Sur la détermination de l'erreur probable.* (4 col.; all

Hoek (M.). — *Sur la différence entre les constantes d'aberration Delambre et de Struve.* (7 col.; fr.)

Discussion de la question : Si un rayon de lumière est entraîné p le mouvement du milieu dans lequel il se propage.

Liais (E.). — *Observation du passage de Mercure sur le Soleil, 5 novembre 1868, faite à Atalaïa (Brésil).* (5 col.; fr.)

Kayser (E.). — *Étude de la Lune au point de vue de la forme ell soïdale.* (16 col.; all.)

L'auteur trouve 0,0329 pour la valeur de l'excentricité.

Schmidt (J.). — *Détermination des changements périodiques de Comète II, 1861.* (18 col.; all.)

Schur (W.). — *Sur la détermination de l'orbite de l'étoile double d'Ophiuchus.* (3 p.; all.)

Lehmann (W.). — *Éléments des orbites des huit planètes princip pour l'époque fondamentale 1800, janvier 1, avec leurs variations sé laires du premier et du second ordre.* (Suite et fin d'articles insé dans les volumes précédents; all.)

Radau (R.) — *Considérations sur le théorème des aires.* (8 col.; a

Tietjen (F.). — *Sur l'incertitude d'une détermination d'orbite trois observations, lorsque celles-ci sont situées à peu près géocentriq ment sur un même grand cercle.* (10 col.; all.)

T. LXXIV, nos 1753-1776, 1869.

Oudemans (J.-A.-C.). — *Observations de l'éclipse totale de S du 18 août 1868, dans l'île du Petit Montawalu, baie de Tomini (Est de Célèbes).* (2 art., 24 col., 1 pl.; all.)

Peters (C.-H.-F.). — *Sur certains corps passant devant le Soleil.* (

Il s'agit de corpuscules observés à Naples, considérés d'al comme des astéroïdes, et reconnus ensuite pour n'être que oiseaux.

SCHMIDT (I.-F.-J.). — *Points de radiation et densité horaire des météores.* (16 col.; all.)

TIETJEN (F.). — *Observations spectroscopiques du Soleil.* (6 col.; all.)

WEILER (A.). — *Sur l'élimination du nœud dans le problème des trois corps.* (16 col.; all.)

SCHJELLERUP. — *Une uranométrie du* x^e *siècle.* (8 col.; all.)

CHALLIS. — *Sur la théorie de la constante de l'aberration.* (angl.)

SCHUBERT (E.). — *Perturbations générales des coordonnées rectangulaires de Parthénope par Jupiter et Saturne, en unités du septième ordre décimal, et détermination de l'orbite par leur moyen.* (14 col.; angl.)

RADAU (R.). — *Nouvelles remarques sur le problème des trois corps.* (8 col.; all.)

WITTSTEIN. — *Sur la déviation de la verticale à de grandes hauteurs.* (4 col.; all.)

JORDAN (W.). — *Sur la détermination de l'exactitude des observations répétées d'une seule inconnue.* (18 col.; all.)

VON ANDRÆ. — *Lettre au sujet du Mémoire précédent.* (dan.)

POWALKY. — *Les phénomènes dans les contacts intérieurs du passage de Vénus en 1769.* (6 col.; all.)

ZÖLLNER (F.). — *Observation des protubérances.* (4 col., 1 pl.; all.)

BREEN (H.). — *Sur les corrections des éléments de Jupiter et de Saturne donnés par Bouvard (Paris, 1821).*

ZÖLLNER (J.-C.-F.). — *Nouveau spectroscope et contributions à l'analyse spectrale des étoiles.* (12 col.; all.)

SCHÖNFELD. — *Tables des variations d'éclat de* δ *de la Balance.* (16 col.; all.)

ERMAN (A.). — *Sur quelques déterminations magnétiques.*

1. Éléments du magnétisme terrestre et ses variations séculaires pour Berlin. (22 col.; all.)

T. LXXV, n°s 1777-1796; 1869-70.

SCHÖNFELD. — *Résultats d'études sur la variation de β de la Lyr de δ de Céphée.* (24 col.; all.)

CELORIA (G.). — *Détermination de l'orbite de Clytie.* (2 col.; it

ARGELANDER. — *Sur les étoiles observées par Piazzi, mais non scrites dans son nouveau Catalogue.* (29 col.; all.)

PETERS (C.-F.-W.). — *Quelques remarques sur le prochain pass de Vénus, en 1874.* (6 col.; all.)

KLINKERFUES. — *Lettre au Rédacteur.* (6 col.; all.)
Sur la détermination des orbites par des observations géocen ques.

BOGUSLAW VON PRONDZYNSKI. — *Sur le nombre des équations e les angles et les sinus dans la comparaison des réseaux de trian* (4 col.; all.)

WEINGARTEN (J.). — *Sur la réduction des angles d'un triangle s roïdique à ceux d'un triangle plan ou sphérique.* (6 col.; all.)

OPPOLZER (Th.). — *Sur la comète vue par Pons en février* 18 (all.)

WEILER (A.). — *Sur l'élimination du nœud dans le problème trois corps.* (15 col.; all.)

SPÖRER. — *Observations des taches du Soleil.* (2 art., 21 col.;

VELTMANN (W.) — *Hypothèse de Fresnel pour l'explication des nomènes d'aberration.* (15 col.; all.)

LEPPIG (H.). — *Observations des taches du Soleil, faites à l'Ol vatoire de Leipzig.* (8 col.; all.)

MÖLLER (Axel). — *Perturbations générales de Pandore.* (7 col.;
Les calculs ont été faits par la méthode de Hansen.

ERMAN (A.). — *Sur quelques déterminations magnétiques.*
2. Deux déterminations magnétiques dans l'Inde, par K. Ko et leur emploi théorique. (17 col.; all.)

JORDAN (W.). — *Sur l'exactitude des triangulations de l'Allem du Sud.* (18 col.; all.)

PASCHEN. — *Sur l'application de la photographie à l'observation des passages de Vénus sur le Soleil.* (14 col.; all.)

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES ou Recueil mensuel de Mémoires sur les diverses parties des Mathématiques, publié par JOSEPH LIOUVILLE, membre de l'Académie des Sciences et du Bureau des Longitudes, professeur au Collége de France. 2e série, T. XIV; 1869 (*).

LIOUVILLE (J.). — *Extrait d'une lettre adressée à M. Besge.* (6 p.)

LIOUVILLE (J.). — *Sur les nombres entiers de la forme* $12k+5$. (2 p.)

GOURNERIE (J. DE LA). — *Mémoire sur les lignes spiriques.* (54 p.)

« Les lignes spiriques ou sections planes du tore, dit M. de la Gournerie, ont anciennement occupé les géomètres, comme on le voit dans les savantes Notices historiques que MM. Quételet et Chasles ont données sur ces courbes; mais, jusque dans ces dernières années, on s'était borné à étudier leurs diverses formes. C'est principalement à cet ordre de recherches que se rapporte le Mémoire de M. Pagani, couronné par l'Académie de Bruxelles en 1824.

» Depuis cette époque, MM. Yvon Villarceau, J.-A. Serret, Garlin, Cornu, Mannheim et Darboux ont trouvé des théorèmes importants sur les spiriques. Enfin, leur théorie a été enrichie des résultats considérables obtenus par MM. Salmon, Moutard, Darboux, Laguerre et Crofton sur les courbes du quatrième ordre qui ont deux points doubles à l'infini sur un cercle, car les spiriques sont une variété de ces lignes.

» Je me propose de faire connaître plusieurs propriétés nouvelles des spiriques, et de présenter une classification de ces courbes. »

Le Mémoire commence par l'étude d'une involution spéciale du

(*) Ce Recueil paraît tous les mois depuis 1836 par cahiers in-4° de 40 pages. La première série se compose de 20 volumes et se termine en 1856; la deuxième série comprend 14 volumes jusqu'au mois de janvier 1870. Prix par an : 30 fr. Nous saisissons cette occasion pour féliciter M. Gauthier-Villars des soins si éclairés qu'il apporte à l'impression de ce Journal, et qui en font une des plus belles publications périodiques que nous connaissions. G. D.

quatrième ordre, étude d'où l'auteur déduit une nouvelle méthode d résolution de l'équation du quatrième degré.

La deuxième Partie comprend quelques théorèmes très-simples relatifs aux courbes nommées *anallagmatiques* par M. Moutard, qui ne changent pas de forme quand on opère une transformati par rayons vecteurs réciproques avec un pôle convenablement choi

La troisième Partie comprend l'étude spéciale des spiriques et d tores droits ou obliques qui passent par ces courbes.

MATHIEU (E.). — *Mémoire sur le mouvement de la température da le corps renfermé entre deux cylindres circulaires excentriques et da des cylindres lemniscatiques.* (16 p.)

GOURNERIE (J. DE LA). — *Mémoire sur les lignes spiriques* (suite (36 p.)

Spiriques homofocales. Propriétés métriques relatives aux foyer Classification des spiriques. Étude des différentes classes.

JORDAN (C.). — *Théorèmes sur les équations algébriques.* (8 p.)

Nous rendrons compte de ce travail en même temps que du *Tra des substitutions et des équations algébriques.*

JORDAN (C.). — *Sur l'équation aux vingt-sept droites des surfa du troisième degré.* (20 p.)

RADAU (R.). — *Sur une propriété des systèmes qui ont un plan in riable.* (57 p.)

L'auteur reprend d'abord l'idée de Jacobi, qui consiste à élimin deux variables à l'aide d'une seule intégrale des aires. Le plan d aires étant pris pour celui des x, y, on peut introduire des a mobiles déterminés par une équation $f(x, y) = 0$ (*), qui don encore $\frac{df}{dt} = 0$. Soit Ω la longitude de l'axe des x, les vitesses absol seront $x' - y\Omega'$, $y' + x\Omega'$, z'. En les substituant dans H = T — si la fonction des forces U ne dépend que des positions relatives, renfermera Ω', mais non Ω. Si dès lors on désigne par p, q, r, K dérivées de T par rapport à x', y', z', Ω', et qu'on exprime H en y, z, p, q, r, K, on aura pour n points $6n + 2$ équations différe

(*) Pour abréger, nous écrirons x, y au lieu de x_1, $x_2, \ldots, x_n$, y_1, $y_2, \ldots, y_n$.

tielles, dont deux seront :

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial H}{\partial K}, \quad \frac{dK}{dt} = 0;$$

l'une donne l'intégrale des aires, K = const., l'autre se réduit à une quadrature, il ne reste donc que $6n$ équations différentielles, d'où deux variables s'éliminent par les équations $f = 0$, $f' = 0$. De même, trois intégrales des aires permettent d'éliminer *quatre* variables. On déterminera trois axes mobiles par trois équations $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, et désignant par x^0, y^0, z^0 les trois rotations du système autour de ces axes, on prendra pour les vitesses les expressions $x' + y^0 z - z^0 y, \ldots$. Les intégrales des aires pourront s'écrire :

$$\frac{\partial T}{\partial x^0} = \sqrt{K^2 - \pi^2} \sin\varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial y_0} = \sqrt{K^2 - \pi^2} \cos\varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial z^0} = \pi,$$

K étant une constante, $\frac{\pi}{K}$ le cosinus de l'inclinaison du plan des x, y sur le plan invariable, et φ la distance de l'axe des x au nœud. La fonction H étant exprimée en x, y, z, φ, p, q, r, π, les équations du mouvement, au nombre de $6n + 2$, seront :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \ldots, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \pi}, \quad \frac{d\pi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi};$$

mais les six équations $f_1 = 0, f'_1 = 0, \ldots$ les réduisent à $6n - 4$; on a donc éliminé *quatre* variables. En outre, on trouvera la longitude du nœud Ω par la quadrature $\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial H}{\partial K}$.

En ajoutant aux équations des axes les six intégrales du centre de gravité, $\Sigma mx = 0$, $\Sigma mx' = 0, \ldots$, on réduit le nombre des variables à $6n - 10$, et à $6n - 12$ par l'intégrale des forces vives et par l'élimination directe du temps; le problème des trois corps revient ainsi à 6 équations du premier ordre. L'élimination peut se faire en prenant pour T l'expression

$$T + \alpha_1 f'_1 + \ldots + \beta_1 \Sigma mx' + \ldots$$

et en supposant les multiplicateurs α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 déterminés par la condition que six des dérivées p, q, r s'annulent identiquement. M. Radau développe le calcul pour le cas où les axes mobiles sont les axes principaux d'inertie, et pour quelques autres cas en se

bornant à trois corps. Si, au lieu de rapporter le système à son cent de gravité, on le rapporte à l'un des points que l'auteur appelle *poin canoniques*, un corps du système se trouve *eo ipso* éliminé, sans qu la forme des intégrales soit changée. C'est un cas particulier de l transformation bien connue que Jacobi a proposée pour le problèm des trois corps. Dans le cas de trois corps, on exclut ainsi le « cor principal », les orbites des deux « planètes » se coupent dans le pl invariable, et en désignant par r, r_1 leurs rayons vecteurs, par u, leurs distances au nœud, par y, y_1, f, f_1 leurs vitesses radiales aréolaires, on aura

$$2T = \frac{1}{m}\left(y^2 + \frac{f^2}{r^2}\right) + \frac{1}{m_1}\left(y_1^2 + \frac{f_1^2}{r_1^2}\right),$$

la fonction U renfermera r, r_1, u, u_1 et l'inclinaison relative λ d orbites, qui s'exprime en f, f_1 par l'équation

$$f^2 + f_1^2 + 2ff_1\cos\lambda = K^2.$$

Les équations du mouvement deviennent

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r}, \quad \frac{du}{dt} = \frac{\partial H}{\partial f}, \quad \frac{df}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial u},$$

puis quatre analogues où les variables ont l'indice 1. Après avoir i tégré par deux ellipses, on aurait pour chaque corps quatre équ tions donnant les variations des constantes canoniques.

L'auteur montre encore que la réduction des variables à $6n$ — peut s'obtenir directement par la considération des orbites insta tanées, et qu'on arrive alors à la classification des intégrales du pr blème des trois corps donnée par M. Bertrand. Il termine en fais voir que la même réduction résulte de l'emploi des formules relati à des axes mobiles :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \xi + yz^0 - zy^0, \ldots \\ \frac{d\xi}{dt} &= X + \eta z^0 - \zeta y^0, \ldots \end{aligned}\right.$$

où x, y, z sont les coordonnées (absolues ou relatives), ξ, η, ζ les tesses, X, Y, Z les forces données, enfin x^0, y^0, z^0 les trois rotati

du système autour des axes mobiles. Le nombre de ces équations différentielles est $6n-6$, si l'on emploie les coordonnées relatives. Pour éliminer les rotations, on a les trois équations $f'_1=0, f'_2=0, f'_3=0$, qui dérivent de celles des axes mobiles; ces dernières et l'élimination de dt réduisent les variables à $6n-10$. On arrive à $6n-12$ par les intégrales $H=$ const., $K^2=$ const. Mais on peut aussi arriver à $6n-11$, *sans employer une seule intégrale,* si les forces sont des fonctions homogènes des coordonnées de la dimension ε; il suffit, pour cela, de diviser les coordonnées par une distance ρ du système, les vitesses par $\rho^{\frac{1+\varepsilon}{2}}$, et dt par $\rho^{\frac{1-\varepsilon}{2}}$; la variable ρ disparaît alors, et l'on gagne une relation entre les nouvelles variables $\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}, \frac{z}{\rho}, \ldots$.

Didon (F.). — *Méthode de Cauchy pour l'inversion de l'intégrale elliptique.* (11 p.)

Cette méthode se trouve développée dans une série de Notes insérées par Cauchy en 1843, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. XVII. Ces Notes sont consacrées à l'étude de produits que Cauchy appelle *factorielles réciproques*, et qui ne sont autre chose que les fonctions Θ de Jacobi. M. Didon expose, avec les notations de Jacobi, les méthodes de Cauchy; il en déduit en outre, ce que n'avait pas fait Cauchy, le théorème relatif à l'addition des arguments.

Mathieu (E.). — *Sur le mouvement vibratoire des plaques.* (19 p.)

Poisson (*) et Cauchy (**) avaient déjà étudié le mouvement vibratoire des plaques. Mais leur solution a été critiquée par M. Kirchhoff, qui a montré que les conditions aux limites imposées par Poisson et Cauchy sont incompatibles. M. Mathieu adresse à son tour des objections à la méthode de M. Kirchhoff (***), et traite de nouveau la théorie du mouvement vibratoire.

Liouville (J.). — *Nouveau théorème concernant la fonction numérique* F(k). (3 p.)

On sait que F(k) désigne, dans les études de M. Liouville, le

(*) *Mémoires de l'Académie des Sciences,* t. VIII.

(**) *Exercices de Mathématiques*; 1828.

(***) Kirchhoff, *Journal de Crelle,* t. XL.

nombre des formes quadratiques binaires, primitives ou non, de d terminant $-k$, dont un au moins des coefficients extrêmes impair.

Cela posé, considérons toutes les valeurs de t telles que

$$10m - 25t^2 > 0$$

on aura

$$F(10m) + 2\Sigma F(10m - 25t^2) = 2\zeta_1(m).$$

$\zeta_1(m)$ désigne la somme des diviseurs de m.

Liouville (J.). — *Remarque au sujet de la fonction $\zeta_1(n)$ qui prime la somme des diviseurs de m.* (2 p.)

Boussinesq (J.). — *Étude sur les surfaces isothermes et sur les rants de chaleur dans les milieux homogènes chauffés en un de points.* (34 p.)

Liouville (J.). — *Extrait d'une lettre adressée à M. B* (4 p.)

M. Liouville déduit de l'intégrale définie

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\log 2,$$

donnée par M. Bertrand, l'intégrale suivante

$$\int_0^1 \frac{\text{arc tang}\, x}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{8}\log 2.$$

La lettre se termine par des théorèmes relatifs aux formes q dratiques.

Liouville (J.). — *Théorème concernant la fonction numér* $\rho_2(n)$. (3 p.)

Si l'on a $n = d\delta$, voici la définition de la fonction $\rho_2(n)$:

$$\rho_2(n) = \Sigma(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2$$

Weiler (A.). — *Note sur le problème des trois corps.* (16 p.)

Saint-Venant (de). — *Rapport à l'Académie des Sciences sur Communication de M. Vallès, faite le 21 décembre 1868 sous ce ti* « Expériences faites à l'écluse de l'Aubois pour déterminer l' utile de l'appareil à l'aide duquel M. *de Caligny* diminue dans

proportion considérable la consommation d'eau dans les canaux de navigation ». (11 p.)

CALIGNY (A. DE). — *Note sur les moyens de rendre automatique le système d'écluses de navigation décrit, tome XI, 2e série, page 145.* (7 p.)

CALIGNY (A. DE). — *Note sur un appareil à faire des épuisements au moyen des vagues de la mer.* (6 p.)

LIOUVILLE (J.). — *Sur la forme ternaire $x^2 + 2y^2 + 3z^2$.* (2 p.)

Soit m un entier de la forme $6m \pm 1$, le nombre des solutions de l'équation

$$m = x^2 + 2y^2 + 3z^2$$

est donné par la formule

$$N = F(6m).$$

BOILEAU (P.). — *Mémoire sur les bases de la théorie du régime uniforme des courants liquides.* (16 p.)

MATHIEU (E.). — *Mémoire sur l'équation aux différences partielles du quatrième ordre $\Delta\Delta u = 0$ et sur l'équilibre d'élasticité d'un corps solide.* (45 p.)

On sait que les géomètres ont fondé sur l'étude de l'équation

$$\Delta u = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0,$$

une des plus admirables et des plus fécondes théories des mathématiques modernes. L'équation plus compliquée $\Delta\Delta u = 0$ n'avait peut-être pas encore été considérée d'une manière générale, et, cependant, elle se rencontre dans plusieurs théories importantes de la Physique mathématique. M. Mathieu l'étudie en employant une formule analogue à la célèbre équation de Green, et il arrive au théorème suivant :

« Il existe une fonction, et une seule, qui satisfait à l'équation

$$\Delta\Delta u = 0$$

dans l'intérieur d'une surface σ, qui y varie d'une manière continue avec ses dérivées des trois premiers ordres, et dont la valeur et celle de son Δ sont données à la surface. »

Le Mémoire se termine par différentes applications.

Caligny (A. de). — *Note sur des appareils hydrauliques fonctionnant au moyen de l'aspiration résultant du mouvement acquis d'une colonne liquide : addition à un Mémoire publié dans le tome XI de ce Journal en* 1866, *p.* 283. (3 p.)

Gournerie (de la). — *Note sur les singularités élevées des courbes planes.* (10 p.)

« Dans un Mémoire inséré au VIIe volume du *Quarterly Journal*, M. Cayley a établi que toute singularité d'une courbe plane est *équivalente* à des nombres déterminés de points doubles, de rebroussements, de tangentes doubles et d'inflexions, de telle sorte que lorsque ces quatre nombres sont connus pour toutes les singularités d'une courbe, on peut immédiatement appliquer à cette courbe les trois équations de Plücker, et aussi savoir à quel genre elle appartient d'après sa déficience (*deficiency*), c'est-à-dire d'après la différence qui existe entre les deux nombres de points doubles que son ordre comporte et qu'elle possède réellement. M. Cayley a, de plus, donné des formules pour calculer les quatre nombres qui représentent une singularité, lorsqu'on connaît, pour les différentes branches qui la constituent, des équations distinctes résolues par rapport à l'une des coordonnées. Je me propose de montrer comment on peut déduire ces équations de l'équation générale de la courbe.

» Je donnerai ensuite quelques résultats sur les rayons de courbure à un point multiple, et sur les contacts que les différentes branches peuvent avoir les unes avec les autres.

» Cette Note est composée de deux Parties ; la seconde, entièrement consacrée à des applications, a été, faute de place, rejetée au numéro de janvier du volume suivant. »

Caligny (A de). — *Note sur un appareil propre à élever l'eau au moyen des vagues de la mer ou des grands lacs.* (2 p.)

BULLETTINO di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche, pubblicato da B. Boncompagni. — Roma, tipografia delle Scienze matematiche et fisiche ; Via Lata, n° 211 (*).

(*) Fondé en 1868, paraissant chaque mois par fascicules de 6 à 7 feuilles in-4° ; en italien et en français. Prix : 35 centimes la feuille.

T. II, janvier-septembre; 1869.

Boncompagni (B.). — *La vie et les travaux du baron Cauchy, membre de l'Académie des Sciences; par C.-A. Valson, professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble.*

Analyse détaillée de l'Ouvrage de M. Valson, suivie d'une Indication des écrits d'Augustin Cauchy, contenus dans huit Recueils scientifiques; par E. Narducci. (102 p.; ital.)

Narducci (E.) — *Sur la vie et les écrits de François Woepcke.* (34 p.; ital.)

Boncompagni (B.). — *Sur l'Ouvrage d'Albirouni sur l'Inde.* (54 p., ital.)

Lanichefsky (E.). — *Notice historique sur la vie et les travaux de Nicolas Ivanovitch Lobatchefsky. Discours prononcé dans la séance solennelle de l'Université de Kazan, le $\frac{5}{17}$ novembre* 1848. (Traduit du russe, par A. Potocki.) (40 p.; fr.)

Roy (A. le). — *Notice sur la vie et les travaux de J.-B. Brasseur.* (10 p.; fr.)

Jacoli (F.). — *Anecdote inédite relative à Bonaventure Cavalieri.* (14 p.; ital.)

Wolf (R.). — *Matériaux divers pour l'histoire des Mathématiques.* (30 p., 1 pl.; fr.)

Sur l'invention du niveau à bulle d'air. Mort de G.-G. Strauch. Correspondance littéraire de Bernoulli. Nicolas Fatio de Duillier. Marc-Michel Bousquet. Cosimo Bartoli.

Sédillot (L.-Am.). — *Les professeurs de Mathématiques et de Physique générale au Collége de France.* 1

ABHANDLUNGEN der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. 6te Reihe, Bd. I; 1867. — Prag. In Commission der J. G. Calve'schen k. k. Universitäts-Buchhandlung (*).

(*) *Mémoires de la Société royale des Sciences de Bohême.* Prague, librairie universitaire de Calve. Paraît par volumes in-4° tous les deux ans, en allemand et en bohème.

SCHMIDT (G.). — *Sur les constantes physiques de la vapeur d'eau.* (50 p.; all.)

Ces constantes sont la densité relative, les deux capacités calorifiques de la vapeur fortement surchauffée et les constantes de la formule de M. Regnault pour la chaleur totale λ, qu'il faut communiquer à l'unité de poids de l'eau à partir de zéro pour l'amener à la température t, et la réduire en vapeur sous la pression de p kilogrammes par mètre carré. L'auteur examine, au point de vue théorique, les résultats obtenus par Zeuner et par Hirn.

ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten. — Herausgegeben von Johann August GRUNERT, Professor zu Greifswald (*). T. L; 1869.

NAWRATH. — *Sur la construction d'un polygone simple, à la fois inscrit et circonscrit à un polygone de même espèce.* (10 p.; all.)

BRETSCHNEIDER (C.-A.). — *Le théorème de Matthew Stewart.* (9 p.; all.)

Soit D un point de la base BC d'un Δ ABC, AD $= t$, BD $= a'$, CD $= a''$; a, b, c les trois côtés du Δ. On a $at^2 = b^2a' + c^2a'' - aa'a''$. Ce théorème de Géométrie élémentaire est très-utile et n'est pas encore assez connu.

KUDELKA (Jos.). — *Les lois de la réfraction de la lumière.* (3 art., 111 p.; all.)

BJÖRLING Jr. (C.-F.-E.) — *Sur le mouvement rectiligne d'une molécule soumise à une force attractive ou répulsive, qui est une fonction algébrique, rationnelle et entière de la distance à un centre fixe.* (13 p.; fr.)

GRUNERT (J.-A.) — *Sur les cordes communes des sections coniques et de leurs cercles de courbure, et en particulier sur les maxima et les minima de ces cordes.* (34 p.; all.)

VERSLUYS (J.). — *Applications nouvelles des déterminants à l'Algèbre et à la Géométrie.* (19 p.; fr.)

(*) Fondé en 1841. Prix : 3 Thlr. pour chaque volume composé de quatre cahiers gr. in-8°. Il paraît un ou deux volumes par an, en allemand, en français et en latin. Greifswald, C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung, Th. Kunike.

Le principal théorème contenu dans ce travail se rapporte à l'équation homogène d'une surface du second degré en coordonnées tétraédriques ; suivant que le discriminant de cette équation est négatif ou positif, la surface admet ou n'admet pas de génératrices rectilignes.

GRUNERT (J.-A.). — *Sur les projections conformes des cartes géographiques*. (34 p. ; all.)

GRUNERT (J.-A.). — *Sur le centre de gravité du trapèze et, en particulier, sur sa détermination graphique*. (7 p. ; all.)

LINDMAN (Chr.-Fr.). — *Remarques sur quelques séries*. (4 p. ; lat.)

GRUNERT (J.-A.). — *Sur une lettre remarquable, écrite par Lagrange, âgé de dix-huit ans, au comte G.-C. da Fagnano*. (9 p. ; all.)

SEELING (P.). — *Diverses propositions de la théorie des nombres*. (5 p. ; all.)

IMSCHENETSKY (V.-G.). — *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (*). (198 p. ; fr.)

Ce Mémoire contient un exposé complet et très-intéressant des travaux de Jacobi, de Bour, de Boole, de M. Bertrand et de M. Liouville sur cette branche importante de l'Analyse.

Nous reproduisons d'ailleurs une partie de l'Introduction :

« La théorie de l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre de la forme la plus générale, créée par les travaux des plus grands géomètres des temps modernes, forme actuellement la partie la plus approfondie et la plus achevée du calcul intégral. Dans l'histoire du développement de cette théorie, on rencontre ce fait remarquable, que les successeurs immédiats de Lagrange, son véritable fondateur (1772), considérèrent comme impossible de suivre la voie qu'il avait tracée ; tandis qu'au contraire les derniers progrès de cette théorie l'ont ramenée de nouveau aux principes de Lagrange. Pfaff, le premier, se plaçant à un nouveau point de vue, est parvenu à la solution complète du problème. Mais sa méthode, théoriquement exacte, s'est trouvée peu commode dans la pratique, par suite des difficultés que présente l'intégration successive de plusieurs systèmes d'équations différentielles. Cauchy (1819) et Jacobi (1837), par

(*) Traduit du russe par J. Hoüel. Un tirage à part a été fait de ce Mémoire et a déjà été signalé dans notre précédent numéro.

des procédés différents, et sans que le second eût aucune connaissance des travaux du premier, montrèrent que le but auquel con duisait la méthode de Pfaff pouvait être atteint plus simplement pa la seule intégration complète du premier des systèmes d'équation différentielles qui se rencontrent dans cette méthode. La questio paraissait dès lors complétement épuisée. Néanmoins, l'infatigabl et fécond génie de Jacobi n'abandonna pas ses investigations sur c problème auquel il avait déjà fait faire de si grands pas, et auqu s'attachait un nouvel intérêt depuis que les recherches d'Hamilto avaient mis en évidence la liaison qui existe entre cette théorie l'intégration des équations différentielles de la Dynamique. Penda que Jacobi se livrait à ses nouvelles études sur cette double questio la théorie continuait ses progrès, grâce aux remarquables publicatio d'autres analystes, Liouville, Bertrand, Donkin, Bour, etc., qui sont occupés du même objet, et dont les découvertes devaient laiss moins à faire au géomètre allemand, quoique souvent aussi ell dussent coïncider avec les résultats qu'il obtenait de son côté. No ne pouvons émettre ici que de simples conjectures, puisque le tra vail de Jacobi n'a paru qu'après sa mort, rédigé par Clebsch d'apr les matériaux trouvés dans ses papiers.

» Ces détails expliquent les réclamations de priorité auxquell cette publication a donné lieu de la part de plusieurs auteurs, relat vement soit aux théorèmes fondamentaux de la *nouvelle méthode* Jacobi, soit à son principe général. Mais, sans aucun doute, le no de ce grand géomètre restera attaché à cette théorie, fondée sur s conceptions et constituée par lui-même sous une forme systématiq complète, lors même que des parties isolées et secondaires de ensemble appartiendraient à d'autres inventeurs.

» En me bornant, pour le moment, à cette courte esquisse du d veloppement successif de ce problème, je me réserve de revenir pl longuement sur les détails historiques dans les notes qui accomp gnent le texte, et je vais donner maintenant un aperçu général contenu de ce Mémoire.

» Dans le Chapitre I, j'examine les différentes formes d'int grales des équations aux dérivées partielles du premier ordre; et, l'intégrale complète, je déduis l'intégrale générale, par la métho de la variation des constantes arbitraires, en me fondant sur les p priétés des déterminants fonctionnels.

» Dans le Chapitre II, je considère la forme particulière d'intégrale qui conduit à des équations linéaires par rapport aux dérivées partielles, et je donne un abrégé de la théorie de ces dernières, d'après Lagrange et Jacobi.

» Dans le Chapitre III, j'expose l'état général de la question, conformément aux vues indiquées dans le dernier travail de Jacobi, et j'y introduis les conditions d'intégrabilité de Liouville et de Donkin. Après avoir montré que, dans le cas particulier de deux variables indépendantes, la méthode de Jacobi revient identiquement à celle de Lagrange et de Charpit, je reprends la question générale, et j'effectue une première simplification des équations, par l'élimination de la fonction inconnue, en tant qu'elle y entrait explicitement; je signale, en outre, le défaut du procédé employé par Jacobi.

» On voit, par le contenu des Chapitres précédents, que l'objet principal de mon étude est la nouvelle méthode de Jacobi. Après l'avoir exposée, j'ai fait remarquer, d'accord avec l'opinion exprimée par Bour dans un Mémoire imprimé, et par Bertrand dans ses leçons publiques, que Jacobi n'a pas donné à la construction de sa théorie toute la simplicité possible. En suivant les indications de ces deux géomètres, conformes aux résultats de mes propres recherches, j'ai essayé, dans le Chapitre IV, d'établir le théorème fondamental de la méthode de Jacobi sur les principes les plus simples.

» Dans le Chapitre V, j'expose avec détail la marche des intégrations qu'exige la méthode de Jacobi. D'abord, pour présenter le procédé fondamental sous la forme la plus simple, je n'ai pas réduit, dans les équations, les variables à leur nombre minimum; en outre, j'ai indiqué les difficultés qui pouvaient se rencontrer, et j'ai examiné des cas où le procédé s'applique très-simplement. Enfin, par l'élimination des variables superflues, j'ai établi la théorie de la méthode dans tout son développement, et j'ai donné des exemples pour bien faire comprendre la marche du calcul.

» Le Chapitre VI est consacré à l'intégration des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre. Après avoir montré que la solution de cette question plus générale peut se faire par les procédés qui ont servi à résoudre le problème traité dans les Chapitres précédents, j'applique cette théorie à des problèmes déterminés et indéterminés aux dérivées partielles du premier ordre conduisant à l'intégration d'équations simultanées linéaires ou non

linéaires. Pour terminer, je considère à un nouveau point de vue la question générale, intéressante d'ailleurs par elle-même, des conditions d'intégrabilité immédiate d'une expression aux différentielles ordinaires d'ordre quelconque.

» Dans le Chapitre VII, j'expose la théorie de l'intégration des équations simultanées aux différentielles ordinaires de la forme canonique; j'explique la liaison qui existe entre le théorème de Poisson relatif aux intégrales de ces équations et le théorème fondamental de la méthode de Jacobi, et je démontre le procédé de Bertrand pour l'intégration des équations de la dynamique au moyen du théorème de Poisson; j'applique à un même exemple les deux théories.

» Enfin, dans le Chapitre VIII, pour compléter l'aperçu des méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, j'ai pensé qu'il ne serait pas inutile d'ajouter un exposé général de la méthode de Cauchy. »

M. Imschenetsky a fait une autre étude aussi consciencieuse que celle dont nous venons de citer l'Introduction, et relative aux équations du second ordre. Nous en parlerons prochainement.

Bretschneider (C.-A.). — *Les courbes polaires harmoniques*. (24 p.; all.)

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Mayr (A.). — Construction der Differentialgleichungen aus partikularen Integralen. Gr. in-8, Würzburg, Kellner. 1 Thlr. 24 Ngr.

Oppolzer (Th.). — Lehrbuch der Bahnbestimmung der Kometen und Planeten. 1 Bd. Lex-8. Leipzig, Engelmann. 4 $\frac{2}{3}$ Thlr.

Padova (E.). — Sul moto di un elissoide fluido ed omogeneo. Tesi per l'esame di abilitazione all' insegnamento, presentata alla regia Scuola Normale superiore di Pisa. In-8, 87 p. Pisa, tip. Nistri. 2 l. 50.

Piazzi (G.). — Sulle scoperte di Herschel. Lettere edite per cura di B.-E. Maineri. In-16, 32 p. Milano, tip. Pirola.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

VALSON (C.-A.), professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble. — LA VIE ET LES TRAVAUX DU BARON CAUCHY, membre de l'Académie des Sciences; avec une Préface de M. HERMITE, membre de l'Académie des Sciences. — 2 vol. in-8; 1868. Paris, Gauthiers-Villars. Prix : 8 francs.

Le premier volume de M. Valson raconte, avec de minutieux détails, la vie de l'illustre géomètre, considéré comme chrétien fervent plus encore que comme savant. Nous nous proposons ici de rendre compte du second, spécialement consacré à l'œuvre scientifique de Cauchy. En présence de sept cent quatre-vingt-neuf Mémoires relatifs aux théories les plus diverses incessamment abordées, abandonnées et reprises, M. Valson a renoncé à la tâche de tout analyser, même sommairement, mais il a tout énuméré et tout classé ; nous ne pouvons avoir la prétention d'en faire autant, et nous nous bornerons à signaler les traits principaux de l'OEuvre dont l'importance, qui grandit chaque jour, assure à Cauchy l'un des plus grands noms que puisse citer l'histoire des Mathématiques.

Augustin-Louis Cauchy, né à Paris, le 21 août 1789, entra à l'École Polytechnique à l'âge de seize ans. Quatre ans plus tard, en 1811, il débutait avec éclat dans la science par la solution aussi simple qu'élégante d'une question proposée par Poinsot. Tout en rendant justice au consciencieux et utile travail de M. Valson, je dois signaler l'absence regrettable du nom de l'illustre géomètre dans l'analyse de ce premier Mémoire, aussi bien que dans le récit des circonstances qui s'y rapportent. Poinsot et Cauchy ne s'aimaient pas; leurs contemporains ne l'ont pas ignoré. Candidats tous deux à la succession de Lagrange dans la Section de Géométrie, ils étaient dignes l'un et l'autre d'un tel héritage. Ampère, dont le nom est resté tout au moins l'égal de celui de Cauchy, était au nombre des concurrents, et l'échec du jeune géomètre, âgé alors de vingt-quatre ans, n'autorisait nullement son trop enthousiaste biographe à écrire : « S'il ne fut pas nommé, c'est qu'au scrutin des considérations d'un autre ordre furent mises en balance avec le mérite. » La question ne vaut pas qu'on l'étudie; mais, en se reportant en 1813, pour comparer les travaux publiés par Cauchy à ceux de Poinsot et d'Ampère, âgés, l'un

de trente-quatre ans, l'autre de trente-huit, il semble qu'un jugem équitable pouvait alors les préférer tous deux à leur jeune et brill concurrent.

La Section, il est vrai, plaçait au premier rang un quatrième ca didat; mais à quoi bon le rappeler? L'histoire des méprises aca miques est un lieu commun inépuisable qui n'étonne plus mainten et n'instruit personne. Quoi qu'il en soit, je ne rattache nullem à l'avantage obtenu par Poinsot l'inexplicable absence de son n dans le livre de M. Valson. Poinsot avait fait en Géométrie découverte véritable, celle de quatre nouveaux polyèdres réguli il s'était demandé s'il en existe d'autres, et le Mémoire présenté Cauchy à la première Classe de l'Institut était la réponse à c question.

« Le Mémoire que j'ai l'honneur de soumettre à la Classe, disai jeune auteur, contient diverses recherches sur la Géométrie des lides; la première partie offre la solution de la question proposée M. Poinsot sur le nombre des polyèdres réguliers que l'on peut c struire. »

Le doute n'est donc pas possible, et l'histoire de la question n'e geait aucune érudition.

Cauchy, dans son premier Mémoire, montrait d'éminentes qual devenues chez lui de plus en plus rares. La forme est aussi excell que le fond, et la rigueur des raisonnements semble s'allier s effort à la plus lumineuse clarté. Les deux Mémoires de 1811 e 1812, sur la théorie des polyèdres et les premières études su nombre des valeurs d'une fonction montrent que Cauchy, en a tant plus longtemps son esprit sur chacune de ses découvertes, au pu, s'il l'eût voulu, leur imprimer ce cachet de perfection défini que, trop souvent depuis, il n'a pas eu le loisir de chercher. C'est sa grande hâte de produire que Cauchy a été si loin de mériter l'é que lui décerne cependant M. Valson :

« Il ne quittait pas un sujet avant de l'avoir complétement ap fondi et élucidé, de manière à satisfaire les exigences des esprit plus difficiles. »

S'il est un nom illustre dans l'histoire de la science, auquel c louange ne soit pas applicable, c'est, sans contredit, celui de Cau et, lorsque l'on peut louer en lui tant de rares et exceptior mérites, c'est un tort véritable envers sa mémoire de citer pré

ment celui qui, de l'aveu de tous et évidemment par sa faute, lui a complétement fait défaut.

La théorie des intégrales doubles, et leur application à la recherche des intégrales définies, fut pour Cauchy l'occasion d'un succès plus brillant encore, et, pour les géomètres les plus illustres, l'objet d'un véritable étonnement.

Une intégrale simple ou double est la limite d'une somme d'éléments infiniment petits, et les géomètres jusqu'alors, si l'on en excepte l'illustre Gauss, admettaient que, sans en changer la valeur, on peut intervertir les opérations et ajouter les mêmes éléments dans un autre ordre.

Il faut exclure le cas où certains éléments deviennent infinis. Gauss, dans un beau Mémoire, avait remarqué que, réciproquement, quand l'ordre des intégrations change la valeur d'une intégrale double, l'élément intégré devient nécessairement infini. Cauchy, conduit par ses propres recherches au même résultat, en a su déduire des conséquences plus importantes et plus précises. Non content d'affirmer que l'ordre des intégrations peut influer sur la valeur d'une intégrale, il calcule dans un cas étendu la différence des deux résultats, et, par un de ces artifices élégants qui, chez lui, semblent naturels, en déduit, pour le calcul des intégrales définies, la méthode la plus ingénieuse et la plus féconde qui eût été donnée jusque-là.

Legendre s'est montré strictement et un peu sèchement juste lorsque, en rendant compte de ce beau Mémoire, il écrivit :

« Nous n'examinons pas si les nouvelles méthodes de M. Cauchy sont plus simples que celles qui étaient déjà connues, si leur application est plus facile, et si l'on peut trouver par leur moyen quelque résultat que ne pourraient donner les méthodes connues ; car, quand même on répondrait négativement à ces questions, il n'en resterait pas moins à l'auteur le mérite :

» 1° D'avoir construit, par une marche uniforme, une suite de formules propres à transformer les intégrales définies et à en faciliter la détermination ;

» 2° D'avoir remarqué le premier qu'une intégrale double prise entre des limites données pour chaque variable n'offre pas toujours le même résultat dans les deux manières d'effectuer les intégrations ;

» 3° D'avoir déterminé la cause de cette différence et d'en avoir donné la mesure exacte au moyen des intégrales singulières, dont

l'idée appartient à l'auteur et qui peuvent être regardées comme
découverte en Analyse;

» 4° Enfin d'avoir donné par ses méthodes de nouvelles form
intégrales fort remarquables, qui peuvent bien se déduire des form
connues, mais auxquelles personne n'était encore parvenu.

» Il nous parait, par tous ces motifs, que M. Cauchy a donné,
ses recherches sur les intégrales définies, une nouvelle preuve
sagacité qu'il a montrée dans plusieurs de ses autres productio

Legendre aurait pu, sans exagération, hausser de plusieurs to
note de ses louanges. En signalant une erreur commise jusque-l
les maitres de la science, Cauchy avait fait preuve de sagacité;
en cherchant et trouvant l'expression précise de l'erreur, en pou
à bout les conséquences de cette remarque, en se rendant maître
sujet aussi délicat sans en restreindre la généralité, en y rattac
enfin tant de conséquences éloignées et imprévues, il prenait ra
l'âge de vingt-trois ans, parmi les géomètres inventifs de son épo
Les Commissaires de l'Académie auraient pu le proclamer plus m
ment.

L'idée absolument nouvelle contenue dans le Mémoire sur les i
grales doubles devait être mise dans tout son jour par les écrits
rieurs de l'illustre analyste; elle forme, pour ainsi dire, le moti
minant et le ressort aussi simple que précieux de ses plus admir
découvertes.

En étudiant les intégrales doubles, Cauchy avait aperçu le
considérable des valeurs infinies d'une fonction. La suite des m
idées appliquées à la recherche des intégrales imaginaires d
bientôt après lui fournir la remarque la plus importante peut
aux progrès de la science analytique. La définition d'une inté
prise entre des limites imaginaires, sa valeur indépendante de la
suivant laquelle on intègre, son changement brusque lorsque
route franchit certains points pour lesquels la fonction devient i
ou mal déterminée, les conséquences relatives au calcul des inté
définies, aux racines des équations, au développement en série
la périodicité des intégrales, forment une longue chaîne de v
nouvelles que l'on ne saurait trop admirer, et dont il faut ren
à louer dignement la découverte; aucun géomètre, à aucune ép
n'a fait faire à l'Analyse pure un progrès plus considérable.

Cette grande théorie n'est pas née tout d'un coup : qui po

s'en étonner? Elle s'est lentement ordonnée et développée dans l'esprit de l'illustre inventeur, et je reproche à M. Valson de n'en pas avoir suffisamment marqué les phases et signalé le progrès. Les premiers Mémoires contiennent des imperfections et des inexactitudes, corrigées plus tard par Cauchy lui-même. Les fonctions imaginaires n'y sont pas distinctement définies, et l'intervention de leurs valeurs multiples semble n'y jouer aucun rôle. Sans rien enlever à la gloire de Cauchy, cela importe au lecteur, que l'admiration uniforme de M. Valson ne saurait guider. J'ajouterai que les indications du savant auteur sont parfois entachées de graves inexactitudes et de singulières inadvertances. La définitition du *résidu*, ce fondement de tant de travaux de Cauchy, n'est pas exacte. Quand une fonction $f(x)$ devient infinie pour la valeur $x = a$, a est racine de l'équation $\frac{1}{f(x)} = 0$, et, si le degré de multiplicité de cette racine est m, le produit $(x-a)^m f(x)$ a pour $x = a$ une valeur finie. En la nommant C on peut, pour les valeurs de x voisines de a, assimiler la fonction $f(x)$ à $\frac{C}{(x-a)^m}$; l'erreur commise sera infiniment petite par rapport à la grandeur évaluée; mais cette substitution, qui semble si naturelle, est absolument inféconde; Cauchy a donné, en s'en apercevant, une grande preuve de pénétration, et le *résidu*, qui joue un si grand rôle, n'est pas, comme le dit M. Valson, la valeur de la constante C. Le calcul des résidus, créé en apparence pour donner plus d'élégance et de simplicité aux résultats relatifs à la théorie des intégrales définies, s'applique avec grand avantage à toutes les parties de la science; Cauchy l'a introduit très-utilement dans l'étude des équations différentielles. Le rôle de Cauchy dans cette partie de la science, comme dans presque toutes ses branches d'ailleurs, est considérable. La théorie, si complétement étudiée avant lui, des équations linéaires à coefficients constants lui doit une forme nouvelle, dans laquelle le cas particulier où les racines de l'équation caractéristique deviennent égales est compris dans les mêmes formules que le cas général. J'attache, je l'avouerai, moins de prix que M. Valson à l'idée d'introduire dans les intégrales, pour remplacer les constantes arbitraires, les valeurs initiales de la fonction inconnue et de ses dérivées. Si l'on veut, en effet, pousser les calculs jusqu'au bout, les opérations exigées par les diverses formules sont non-seulement équivalentes, mais identiques :

des plus difficiles problèmes. Mais toute recherche exige des tâton nements et des essais infructueux, que Lagrange, Jacobi et Gaus ont connus sans aucun doute tout autant que lui. Ce qui disting Cauchy, dont le génie a égalé le leur, c'est d'en avoir longuement minutieusement informé le public.

Cauchy, en s'exerçant à bien des reprises sur la théorie de la lu mière, a montré sous une forme nouvelle toutes les ressources de so esprit d'invention, et la théorie créée par Fresnel lui doit de vérit bles progrès; bien souvent, il ne faut nullement s'en étonner, sur d tels sujets on le voit, il est vrai, tâtonner, revenir sur ses assertion et changer avec grand profit pour la science le principe de ses mé thodes.

Cauchy, par exemple, affirmait, au début de ses recherches, q les vibrations de la lumière polarisée sont dans le plan même de p larisation, auquel peu de temps après il les suppose perpendiculair pour renoncer plus tard à cette hypothèse et revenir à sa premiè assertion, qui est celle de Fresnel. On retrouve les mêmes incertitud et les mêmes variations relativement à la densité variable de l'éth dans les divers milieux, et, chaque fois qu'une opinion est adopté elle est présentée comme certaine et rigoureusement démontrée. Qu qu'il en soit, les résultats énoncés par Cauchy sur la réflexion, la doul réfraction et la polarisation des rayons réfléchis et transmis par corps cristallisé d'une manière quelconque sont justement placés p les physiciens au nombre des lois les plus complexes et les plus net à la fois que leur fournisse l'analyse mathématique; susceptibl par leur précision, d'être vérifiés expérimentalement, ils ont trou dans les belles recherches de M. Jamin une confirmation éclatan De telles rencontres sont dignes d'admiration; il ne faut pas toutef en exagérer la portée, et l'on doit, au point de vue mathématiq apporter de nombreuses restrictions à la rigueur des démonstratio Cauchy, après avoir établi les équations différentielles du mouvem d'un système de molécules qu'il assimilait à l'éther, avait comme par en chercher l'intégrale générale en assignant à la fonction inc nue la forme d'une intégrale définie quadruple. Les analystes se pouvaient apprécier, dans ce résultat qui devait renfermer implici ment la science entière, le mérite d'une grande difficulté vainc Mais c'est souvent ne rien voir que de tout voir à la fois : dans ce belle formule les lois physiques du phénomène restent tellement

découverte devait couronner ses efforts, il forçait le lecteur à le suivre dans les voies souvent stériles essayées et abandonnées tour à tour sans que rien vînt l'en avertir. Prenons pour exemple la théorie des substitutions et du nombre de valeurs d'une fonction. A qui doit-elle ses plus grands progrès? A Cauchy sans aucun doute, et il est véritable que son nom, dans l'histoire de cette belle question, s'élève à une grande hauteur au-dessus de tous les autres. Mais, sur cette théorie qui lui doit tant, Cauchy a composé plus de vingt Mémoires. Deux d'entre eux sont des chefs-d'œuvre. Que dire des dix-huit autres? Rien, sinon que l'auteur y cherche une voie nouvelle, la suit quelque temps, entrevoit la lumière, s'efforce inutilement de l'atteindre et quitte enfin, sans marquer aucun embarras, les avenues de l'édifice qu'il renonce à construire.

Les efforts des plus grands géomètres pour démontrer les théorèmes laissés par Fermat comme autant d'énigmes à la postérité mériteraient peut-être un exact historien. Dans cette lice glorieuse où sont descendus tour à tour Euler et Lagrange, Gauss et Dirichlet, Legendre et Kummer, M. Lamé enfin, dont les efforts ont été dignement jugés par Cauchy, on pourrait sans injustice accorder la palme à l'auteur des *Exercices de Mathématiques*, et la preuve du théorème sur les nombres polygones était peut-être la plus difficile à découvrir. Mais est-il possible de cacher qu'en revenant, à bien des reprises, sur un autre théorème de Fermat, il en a remué les difficultés sans en avoir résolu une seule? Les habitués de l'Académie des Sciences n'ont pas oublié avec quelle ardeur, pendant plusieurs semaines, Cauchy, préoccupé de cette question et toujours plein d'espoir, apportait à chaque séance des principes nouveaux entrevus la veille et dont il n'avait pu encore pénétrer toutes les suites. Combien de fois, dans son empressement, l'ont-ils vu déposer sur le bureau le titre d'un Mémoire inachevé qu'il envoyait à l'imprimerie à la dernière heure, en achetant la chance d'antidater de quelques jours une découverte importante par la certitude d'attacher son grand nom à un travail hâtif et imparfait? De tels souvenirs sont caractéristiques; ils ne prouvent nullement qu'inférieur à lui-même Cauchy fût quelquefois abandonné de sa rare perspicacité : l'appréciation serait très-injuste. Cauchy, pendant toute sa carrière, a conservé, avec la rapidité de la pensée, la même puissance d'invention et de pénétration. Son génie toujours prêt le rendait maître en peu d'instants

La science fut enrichie d'un Chapitre réellement nouveau, et la méthode de Cauchy, commentée depuis avec beaucoup de sagacité et de science par d'habiles et profonds géomètres, doit prendre rang parmi les théories classiques de la Mécanique céleste.

L'admiration de M. Valson pour l'illustre géomètre est absolue et sans réserve, et l'absence, peut-être volontaire, de toute critique, diminue à mes yeux, je l'avoue, le mérite considérable pourtant d'un travail où s'allie, à une science très-exacte, un esprit méthodique et soigneux. Cauchy, dit M. Valson, était un éminent professeur; la louange est méritée, mais, si l'on veut la développer, il ne faut pas, à l'exemple du savant auteur, énumérer, sans en omettre un seul, tous les mérites de méthode et de diction, qu'un maître plein de zèle puisse unir à la science la plus profonde, pour les attribuer sans distinction à Cauchy. L'illustre inventeur a grandement contribué par son enseignement à l'École Polytechnique aux progrès des hautes études mathématiques. Il a laissé dans la mémoire des élèves d'élite tels que MM. Combes et de Senarmont, une juste et reconnaissante admiration. Il a formé au Collége de France des savants qui, devenus célèbres, se plaisaient à reporter vers lui la meilleure part de leur succès et l'origine de leurs plus beaux travaux; il a permis enfin à l'Université de France, aussi longtemps que son nom a brillé sur les affiches de la Sorbonne, de l'opposer, sans accepter d'infériorité, aux noms de Gauss, de Jacobi et de Dirichlet, dont s'enorgueillissaient les Universités allemandes. Tout cela est strictement vrai, il est juste et bon de le dire; mais ces louanges s'adressent au savant éminent bien plus encore qu'au professeur habile, et, s'il m'est permis d'en juger par les leçons que j'ai entendues à une époque où l'illustre maître avait conservé toute la vigueur de son talent, l'enseignement de Cauchy, si précieux pour les vrais géomètres, n'était nullement fait pour instruire et surtout pour développer les esprits ordinaires. Lorsqu'en 1849, aux applaudissements de tous les amis de la science, Cauchy fut appelé à occuper à la Faculté des Sciences de Paris la chaire de Mécanique céleste, ses premières leçons, il faut l'avouer, trompèrent complétement l'espoir d'un auditoire d'élite plus surpris que charmé par la variété un peu confuse des sujets abordés. La troisième, il m'en souvient, fut presque entièrement consacrée à l'extraction de la racine carrée, et, le nombre 17 étant pris pour exemple, les calculs furent poussés jusqu'à la dixième décimale par des méthodes connues

de tous les auditeurs, et que Cauchy croyait nouvelles parce que la veille sans doute elles avaient spontanément traversé son esprit. Je ne revins plus et j'eus grand tort, car les leçons suivantes m'auraient initié dix ans plus tôt aux plus brillantes découvertes de l'illustre maître. Me contestera-t-on le droit d'ajouter que je n'aurais pas à exprimer un tel regret, si à ses éminentes qualités comme géomètre Cauchy avait ajouté le talent et l'art du professeur ?

M. Valson, dans l'un des Chapitres du premier volume, a assigné à Cauchy parmi les géomètres contemporains un rang tout singulier, qui ne souffre que pour le seul Gauss la possibilité d'une comparaison. C'est de quoi je ne saurais convenir; mais le parallèle de Cauchy et de Gauss serait intéressant. Si, sans craindre de commettre ces deux grandes renommées, j'osais un jour le tenter, je voudrais, par des études préalables, raviver dans mon esprit et préciser les souvenirs d'admiration qu'elles doivent réveiller l'une et l'autre.

Mais il ne faudrait pas, pour tous deux, procéder de même façon, et cela seul est une indication. Les écrits de Gauss sont classiques, les découvertes seules de Cauchy le deviennent peu à peu, et le temps, qui n'enlèvera rien à la gloire de l'un, doit, sans aucun doute, accroître celle de l'autre; ce n'est donc pas en relisant les ouvrages de Cauchy que je voudrais me préparer à le louer, c'est en repassant dans mon esprit les derniers progrès de la science, en y retrouvant dans plus d'une théorie renouvelée le souvenir et la marque de son génie, en contemplant son influence croissante sur d'éminents disciples, en songeant à la source féconde d'études et de recherches qu'il leur a léguée, que je m'efforcerais de comprendre l'importance de son rôle et de l'exprimer dignement. Pour accroître, au contraire, la juste admiration qu'éveille le seul nom de Gauss, il suffirait d'étudier, sans en passer une page, l'un quelconque de ses beaux Mémoires, si bien caractérisés par lui-même dans la courte, expressive et modeste devise : *Pauca sed matura*. La balance, cela n'est pas douteux, pencherait du côté de Gauss : c'est le sentiment unanime des géomètres. La comparaison, sur plus d'un point, tournerait cependant à l'avantage de son rival, et c'est une grande gloire pour Cauchy. Mais, lorsqu'en remontant la série des siècles pour découvrir un émule à l'illustre analyste français, M. Valson a intitulé le dernier Chapitre de son premier volume : *Parallèle de Cauchy et de Pascal*, il a préparé

à son lecteur une impression de surprise sans mélange, sur laquelle je ne veux pas insister.

J. BERTRAND.

Nous croyons faire plaisir à nos lecteurs en ajoutant à l'article si intéressant qu'on vient de lire, et qui est extrait du *Journal des Savants* (avril 1869), le tableau résumé des travaux d'Augustin Cauchy qu'on trouve dans le second volume de M. Valson, p. 16.

OUVRAGES DÉTACHÉS (*).

Cours d'Analyse de l'École royale Polytechnique. 1re Partie (seule publiée). *Analyse algébrique*; 1 vol. in-8°; 1821.

Résumé des Leçons données à l'École Polytechnique sur le Calcul infinitésimal; 1 vol. in-4°; 1823.

Leçons sur les applications du Calcul infinitésimal à la Géométrie; 2 vol. in-4°; 1826-1828.

Leçons sur le Calcul différentiel; 1 vol. in-4°; 1829.

Exercices de Mathématiques; 51 livraisons in-4°; 1826-1830.

Résumés analytiques; 5 livraisons in-4°; Turin, 1833.

Nouveaux Exercices de Mathématiques (Mémoire sur la dispersion de la lumière); 8 cahiers in-4°; Prague, 1835-1836.

Exercices d'Analyse et de Physique mathématique; 4 vol. in-4°; 1840-1847.

MÉMOIRES.

Sept cent quatre-vingt-neuf Mémoires, Rapports, Notes, etc., répartis comme il suit :

Mémoires détachés	18
Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences	549
Mémoires de l'Institut	23
Mémoires des Savants étrangers	3
Journal de l'École Polytechnique	14
Annales de Gergonne	4
Bulletin de Férussac	15
Bulletin de la Société Philomathique	15
Journal de M. Liouville	7

MÉMOIRES PUBLIÉS EN CORPS D'OUVRAGE.

Anciens *Exercices de Mathématiques*	88
Nouveaux *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*	53
Total	789

Si l'on classe les mêmes Mémoires par ordre de matière, sans tenir compte de ceux qui font double emploi comme se rapportant à la fois à plusieurs sujets

(*) Nous avons complété la liste donnée par M. Valson.

distincts, on obtient le résultat suivant :

Arithmétique, théorie des nombres	69
Géométrie	39
Analyse	72
Intégrales définies. — Résidus	81
Fonctions symétriques. — Substitutions	40
Séries	73
Théorie des équations	48
Fonctions périodiques inverses	39
Équations différentielles	84
Mécanique	113
Optique	102
Astronomie	72

Espérons que ces Mémoires, dont plusieurs sont devenus extrêmement rares, seront tous réimprimés, et que la France élèvera à Cauchy, une de ses gloires mathématiques, un monument digne de lui, en publiant la Collection complète de ses œuvres. Cauchy ne manque pas chez nous de disciples zélés, d'admirateurs dévoués. Plusieurs, peut-être, hésiteraient à diriger l'ensemble d'une publication aussi considérable. Aucun, nous en sommes convaincu, ne refusera ses soins et ses conseils pour la branche de la science dont il s'est plus particulièrement occupé à la suite de Cauchy. G. D.

HANKEL (Dr Hermann), ordentlicher professor der Mathematik. — Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen. *Ein Beitrag zur Feststellung des Begriffs der Function überhaupt.* Universitätsprogramm zum 6 Merz 1870. — In-4°, 51 S.; 1870. Tübingen, Druck von L. F. Fues (*).

Pour donner un aperçu du contenu de cet intéressant Mémoire, nous allons reproduire les principaux passages de l'*Introduction*.

Ce qui manquait surtout aux mathématiciens de l'antiquité, c'était l'idée de *variabilité*. S'ils étaient forcés de l'introduire un instant pour définir certaines courbes engendrées par le mouvement, ils s'empressaient d'abandonner les considérations cinématiques, dès qu'ils voulaient établir en toute rigueur les propriétés de ces courbes. C'est Descartes qui a ouvert le premier l'ère des Mathématiques mo-

(*) *Recherches sur les fonctions oscillantes et discontinues un nombre infini de fois. Étude pour contribuer à fixer la notion de fonction*; par le Dr Hankel, professeur ordinaire de Mathématiques à l'Université de Tubingue.

dernes, en représentant par des courbes les valeurs variables des racines d'une équation entre deux grandeurs. Pour désigner une telle dépendance, Leibnitz et Jean Bernoulli adoptèrent la dénomination de *fonction*.

Pour Euler et les autres géomètres du XVIII[e] siècle, *fonction* fut synonyme d'*expression analytique*, explicite ou implicite. On commença par considérer ces expressions comme déterminées au moyen des opérations algébriques (addition, multiplication, etc.), et les fonctions étaient dites *algébriques* ou *transcendantes*, suivant que le nombre des opérations était fini ou infini. On admettait la possibilité générale d'un tel développement des transcendantes, et on leur attribuait sans hésitation toutes les propriétés des fonctions algébriques indépendantes du nombre des opérations. On fut longtemps avant de remarquer que certaines expressions purement analytiques, telles que

$$\sin\frac{1}{x},\quad e^{\frac{1}{x}},\quad \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}},\quad \int_x^\infty \frac{dx}{1+e^{\frac{1}{x}}},$$

pour $x = 0$, présentent des singularités essentiellement différentes de celles qui se rencontrent dans les fonctions algébriques (*).

Lorsque des courbes tracées arbitrairement différaient par un caractère quelconque des courbes algébriques, on les appelait *curvæ discontinuæ, seu mixtæ, seu irregulares* (**), par opposition aux *curvæ continuæ*, déterminées par des équations, et l'on était convaincu de l'impossibilité de représenter les courbes discontinues par des équations analytiques. Lorsque, dans le problème des cordes vibrantes, on introduisit, comme fonction arbitraire, la dépendance entre l'abscisse et l'ordonnée de pareilles courbes, ce fut une première dérogation à la définition admise jusque-là de l'idée de fonction, et d'Alembert était en droit de soutenir que c'était « contre les règles de l'Analyse » (***). La polémique qui s'éleva à ce sujet entre d'Alembert, Euler, Daniel Bernoulli et Lagrange, a été admirablement résumée par Riemann, dans son Mémoire intitulé : *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*, § I (****).

(*) *Voyez* D'ALEMBERT, *Histoire de l'Académie de Berlin pour l'année* 1747, p. 236.

(**) EULER, *Introductio in Analysin infinitorum*, t. II, p. 6.

(***) *Opuscules mathématiques*, t. I, p. 32.

(****) *Abhandlungen der Göttingischen Gesellschaft*, t. XIII, 1867.

La difficulté s'accrut encore bien davantage, lorsque, en traitant des fonctions bien définies *entre certaines limites seulement*, on fut amené à les considérer *en dehors* de ces limites, et à déterminer leurs valeurs correspondantes à toutes les valeurs de la variable. Le premier exemple de ce cas embarrassant fut la célèbre question des logarithmes des nombres négatifs, qui donna lieu à de vifs débats entre Euler et d'Alembert. On s'en tira au moyen d'un nouveau principe, que l'on pourrait appeler *principe de continuation* (*Princip der Fortsetzung*), et qui s'énoncerait ainsi : « Deux fonctions définies par des développements différents de forme, et relatifs à deux intervalles différents, mais contigus, doivent être considérées comme ne formant qu'une seule et même fonction, lorsqu'elles jouissent, chacune dans son intervalle, de propriétés identiques. »

Tout en admettant tacitement ce principe, les géomètres du siècle dernier ne le formulèrent jamais explicitement, et ne cherchèrent nullement à préciser les conditions sous lesquelles deux développements différents, correspondants à des suites différentes de valeurs de la variable, pouvaient être regardés comme appartenant à une même fonction.

On peut citer bon nombre de démonstrations insuffisantes ou inexactes, de propositions mal déterminées ou même tout à fait fausses, présentées par les géomètres les plus illustres, et qui témoignent de l'incertitude qui régnait alors sur les fondements de la théorie des fonctions. Lagrange donnait encore en 1813, dans la seconde édition de sa *Théorie des fonctions analytiques*, une démonstration défectueuse du théorème de Taylor. C'est en 1829 (*), que Cauchy a fait remarquer, pour la première fois, que ce théorème pouvait être en défaut, malgré la convergence de la série. Gauss a le premier énoncé, d'une manière expresse, en 1816 (**), qu'il n'est pas permis de prendre en général l'intégrale d'une fonction entre des limites qui comprennent entre elles une valeur pour laquelle la fonction devient infinie. En 1826, Abel a établi la vraie définition d'une puissance et les règles de convergence de la série du binôme (***) ; avant lui, Poisson signalait

(*) *Leçons sur le Calcul différentiel*, 10ᵉ Leçon, p. 105.

(**) *Theorematis de resolubilitate functionum, etc. demonstratio tertia* (Gauss *Werke*, t. III, p. 63).

(***) *Journal de Crelle*, t. I, p. 311. — *Œuvres complètes*, t. I, p. 66.

dans cette théorie, divers paradoxes, dont Poinsot lui-même n'avait pu trouver l'explication (*). Mentionnons encore les nombreuses tentatives pour étendre la définition des facultés numériques au cas des valeurs négatives ou fractionnaires de la variable; c'est à Weierstrass qu'il était réservé de mener cette entreprise à bonne fin (**).

Cette conception des fonctions, d'après Euler et ses contemporains, reçut une rude atteinte lorsque Fourier démontra, en 1807 (***), la possibilité de développer en séries périodiques, non-seulement des fonctions *analytiques* admettant parallèlement un autre développement suivant les puissances de la variable, mais encore des fonctions entièrement arbitraires et n'étant assujetties à aucune loi simple, c'est-à-dire celles qu'Euler appelait *functiones discontinuæ*, et que M. Hankel désigne sous le nom de *fonctions illégitimes* (*illegitime Functionen*).

Il s'ensuivait de là forcément que l'ancienne idée de fonction n'était plus admissible. En effet, puisque ces fonctions discontinues pouvaient, elles aussi, être représentées par des expressions analytiques, on n'avait plus le droit de regarder les propriétés des fonctions algébriques comme étant des propriétés typiques, applicables à toutes les transcendantes. Et d'autre part, si une seule et même série pour des valeurs de la variable comprises dans deux intervalles contigus, pouvait représenter des lois analytiques différentes, le *principe de continuation* était par cela même ruiné.

Dirichlet, dans ses travaux sur les séries de Fourier (****), remplaça les anciennes définitions par une autre, aussi générale que possible en appelant *fonction* de x toute quantité y qui, dans un certain intervalle, prend, pour chaque valeur attribuée à x, une valeur déterminée, la loi de dépendance pouvant, dans cet intervalle, varier d'une manière arbitraire, et n'être exprimable par aucune des opérations mathématiques. Mais cette définition pèche à son tour par excès de généralité, les fonctions ainsi conçues ne conservant plus aucune propriété générale, et les valeurs d'une fonction pour les différentes valeurs de la variable n'ayant plus entre elles aucune espèce de relation.

(*) *Recherches sur l'Analyse des sections angulaires*; 1825.

(**) *Journal de Crelle*, t. LI, 1856, p. 1.

(***) *Bulletin de la Société Philomathique*, t. I. p. 112.

(****) *Repertorium der Physik, herausgegeben von* Dove, t. I, 1837, p. 152.

Il fallait donc compléter la conception de Dirichlet, et Cauchy vait déjà travaillé dans ce sens dès l'année 1815. C'est Riemann ui est enfin parvenu à fonder cette notion sur une base solide (*). renant pour point de départ la conception de Dirichlet, il établit elle d'une fonction (monogène) d'une variable complexe, et donna insi un corps à une définition trop vague, en se rapprochant de ancien point de vue.

Malheureusement il ne fut pas donné au fondateur de la théorie es fonctions de variables complexes d'édifier son système d'après un lan complet et uniforme; il n'a pu nous en laisser que des fragments, qui nous en font apprécier toute la grandeur. Les fondements u nouveau système ne sont pas encore assez à l'abri de toute objecion, pour que l'on puisse asseoir sur eux l'ensemble de l'édifice analytique. Par exemple, le principe auquel Riemann a attaché le om de Dirichlet a été dans ces derniers temps l'objet de nombreuses controverses. Les objections s'appuient sur certains cas d'exception que l'on peut imaginer *a priori*, et dans lesquels les fonctions présentent des discontinuités que l'on ne peut exclure sans discussion, et qui invalident cependant les conclusions que l'on comptait appliquer à toutes les fonctions qui répondent à la définition.

M. Hankel a pensé que le seul moyen d'éclaircir ce qui concerne ces discontinuités, et de préparer la solution du problème de la nature des fonctions, c'était de s'affranchir de toutes les représentations que les mathématiciens les plus récents rattachent encore à la conception d'Euler, et d'établir des distinctions parmi la multitude des relations possibles entre les grandeurs de deux variables, qui sont renfermées dans la pure conception de la fonction d'après Dirichlet, en portant principalement son attention sur les fonctions *illégitimes*, si peu étudiées jusqu'ici. L'objet de son Mémoire est de traiter ces cas paradoxaux des fonctions, en considérant d'abord les variables *réelles* et les valeurs *réelles et finies* des fonctions d'une variable indépendante.

Après avoir établi, dans le § I[er], le sens qu'il attache dans ce Mémoire au mot *fonction*, l'auteur énumère (§ II) les différentes espèces

(*) *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*; Göttingen, 1851. — Une traduction italienne de ce Mémoire a paru dans les *Annali di Matematica pura ed applicata*, t. II; 1859.

possibles de continuité et de discontinuité des fonctions en certain points. Il considère ensuite (§ III) les fonctions continues en général et fait voir que, outre les fonctions analytiques ordinaires à oscillations finies, en nombre fini dans un intervalle donné, on peut auss concevoir des fonctions offrant un nombre infini d'oscillations d'amplitude infiniment petite. Jusqu'à présent, on n'avait représenté analytiquement que des fonctions ayant un nombre infini d'oscillation dans le voisinage seulement de certains points particuliers. A l'aid d'un principe dont l'auteur a puisé l'idée dans un exemple donn par Riemann (*), et auquel il donne le nom de *principe de la condensation des singularités* (§ IV), il est parvenu (§ V) à former de séries absolument convergentes, et oscillant en chaque point dan toute l'étendue d'un intervalle fini (**).

Ces fonctions sont toujours susceptibles d'intégration; mais l question de savoir si elles ont une *dérivée* est sujette à des difficult particulières. Cette question n'a été que très-rarement traitée, l'exi

---

(*) *Ueber die Darstellbarkeit u. s. w.*, art. 6.

(**) Pour éclairer toutes ces discussions, il ne sera pas inutile de citer au moins u des exemples donnés par M. Hankel.

Soit $\varphi(y)$ une fonction remplissant entre $y=-1$ et $y=+1$, excepté pour $y=$ les conditions de continuité qui permettent le développement par la série de Tayl et qui, pour $x=+\varepsilon$, converge vers $+1$, et, pour $x=-\varepsilon$, vers -1, ε étant infinim petit. On sait qu'une telle fonction peut se représenter par une série trigonométriq ou par une intégrale de Fourier.

La série

$$f(x)=\sum\frac{\varphi(\sin n x\pi)}{n^s}$$

qui s'en déduit est alors continue pour toutes les valeurs irrationnelles de x, et adm une dérivée si l'on fait tendre l'accroissement vers 0 par des valeurs irrationnelles.

Pour x rationnel égal à $\frac{\nu}{\mu}$, on a, abstraction faite des termes qui s'évanouissent avec

$$f\left(\frac{\nu}{\mu}+\varepsilon\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)=\frac{1}{\mu^s}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{(-1)^{r\nu}}{r^s}.$$

De plus

$$f\left(\frac{\nu}{\mu}-\varepsilon\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)=-\frac{1}{\mu^s}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{(-1)^{r\nu}}{r^s}.$$

Ainsi, quand x tend vers $\frac{\nu}{\mu}$, la valeur de la fonction est différente suivant que x re inférieur ou supérieur à sa limite. Il y a discontinuité pour toutes les valeurs co mensurables.

tence d'une tangente en chaque point d'une courbe étant considérée comme d'une évidence géométrique immédiate et comme une conséquence forcée de la *loi de continuité*, devant laquelle on s'inclinait comme devant une nécessité naturelle, inhérente aux lois mathématiques. La tentative faite par Ampère en 1806 (*) n'est rien moins que satisfaisante. La question a été reprise en 1861 par M. Lamarle (**); toutefois sa démonstration, malgré l'approbation de géomètres éminents, n'a pas encore réuni l'assentiment universel. Mais lors même que cette mystérieuse loi de continuité régirait en réalité tous les mouvements dans la nature, ce ne serait pas une raison pour restreindre, en aucune façon, le domaine des mathématiques pures, et cette sorte d'évidence intuitive que l'on invoque a déjà conduit, dans les recherches géométriques, à trop de conclusions erronées pour que l'on soit en droit de la placer sur la même ligne qu'une démonstration scientifique. L'opinion qui semble prévaloir aujourd'hui, et qui fut celle de Gauss, de Dirichlet et de Jacobi, est que l'existence de la dérivée d'une fonction continue n'est pas une *conséquence nécessaire* de la continuité, mais constitue une hypothèse particulière, qui se trouve naturellement satisfaite par les fonctions définies au moyen de l'intégration; et, bien qu'il y ait encore plus d'un mathématicien qui fasse profession de ne pas croire aux fonctions continues sans dérivées, le travail de M. Hankel, qui nous montre des fonctions exprimées *analytiquement* par des séries absolument convergentes, et n'admettant pas néanmoins de dérivée, nous semble devoir modifier ces convictions.

Les §§ VI et VII sont consacrés à l'étude des fonctions *linéairement* discontinues, c'est-à-dire des fonctions qui présentent, dans un intervalle fini, un nombre infini de solutions de continuité. Ces fonctions se partagent en deux classes essentiellement distinctes : celles qui forment une discontinuité *ponctuée*, et celles qui sont *totalement* discontinues. Ces deux classes ne se comportent pas de la même manière au point de vue de l'intégrabilité, les premières étant toujours intégrables, les secondes jamais. Dans le § IX, des fonctions discontinues des deux classes sont représentées par des expressions analytiques.

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, XIII[e] Cahier, p. 148.

(**) *Exposé géométrique du Calcul différentiel*, t. I, p. 96.

Le paragraphe final est consacré à la discussion de la notion fonction, et conclut à la nécessité d'adopter la définition donnée Riemann.

C'est l'étude des précieux écrits de Riemann, et surtout de beau Mémoire déjà cité (*Ueber die Darstellbarkeit u. s. w.*) qui a piré à M. Hankel son travail sur ces questions délicates, qui, com le dit Riemann, d'après Dirichlet, « sont intimement liées avec principes du Calcul infinitésimal, et servent à y introduire plus précision et de clarté. »

J. Hoüel.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

MATHEMATISCHE ANNALEN, herausgegeben von A. Clebsch professor in Göttingen, und C. Neumann, professor in Leipzig Druck und Verlag von B. G. Teubner (*). T. I; 1869.

Weber (H.). — *Sur l'intégration de l'équation aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0.$$

(37 p.; all.)

On sait que cette équation se présente dans plusieurs questions Physique mathématique : théorie du mouvement de la chaleur d les espaces cylindriques, vibrations transversales des membranes t dues et des plaques élastiques, etc.

En général, dans les problèmes à résoudre, la constante k qui fig dans l'équation précédente n'est pas *donnée à l'avance*; mais elle être déterminée d'après certaines conditions aux limites qui serai *incompatibles avec l'équation différentielle si k était choisi arbitrairement.* Ces conditions aux limites sont de différente nature, à caus la variété des questions dans lesquelles on rencontre l'équation posée. Ainsi, dans la théorie des plaques élastiques, il faut qu

(*) Annales mathématiques, publiées par A. Clebsch, professeur à Gœttingue C. Neumann, professeur à Leipzig. Librairie de B.-G. Teubner. — Ce Recueil par Cahiers détachés gr. in-8, d'à peu près 200 pages. Quatre Cahiers forment un vo d'environ 40 feuilles. Prix : 5 ½ Thlr. En allemand, en français, etc.

sans être nul pour tous les points situés *à l'intérieur* d'une courbe fermée, devienne égal à zéro *sur le périmètre* de la courbe. Dans certains problèmes de la théorie de la chaleur, il doit y avoir, sur le périmètre de la courbe, entre la température u et son coefficient différentiel $\frac{\partial u}{\partial p}$, pris suivant la normale, une relation de la forme

$$u + \alpha \frac{\partial u}{\partial p} = 0.$$

Etc.

M. Weber est le premier à notre connaissance qui donne dans l'étude de ces questions des démonstrations rationnelles et irréprochables au point de vue de la rigueur. La Physique mathématique a exercé et exercera encore, cela n'est pas douteux, une grande influence sur le progrès des Mathématiques pures; elle présente le grand avantage de poser des problèmes dont les conditions sont définies par la nature, et qui sont susceptibles, en général, d'une solution unique. Mais il importe, croyons-nous, qu'elle soit traitée avec toute la rigueur que comportent les autres parties des Mathématiques. A ce point de vue, la lecture du Mémoire dont nous venons de transcrire le titre nous paraît des plus instructives. La méthode de M. Weber est analogue à celle dont Riemann a fait un si heureux emploi dans l'étude de l'équation plus simple

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Sans entrer dans l'analyse détaillée des résultats, nous remarquerons qu'ils établissent la plus grande analogie entre la fonction u satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0, \tag{1}$$

et la fonction $A \cos kx + B \sin kx$, intégrale de la suivante :

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + k^2 u = 0, \tag{2}$$

qui contient une variable de moins, mais qui est tout à fait semblable à la proposée (1).

Par exemple, on sait que si k est donné, on ne peut pas disposer

des constantes A et B, de manière que $A \cos kx + B \sin kx$ s'annul pour deux valeurs de x, a et b; pour qu'il en soit ainsi, il faut qu $a - b$ soit un multiple de $\frac{\pi}{k}$, d'où

$$k = \frac{n\pi}{a-b}.$$

De même, cherchons une fonction u de deux variables, satisfa sant à l'équation proposée, et s'annulant sur tous les points d'un courbe fermée. Ce problème sera impossible si k est arbitraire, et i satisfait pas à une certaine équation transcendante, ayant une infini de racines.

Le Mémoire se termine par la résolution effective de l'équati proposée dans le cas d'un espace plan limité par des paraboles co focales.

Lüroth (J.). — *Sur quelques propriétés d'une classe de courbes quatrième ordre.* (17 p.; all.)

Soit l'équation

$$\sum_1^5 (a_i x + b_i y + c_i)^4 = 0.$$

Cette équation représente une courbe du quatrième degré, et co tient quinze constantes, autant qu'il y en a dans l'équation la pl générale des courbes du quatrième ordre. M. Clebsch a donc obte un résultat des plus curieux (*) en établissant que la forme préc dente d'équation n'est pas propre à représenter toutes les courbes quatrième ordre; elle ne s'applique, en réalité, qu'à celles pour l quelles s'annule un invariant, du sixième ordre par rapport aux co ficients. M. Lüroth ajoute plusieurs propositions à celles qu'av déjà données M. Clebsch sur ces courbes, si près d'être les plus g nérales de leur degré.

Cayley (A.).— *Sur la solution de l'équation quartique* $\alpha U + 6\beta H =$ (2 p.; angl.)

Clebsch (A.) et Gordan (P.). — *Sur la théorie des formes cubiq ternaires.* (34 p.; all.)

Très-important travail d'ensemble, où les auteurs reprennent ce

(*) *Journal de Crelle*, t. LIX, p. 125.

théorie déjà étudiée par MM. Aronhold, Brioschi, etc. Les auteurs font connaître beaucoup de relations nouvelles; malheureusement les travaux de cette nature sont difficiles à analyser. Le Mémoire se termine par la démonstration des belles formules de M. Aronhold, qui établissent un lien si intime entre la théorie des formes cubiques et celle des fonctions elliptiques.

Gordan (P.). — *Sur les formes ternaires du troisième degré.* (39 p.; all.)

M. Gordan a établi, dans ces derniers temps (*), un résultat qui a attiré l'attention de tous les géomètres : à chaque forme binaire correspond un système de covariants en nombre limité, système que l'auteur appelle *complet*, et qui jouit de la propriété suivante : Tout autre covariant s'exprime en fonction entière des formes du système complet. Dans le Mémoire actuel, M. Gordan s'est proposé d'étendre le même théorème aux formes cubiques ternaires.

Geiser. — *Sur les tangentes doubles d'une courbe plane du quatrième ordre.* (10 p.; all.)

Si d'un point p on mène des tangentes à une surface du troisième ordre, ces tangentes forment un cône du sixième degré. Si le point p est pris sur la surface, ce cône se décompose en un plan double, le plan tangent au point p, et en un cône du quatrième ordre. On connait déjà un plan tangent double de ce cône, le plan tangent à la surface en p; les autres plans tangents doubles du cône doivent l'être aussi de la surface, et, par conséquent, doivent passer par une de ses vingt-sept droites. On a donc vingt-huit plans tangents doubles du cône circonscrit, et, par suite, vingt-huit tangentes doubles de l'une quelconque des sections planes de ce cône, qui sont des courbes du quatrième ordre.

Tel est le point de départ de M. Geiser; on voit qu'il établit une relation entre le problème des droites sur une surface du troisième degré, et celui des tangentes doubles aux courbes du quatrième ordre. Cette analogie entre les deux problèmes a été démontrée analytiquement par M. Jordan, dans son *Traité des Substitutions*.

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXVI, p. 1117 et 1172. Depuis, l'auteur a publié un Mémoire étendu sur ce sujet, justement dans le Recueil dont nous commençons l'analyse, t. II, Cahier 2, p. 227-281. — *Voir* aussi Cayley, t. CXLVI des *Philosophical Transactions*, p. 101, et Gordan, *Journal de M. Borchardt*, t. LXIX, p. 323.

SCHERING (E.). — *Communication relative au troisième volume des Œuvres de Gauss.* (16 p.; all.)

JORDAN (C.). — *Commentaire sur Galois.* (16 p.; fr.)

Ce travail, écrit avec beaucoup de clarté, est plus qu'un commentaire, et contient des théorèmes nouveaux et importants. Nous citerons le suivant :

« Si les racines de deux équations irréductibles $F(x) = 0$, $f(z) = 0$ sont liées par des relations algébriques, ces relations peuvent se déduire d'une seule équation ayant la forme

$$\varphi(z_1, z_2, \ldots) = \psi(x_1, x_2, \ldots),$$

dans laquelle les racines sont séparées. »

KÖNIGSBERGER. — *Les équations modulaires des fonctions hyperelliptiques du premier ordre, pour la transformation du troisième degré* (4 p.; all.)

KÖNIGSBERGER. — *Équation différentielle à laquelle satisfont les périodes des fonctions hyperelliptiques du premier ordre.* (3 p.; all.)

KÖNIGSBERGER. — *Rectification d'un théorème d'Abel concernant les fonctions algébriques.* (2 p.; all.).

On connaît l'expression générale qu'a donnée Abel, pour une fonction algébrique, dans son Mémoire sur l'impossibilité de résoudre généralement les équations d'un dégré supérieur au quatrième (*). Cette expression est de la forme

$$v = r_0 + p_1^{\frac{1}{n}} + r_1 p_1^{\frac{2}{n}} + \ldots + r_{n-1} p_1^{\frac{n-1}{n}},$$

où Abel affirme que p_1 est une fonction d'ordre $\mu - 1$. C'est là le point critiqué par l'auteur, qui corrige le théorème de la manière suivante :

Si v est une fonction algébrique d'ordre μ et de degré m, on aura

$$v = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \ldots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$

où n est un nombre premier, $q_0, q_2, \ldots, q_{n-1}$ des fonctions algébriques d'ordre μ et du degré $m - 1$ au plus, et p une fonction telle, que $p^{\frac{1}{n}}$ soit aussi du μ^e ordre.

(*) *Journal de Crelle*, t. I, p. 65; et *Œuvres complètes*, t. I, p. 5.

CLEBSCH (A.). — *Sur les courbes qui correspondent aux fonctions abéliennes de la classe* $p = 2$. (3 p.; all.)

Dans cette courte Note, l'auteur reprend une question qu'il avait déjà traitée dans l'Ouvrage, devenu classique, qu'il a publié en collaboration avec M. Gordan : *Theorie der Abel'schen Functionen* (*).

BESSEL (A.). — *Sur les invariants des systèmes simples de formes binaires simultanées.* (22 p.; all.)

M. Hermite, dans ses Études sur la résolution de l'équation du cinquième degré, établit que tout invariant d'une forme binaire du cinquième degré est une fonction rationnelle et entière des trois invariants fondamentaux, et de l'invariant du dix-huitième degré qui est égal à la racine carrée d'une fonction entière de ces trois invariants. M. Bessel parvient à des théorèmes semblables pour les systèmes les plus simples de formes binaires simultanées.

NEUMANN (C.). — *Recherches géométriques sur le mouvement d'un corps solide.* (13 p.; all.)

Étant donnés deux triangles égaux dans l'espace, amener l'un de ces triangles à coïncider avec l'autre par un mouvement hélicoïdal, et construire l'axe de rotation.

NEUMANN (C.). — *Sur la théorie des déterminants fonctionnels.* (2 p.; all.)

HARBORDT (F.) — *Le système simultané d'une forme biquadratique et d'une forme quadratique binaires.* (15 p.; all.)

Étude des invariants et des covariants. Représentation typique.

BRILL (A.). — *Sur les équations différentielles de la théorie de la lumière.* (28 p.; all.)

Milieux isotropes. Équations différentielles en coordonnées curvilignes. Application d'un résultat d'intégration dû à Euler.

CLEBSCH (A.). — *De la représentation sur le plan des surfaces algébriques, et en particulier des surfaces du quatrième et du cinquième ordre.* (63 p.; all.)

Ce Mémoire est consacré à l'étude et à la théorie générale d'une

(*) Leipzig, Teubner, 1866. In-8, XIII-333 p. Prix : 2 Thlr. 16 Ngr.

classe de problèmes dont M. Clebsch s'est déjà beaucoup occupé (*), et dont il est impossible de méconnaître l'importance.

Imaginons une surface de degré N telle, que les coordonnées homogènes d'un de ses points soient des fonctions homogènes et entières de trois paramètres ξ_1, ξ_2, ξ_3, représentées par des équations de la forme

$$\begin{aligned}
\rho x_1 &= f_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3),\\
\rho x_2 &= f_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3),\\
\rho x_3 &= f_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3),\\
\rho x_4 &= f_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3),
\end{aligned}$$

où les quantités x_1, x_2, x_3, x_4 désignent les coordonnées homogènes d'un point, ρ un facteur indéterminé, et f_1, f_2, f_3, f_4 des fonctions homogènes du degré n. Supposons que l'on puisse, des équations précédentes, tirer les ξ comme fonctions rationnelles des x. Alors, si l'on considère ξ_1, ξ_2, ξ_3 comme les coordonnées homogènes d'un point dans un plan, *à un point du plan correspondra toujours un seul point de la surface, et réciproquement*. On dit alors que la surface est *eindeutig abgebildet,* qu'elle est représentée d'une manière unique sur le plan. L'expression allemande est assez difficile à traduire, mais la question n'en est pas moins fort intéressante, et M. Clebsch a rendu service à la science en en reprenant l'étude générale. Quand une surface est appliquée sur un plan, l'étude des courbes algébriques qu'elle contient est faite implicitement.

A côté de la théorie générale, le Mémoire contient des exemples nombreux : surfaces du troisième ordre, du quatrième ordre avec droite double, etc., etc.

Pour le troisième ordre, des considérations géométriques simples permettent de résoudre le problème. Considérons, en effet, une droite mobile, assujettie dans son mouvement à rencontrer deux droites de la surface. Elle coupera la surface en un troisième point x, et un plan quelconque en un point ξ. Un point ξ ou un point x suffisent à déterminer la droite. On voit donc qu'à un point ξ répondra un seul point x, et réciproquement. La surface est donc appliquée sur le plan, dans le sens que nous avons donné plus haut.

(*) *Journal de Crelle*, t. LXV, p. 359-380 : Die Geometrie auf den Flächen dritter Ordnung. — T. LXIX, p. 142-184 : Ueber die Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen. — *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXVII, p. 1238.

NEUMANN (C.). — *Note sur un écrit publié récemment et traitant de l'Électrodynamique.* (8 p.; all.)

Cet écrit, intitulé : *Die Principien der Electrodynamik* (*) est dû à M. Neumann, qui a publié un grand nombre d'excellents traités sur des points variés d'Analyse et de Physique mathématique. Les principes qui en forment la base ont été l'objet de quelques critiques, produites par M. Clausius dans les *Annales de Poggendorff* (t. CXXXV, p. 606). L'auteur défend son œuvre, et répond aux objections en exposant d'une manière très-claire les hypothèses fondamentales qu'il a faites pour expliquer les phénomènes électrodynamiques.

La formule employée par M. Neumann est la suivante, qui donne le potentiel w de deux masses électriques :

$$w = \frac{mm'}{r}\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right].$$

On voit que le potentiel ne dépend pas seulement de la situation respective des deux masses, comme dans la loi de Newton. La dérivée $\frac{dr}{dt}$ de la distance, par rapport au temps, fait intervenir ici la vitesse relative des deux masses électriques.

L'auteur a montré, dans son livre, qu'on pouvait expliquer cette formule hypothétique, en admettant que l'action électrique a besoin d'un certain temps pour se transmettre d'un point à un autre.

Dans tous les cas, l'expression donnée plus haut pour le potentiel permet, si on l'admet, d'expliquer tous les phénomènes d'induction et d'action électrodynamique (**).

(*) Tübingue, 1868.

(**) Ne pouvant pour le moment consacrer un article développé à cette intéressante question, nous nous contenterons d'indiquer les sources suivantes :

RIEMANN (B.) : « Ein Beitrag zur Electrodynamik ». (*Annales de Poggendorff*, t. CXXXI, 1867, p. 237.)

LORENZ : « Ueber die Identität der Schwingungen des Lichts mit den elektrischen Strömen ». (*Ibid.*, p. 243.)

CLAUSIUS : « Ueber die von Gauss angeregte neue Auffassung electrodynamischen Erscheinungen ». (*Ann. de Pogg.*, t. CXXXV, 1868, p. 606.)

WEBER (W.) : « Ueber einen einfachen Ausspruch des allgemeinen Grundgesetzes der elektrischen Wirkung ». (*Ann. de Pogg.*, t. CXXXVI, 1869, p. 485.)

NEUMANN (C.) : « Theoria nova phænomenis electricis applicanda. » (*Ann. di Matematica*, t. II, série II, p. 120.)

NEUMANN : « Ueber die oscillirende Entladung einer Franklin'schen Tafel ». (*Nachrichten von der K. Gesellschaft zu Göttingen*; 1869, janvier.)

BETTI (E.) : « Teorica delle forze che agiscono secundo la legge di Newton, c sua

Neumann (C.). — *Sur le mouvement de l'éther dans les cristaux.* (34 p.; all.)

Clebsch (A.) et Gordan (P.). — *Sur les formes biternaires avec des variables contragredientes.* (42 p.; all.)

Étude sur la théorie d'une espèce particulière de formes. Ces formes contiennent deux séries de variables, celles qui se transforment par une substitution linéaire, x_1, x_2, x_3, et celles qui se transforment en même temps par la substitution inverse, u_1, u_2, u_3. En d'autres termes, égalées à o, elles donneraient une relation entre les coordonnées homogènes d'un point et les coordonnées tangentielles d'une droite. De telles formes se rencontrent souvent comme *dérivées d'une forme fondamentale*, sous le nom de *covariants mixtes* ou de *concomitants* (mixtes). Les auteurs les considèrent ici comme *formes fondamentales*, et en commencent l'étude directe et détaillée.

Brill (A.). — *Note relative au nombre des modules d'une classe de fonctions algébriques.* (5 p.; all.)

Cette Note se rapporte à un des points les plus délicats de la théorie des fonctions abéliennes. Riemann avait donné une formule dont l'exactitude a été contestée par M. Cayley (*). M. Brill examine un cas particulier où la formule de Riemann et celle de M. Cayley doivent conduire à des résultats différents. La conclusion est en faveur de Riemann.

Müller (H.). — *De la géométrie des surfaces du second ordre.* (18 p.; all.)

Étude sur les courbes gauches du troisième ordre et sur leurs sécantes.

Jonquières (E. de). — *Sur les réseaux de courbes et de surfaces algébriques.* (8 p.; fr.)

Zeuthen (H. G.). — *Notes sur un système de coordonnées linéaires dans l'espace.* (23 p.; fr.)

Le système de coordonnées linéaires proposé par M. Zeuthen est

---

applicazione alla elettricità statica ». (*Il Nuovo Cimento*, t. XVIII, 1863, p. 385; t. XIX, 1863, p. 59, 77, 149, 357; t. XX, 1864, p. 19, 121. — « Sopra la Elettrodinamica ». (*Ibid.*, t. XXVII, 1867, p. 402.) *Voir* aussi *Nuovo Cimento*. (T. XXVII, mai et juin 1868.)

(*) *Voir* Clebsch und Gordan, *Theorie der Abel'schen Functionen* : Préface.

analogue à celui que M. Cayley a indiqué en 1860 (*), et dont il a fait aussi usage dans un Mémoire récent (**). Si l'on appelle *moment d'une droite par rapport à un axe,* le moment d'une force égale à l'unité et placée sur cette droite, les six coordonnées employées par M. Zeuthen sont les six moments d'une droite par rapport aux arêtes d'un tétraèdre. Entre ces six coordonnées doivent avoir lieu évidemment deux relations, puisqu'une droite se détermine seulement par quatre paramètres. L'une de ces deux relations est homogène, et très-simple, l'autre n'est pas homogène et prend une forme très-compliquée. L'auteur applique le nouveau système de coordonnées à l'étude des complexes linéaires et des surfaces complexes de Plücker. Il fait aussi remarquer que l'étude des complexes linéaires avait déjà été faite implicitement avant Plücker par M. Chasles. « On peut donc, dit-il, dans les tomes XVI (***) et LII (****) des *Comptes rendus*, puiser une discussion des complexes linéaires qui est antérieure à celle de M. Plücker. »

Reye (Th.). — *Génération géométrique des surfaces du troisième, du quatrième ordre, et en général d'un ordre quelconque, au moyen des réseaux de surfaces d'ordre inférieur.* (12 p.; all.)

M. Reye est connu des géomètres par plusieurs importants Mémoires de Géométrie et par un Traité complet intitulé : *Die Geometrie der Lage. Vorträge von Dr Theodor Reye* (*****).

Le Mémoire dont nous venons de transcrire le titre contient plusieurs propositions d'un grand intérêt pour la théorie des surfaces. Comme le fait remarquer l'auteur, la génération des figures au moyen de figures plus simples constitue un des moyens d'investigation les plus puissants de la Géométrie synthétique.

Pour les courbes, on sait depuis longtemps que, si l'on considère deux *faisceaux* de courbes se correspondant projectivement, et d'ordres p et q, ces deux faisceaux peuvent engendrer, par l'intersection des courbes qui les composent, toute courbe de l'ordre $p + q$. Ce théo-

---

(*) *Quart. Math. Journal*, t. III, p. 226.

(**) *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol. XI, part. II : On the six coordinates of a line.

(***) P. 1420-1432.

(****) P. 1094.

(*****) Hanovre, 1868, Carl Rümpler; en deux Parties. In-8°. Prix : 13 fr. 35 c.

il pourra coïncider avec A_1 (on aurait dans ce cas un polygone de degré n à la fois inscrit et circonscrit à la courbe), etc., etc. On peut encore mener d'un point pris sur la courbe une tangente quelconque, du nouveau point de contact une nouvelle tangente, etc. M. Durège fait l'étude de toutes ces questions dans le cas particulier où la courbe a un point double ou un point de rebroussement.

STURM (R.). — *Le problème de l'homographie, et son application aux surfaces du second ordre.* (42 p.; all.)

BELTRAMI (E.). — *Sur la théorie de la courbure des surfaces* (8 p.; all.)

Cet élégant article contient plusieurs expressions nouvelles de l courbure d'une surface et de la courbure géodésique.

JORDAN (C.). — *Sur les équations de la division des fonctions abéliennes.* (9 p.; fr.)

Extrait du *Traité des équations algébriques et des substitutions.* L'auteur arrive à d'importants résultats, dont voici l'énoncé : La résolution de l'équation qui donne la division des périodes dans les fonctions abéliennes à $2n$ périodes se ramène à celle d'une suite d'équations simples, qui auront toutes pour ordre un nombre premier (par suite seront abéliennes), sauf une seule, dont l'ordre est égal $\frac{(p^{2n}-1)p^{2n-1}\ldots(p^2-1)p}{2}$, ou au double de ce nombre si $p=2, n>$

KORNDÖRFER (G.). — *De la représentation sur le plan d'une surface du quatrième ordre, avec un ou plusieurs points singuliers* (*) (35 p.; all.)

MÜLLER (H.). — *Étude synthétique d'un faisceau de surfaces du second ordre.* (7 p.; all.)

CLEBSCH (A.). — *Remarques sur la géométrie des surfaces gauches du troisième ordre.* (3 p.; all.)

Classification simple et intuitive des courbes tracées sur ces surfaces.

(*) *Voir*, au sujet de ces problèmes, la Note que nous avons mise, p. 129, à la s d'un Mémoire de M. Clebsch.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

HOFFMANN (L.), Baumeister in Berlin, und NATANI (L.). — MATHEMATISCHES WÖRTERBUCH. *Alphabetische Zusammenstellung sämmtlicher in die mathematischen Wissenschaften gehörender Gegenstände, in erklärenden und beweisenden, synthetisch und analytisch bearbeiteten Abhandlungen.* — 7 Bde gr. 8; 1858-1867. Berlin, Verlag von Wiegandt und Hempel (*).

En raison du développement qu'ont pris de nos jours les sciences exactes, rien ne serait plus désirable qu'une bonne Encyclopédie mathématique contenant l'exposition par les meilleures méthodes des théories fondamentales, renvoyant aux auteurs spéciaux pour les sujets accessoires ou pour ceux qui exigeraient de trop longs développements, et fournissant sur toutes les parties des renseignements bibliographiques et historiques aussi complets que possible.

Il est vrai que la réalisation d'une aussi vaste entreprise dépasserait les forces d'un seul homme, et ne pourrait être menée à bonne fin que par une association de géomètres. Il existe cependant des Ouvrages qui, sans atteindre entièrement le but, n'en ont pas moins rendu de grands services. Celui de tous qui a le mieux représenté la science de son temps, l'ancien Dictionnaire de Klügel, avec les suites de Mollweide et de Grunert (**), est encore, à l'heure présente, un livre précieux à consulter au point de vue de l'histoire scientifique.

L'Ouvrage plus moderne que nous annonçons ici ne présente pas la même unité de plan que le précédent, le continuateur s'étant écarté, avec grande raison, des traces du premier auteur. En effet, la rédaction des quatre premiers volumes (A — P) est loin de justifier

---

(*) HOFFMANN (L.), architecte à Berlin, et NATANI (L.). — *Dictionnaire mathématique. Recueil alphabétique de toutes les matières relatives aux Sciences mathématiques, expliquées et démontrées dans des articles rédigés synthétiquement et analytiquement.* — Berlin, Wiegandt et Hempel. 1858-1867. — 7 vol. gr. in-8, imprimés sur deux colonnes. Prix : 30 Thlr.

(**) *Mathematisches Wörterbuch, oder Erklärung der Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden der Mathematik, mit den nöthigen Beweisen und literarischen Nachrichten begleitet, in alphabetischer Ordnung.* Von GEORG SIMON KLÜGEL, Prof. d. Math. u. Physik auf der Friedrichs-Universität zu Halle, u. s. w. Leipzig, Schwickert. In-8. — T. I-III (A-P), 1803-1808, par KLÜGEL. — T. IV (Q-S), 1823, par C.-BR. MOLLWEIDE. — T. V (T-Z), 1831, et *Suppléments*, t. I et II, 1833-1836, par J.-A. GRUNERT.

rème ne s'étend pas généralement aux surfaces, et l'on ne peut construire une surface d'ordre $p+q$ au moyen de faisceaux d'ordre p et q, que si la surface proposée contient en nombre infini des courbes $C^{p,q}$ (*), ce qui n'arrive pas généralement.

Pour parer à ces inconvénients, M. Reye construit les surfaces, non plus au moyen des lignes d'intersection de deux séries de surfaces, $C^{p,q}$, mais par des points (l, m, n) déterminés par l'intersection de trois séries de surfaces.

Si nous avons bien compris, par exemple, le mode de génération des surfaces du quatrième ordre, voici comment on pourrait l'exposer *analytiquement*.

Considérons deux réseaux du second degré

$$(a) \qquad \lambda F + \mu F_1 + \nu F_2 = 0,$$

$$(\alpha) \qquad \lambda' \Phi + \mu' \Phi_1 + \nu' \Phi_2 = 0,$$

et établissons entre les paramètres la relation

$$(1) \qquad \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = 0.$$

Quand les trois paramètres λ', μ', ν' resteront fixes, les paramètres λ, μ, ν *pourront varier en restant assujettis à la relation* (1), et les surfaces du réseau (a) passeront par la courbe dont les équations sont

$$(2) \qquad \frac{F}{\lambda'} = \frac{F_1}{\mu'} = \frac{F_2}{\nu'}.$$

On peut dire d'après cela qu'à une surface du réseau (α) correspond une courbe du réseau (a), et réciproquement. Si l'on cherche le lieu des intersections de la surface et de la courbe correspondante, il faut éliminer λ', μ', ν' entre les équations (α) et (2), et l'on obtient la surface du quatrième degré dont l'équation est

$$F\Phi + F_1\Phi_1 + F_2\Phi_2 = 0.$$

Cette surface est le lieu des points d'intersection d'une surface de l'un des réseaux et de la courbe qui lui correspond dans l'autre. Elle est donc construite par points et non par lignes.

(*) L'auteur emploie des notations qui abrégent beaucoup les raisonnements : F^p, F_1^p, F_2^p désignent des surfaces d'ordre p; $C^{p,q}$, $C_1^{p,q}$ expriment des courbes intersections de surfaces F^p, F^q; (l, m, n) sont les points d'intersection de F^l, F^m, F^n.

Des séries. (76 p.)

Théorie des mouvements vibratoires. (37 p.)

Statique. (36 p.)

Théorie du choc des corps. (27 p.)

Théorème de Sturm, avec extension aux racines complexes. (12 p.)

Théorie des substitutions linéaires (déterminants, formes binaires, etc.). (80 p.)

Trigonométrie. (46 p.)

Calcul des variations. (51 p.)

Théorie mathématique de la chaleur. (161 p.)

Calcul des probabilités. (25 p.)

Roues hydrauliques et turbines. (63 p.)

La partie typographique de cet Ouvrage laisse à désirer, principalement à cause de la disposition à deux colonnes que l'on avait adoptée pour ménager la place, et qui devient un embarras, dès que l'on a des formules un peu longues à inscrire. Les nombreuses figures sur fond noir, insérées dans le texte, sont nettement exécutées

J. Hoüel.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

ZEUTHEN (H.-G.). — Sur les singularités ordinaires d'une courbe gauche et d'une surface développable. — In-4, 43 p. *Annali di Matematica,* 2e série, t. III, p. 175-217, 1869-70.

Tous les géomètres connaissent la polémique qu'eut à soutenir Poncelet avec Gergonne au sujet de la belle et féconde théorie des polaires réciproques. Gergonne reconnut, dès le commencement, l'importance de la découverte, et, adoptant les idées de Poncelet, les développant sous une forme plus claire et plus élémentaire, il dégagea le premier, de la manière la plus nette, le célèbre principe de *dualité* ou de *réciprocité* que mettaient en évidence la théorie des *polaires réciproques* pour les figures planes et, pour les figures sphériques, la notion beaucoup plus ancienne des figures

Poncelet avait montré que la polaire réciproque d'une courbe d
second degré est, dans tous les cas, une courbe du second degré
Trompé par l'analogie, Gergonne étendit ce théorème aux courbe
de degré supérieur et affirma qu'une courbe de degré n a pour polair
réciproque une courbe de même degré. C'était admettre implicite
ment que, d'un point, on ne peut mener à une courbe qu'un nomb
de tangentes égal à son degré. Gergonne énonça cette propositio
avec sa clarté habituelle, notamment, si nos souvenirs sont bien pr
cis, dans son article sur les lois générales qui régissent les surfac
courbes.

Plusieurs années auparavant, dans un travail dont Gergon
n'avait sans doute aucun souvenir (t. VIII des *Annales*), Poncel
avait déjà établi une proposition contradictoire avec la précédente,
montré qu'on peut, en général, mener, à une courbe de degré
$n(n-1)$ tangentes passant par un point. Gergonne aurait pu co
tester l'exactitude de ce résultat. A cette époque, on n'avait q
des idées très-imparfaites sur le théorème de Bezout. On savait bi
que deux courbes quelconques des degrés m et n se coupent en g
néral en mn points, mais on n'avait pas encore acquis la notion d
solutions *infinies*, et l'on ne regardait le nombre mn, donné par
théorème de Bezout, que comme un maximum au-dessous duqu
pouvait rester, dans certains cas, le nombre des solutions commun
Or les deux courbes considérées par Poncelet, et dont les points d'i
tersection étaient les points de contact cherchés, n'étaient pas ind
pendantes l'une de l'autre. C'est à peu près ce que dit Gergon
mais, reconnaissant que sa proposition sur le nombre des tangen
n'était pas justifiée, il corrigea ses théorèmes à double colonne,
introduisant une idée très-importante, celle de *classe* d'une courb

Cette notion de la *classe* est restée dans la science, et nous croy
inutile de la définir à nos lecteurs. Le degré d'une courbe est ég
la classe de sa polaire réciproque. Toute courbe d'une classe égal
son degré a pour polaire réciproque une courbe de même degré
classe. C'est ce qui explique le théorème relatif aux courbes
second degré, qui sont de la seconde classe.

Mais ici se présentait une difficulté nouvelle, dont la solution co
plète devait demander bien des efforts, mais aussi amener une lon
suite de belles et importantes découvertes.

Soient une courbe de degré n et sa polaire réciproque de degré

On devrait avoir, d'après la proposition de Poncelet,

$$n = N(N-1),$$
$$N = n(n-1).$$

Ces deux équations sont évidemment incompatibles.

On pouvait sans doute expliquer d'une manière vague ce paradoxe en faisant remarquer que, si la courbe proposée est la courbe la plus générale parmi celles de son degré, n, il n'en est plus de même de la polaire réciproque; celle-ci ne contient pas, dans son équation, le nombre de coefficients indépendants que comporte l'équation générale du $N^{ième}$ degré, c'est une courbe très-particulière parmi celles de ce degré; il n'y a donc rien d'étonnant à ce que la *classe* de cette courbe subisse une grande réduction.

Poncelet ne se contenta pas heureusement de cette explication générale, et, dans le tome IV du *Journal de Crelle,* il donna quelques principes qui devaient mettre sur la voie d'une explication définitive.

Dans le *Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques* (*Journal de Crelle,* t. IV) se trouvent énoncés deux résultats importants :

Tout point double abaisse la classe d'une courbe de deux unités;

A un point d'inflexion dans une courbe correspond un point de rebroussement dans la polaire.

Il n'y a que peu de choses à ajouter à ces deux principes pour lever la difficulté qui préoccupait Poncelet; pourtant, plusieurs années après, cet illustre géomètre, dans l'*Analyse des transversales* (*Journal de Crelle*, t. VIII, p. 391), n'avait rien ajouté d'essentiel, et il ne revient sur la question que pour corriger une erreur qu'il avait commise sur les points multiples d'ordre supérieur à 2. Il montre qu'un point multiple d'ordre p abaisse la classe de $p(p-1)$ unités, et non de p unités, comme il l'avait affirmé dans son précédent Mémoire; mais aucun pas nouveau n'est fait vers la solution définitive du problème. Poncelet montre cependant qu'un point de rebroussement (dont il n'indique pas l'ordre) abaisse la classe d'au moins trois unités.

C'est à Plücker, déjà connu à cette époque par de belles recherches de Géométrie, qu'il était réservé de donner, en s'appuyant toutefois sur les théorèmes de Poncelet, la solution la plus complète et la plus satisfaisante de la question.

Dans un Mémoire de quelques pages, inséré au *Journal de Crell*
(t. XII, p. 105), Plücker ajoute au théorème de Poncelet sur l
points doubles le suivant :

Tout point *double de rebroussement* abaisse la classe de trois unités

D'après cela, dit-il, étant donnée la courbe la plus générale du de
gré m, cette courbe a un nombre de points d'inflexion $M = 3m(m-2)$
et un nombre de tangentes doubles $N = \frac{1}{2}m(m-2)(m^2-9)$.

La courbe polaire réciproque, du degré $m(m-1)$ aura don
M points de rebroussement correspondant aux M points d'inflexio
et N points doubles correspondant aux tangentes doubles de la pr
posée. Sa classe qui devait être

$$\frac{1}{2}m(m-1)\left[\frac{1}{2}m(m-1)-1\right],$$

se réduit donc de $2N+3M$ unités et redescend ainsi à m.

Dans le cas de $m=3$, la réduction provient des points d'inflexi
de la proposée, qui sont au nombre de 9.

Dans le cas de $m=4$, elle provient des 24 points d'inflexion
des 28 tangentes doubles de la courbe du quatrième degré. Et ai
de suite.

Plücker n'indique pas ici comment il avait trouvé le nombre N d
tangentes doubles, et le nombre M des points d'inflexion. Mais l
publications postérieures nous permettent de combler cette lacu
Il avait déterminé, par une analyse directe et rigoureuse, le nombre
des points d'inflexion ; quant au nombre N des tangentes doubles
l'avait déduit de l'explication même du paradoxe signalé par Po
celet, en écrivant que $2N+3M$ est égal à la réduction conn
a priori

$$\frac{1}{2}m(m-1)\left[\frac{1}{2}m(m-1)-1\right]-m$$

de la classe de la polaire réciproque.

C'est Jacobi qui a donné des démonstrations directes, à la fois p
le nombre des tangentes doubles et celui des points d'inflexion, d
un beau Mémoire du *Journal de Crelle* (t. XL, *Beweis des Satzes, d*
eine Curve n Grades im Allgemeinen $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ *Doppelt*

genten hat). Jacobi, toutefois, dans le préambule de son Mémoire, nous paraît avoir été injuste pour Plücker. Certainement Poncelet avait, avec une grande sagacité, reconnu la réduction de la classe, due aux points multiples, mais il n'avait pas su faire disparaître les difficultés moins grandes qui restaient à surmonter, et, malgré tous ses efforts, il n'avait pu, comme il le reconnaissait lui-même (*), donner une solution complète de la question que, le premier, il avait posée aux géomètres.

C'est dans la *Théorie des courbes algébriques* (**) publiée en 1839, à Bonn, que Plücker a réuni (p. 209) tous les résultats qu'il avait trouvés sur les points singuliers et donné pour la première fois d'une manière complète les formules qui lient entre elles les singularités. Soient

n l'ordre d'une courbe ou la classe de sa polaire;
m sa classe ou l'ordre de la polaire;
x le nombre de ses points doubles, ou des tangentes doubles de la polaire;
y le nombre de ses points de rebroussement, ou des points d'inflexion de la polaire;
u le nombre de ses tangentes doubles, ou des points doubles de la polaire;
v le nombre de ses points d'inflexion, ou des points de rebroussement de la polaire.

Les singularités que nous venons de signaler sont celles qu'on appelle *ordinaires*, parce qu'elles se trouvent toujours sur une courbe ou sur sa polaire. Cela posé, on aura, entre les nombres qui précèdent, les relations suivantes, dont *trois* seulement sont distinctes :

$$m = n(n-1) - 2x - 3y, \tag{1}$$

$$n = m(m-1) - 2u - 3v, \tag{2}$$

$$v = 3n(n-2) - 6x - 8y, \tag{3}$$

$$y = 3m(m-2) - 6u - 8v, \tag{4}$$

(*) Dans son *Mémoire sur la Théorie des Polaires réciproques* déjà cité.

(**) PLÜCKER (Dr Julius) : *Theorie der algebraischen Curven gegründet auf eine neue Behandlungsweise der analytischen Geometrie*. Mit einer Tafel. Bonn, Adolph Marcus, 1839.

$$(5)\qquad u = \frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9) - (2x+3y)[n(n-1)-6] + 2x(x-1) + \frac{9}{2}y(y-1) + 6xy,$$

$$(6)\qquad x = \frac{1}{2}m(m-2)(m^2-9) - (2u+3v)[m(m-1)-6] + 2u(u-1) + \frac{9}{2}v(v-1) + 6uv.$$

Ces relations présentent bien, prises deux à deux, la symétrie qu'exige le principe de dualité et leur ensemble n'est pas altéré, si l'on échange les singularités de la courbe avec celles de la polaire. Plücker les démontre toutes directement, et trouve ainsi dans leur accord une vérification de ses raisonnements. En les combinant, on obtient les deux relations simples

$$(7)\qquad m - n = \frac{1}{3}(v - y),$$

$$(8)\qquad (m-n)(m+n-9) = 2(u-x), \text{ etc., etc.}$$

Elles se déduisent toutes, d'ailleurs, des trois premières. Enfin on peut les retrouver très-simplement en se rappelant les deux principes suivants, dont elles sont la traduction :

1° Tout point double abaisse la classe de 2 unités, et tout point double de rebroussement de 3 unités;

2° Tout point double diminue de 6, et tout point de rebroussement de 8 unités, le nombre des points d'inflexion, qui en général est égal à $3n(n-2)$.

Les formules qui précèdent constituaient une découverte très-importante, elles donnaient un exemple de relations numériques entre des nombres qu'on aurait pu croire indépendants. C'était là un fait tout nouveau en Analyse; ces relations ouvraient la voie à tout un ordre de recherches importantes dans lequel Plücker a été suivi et imité par un grand nombre de géomètres.

Pourtant, on fit d'abord quelque difficulté d'attribuer ces formules à Plücker; Steiner les appelait les *formules connues* (*) : il y avait là une injustice, réparée promptement par les savants qui ont donné

(*) Voir, par exemple, un Mémoire inséré au tome XVIII du *Journal de M. Liouville*, p. [illegible], où Steiner donne les formules sans citer Plücker.

aux relations précédentes le nom de celui qui les avait découvertes.

Avant de quitter les courbes planes, rappelons que les formules précédentes ne s'appliquent pas aux singularités dites élevées, points triples, tangentes multiples, etc., etc. C'est M. Cayley qui, le premier, dans un Mémoire inséré au *Quarterly Journal*, t. VII, a résolu cette difficile question et montré que toute singularité élevée peut s'évaluer au moyen d'un certain nombre de singularités ordinaires (*). Ainsi, un point multiple pourra, dans les formules, se remplacer, par exemple, par seize points doubles, un point d'inflexion, cinq points de rebroussement, six tangentes doubles, etc. On pourra consulter aussi, à ce sujet, un Mémoire de M. de la Gournerie dans le *Journal de M. Liouville*, décembre 1869 et janvier 1870.

C'est encore à M. Cayley qu'était réservé l'honneur d'étendre aux courbes gauches les formules de Plücker. Les principaux résultats obtenus par ce savant se trouvent consignés au tome X du *Journal de M. Liouville*, p. 245. Les singularités y sont définies avec beaucoup de clarté, et, au risque de paraître trop long, nous essayerons d'en donner une idée à nos lecteurs.

Une courbe gauche, étant considérée dans l'espace, les plans osculateurs de la courbe enveloppent une surface développable, dont les génératrices rectilignes sont les tangentes à la courbe. Cette surface développable et la courbe forment ce que M. Cayley appelle *un système simple*. Les points de la courbe sont les *points* du système; les génératrices de la surface, tangentes de la courbe, sont les *lignes* du système; enfin les plans tangents de la surface, plans osculateurs de la courbe, sont les *plans* du système.

On appelle *ligne par deux points* une ligne passant par deux points non consécutifs du système; *ligne par deux plans* une ligne située dans deux plans tangents du système. Les expressions *point dans deux lignes* (du système) et *plan par deux lignes* s'expliquent de la même manière.

Les *lignes par deux points* sont, on le voit, des sécantes doubles de la courbe. Si un observateur avait l'œil placé en un de leurs points, deux branches de courbe paraîtraient se couper dans la direction de la ligne. C'est ce qu'on appelle un *point double apparent*. Ces lignes

(*) *Voir aussi Journal de M. Borchardt*, une *Note sur les singularités supérieures des courbes planes*; t. LXIV, p. 369.

sont aussi les arêtes doubles des cônes ayant leur sommet en un d
leurs points et contenant la courbe.

La *ligne dans deux plans* est l'intersection de deux plans tangent
à la surface développable; c'est donc une tangente double de la sur
face développable.

Le *point dans deux lignes* se trouve sur deux génératrices de la dé
veloppable; il est donc sur la *ligne double* de cette surface.

Enfin, le *plan par deux lignes* contenant deux tangentes à la courb
est un plan tangent double pour les cônes passant par la courbe
ayant leur sommet dans ce plan.

Désignons par

m l'ordre de la courbe, c'est-à-dire le nombre de points qu'elle a
dans un plan quelconque;

r le nombre de lignes du système rencontrant une droite, c'est-à-
dire l'ordre de la surface développable;

n le nombre de plans du système passant par un point, c'est-à-
dire la classe de la surface développable.

Voici les singularités considérées par M. Cayley :

Quand quatre points consécutifs du système, ou trois lignes consé
cutives, sont dans un même plan, il y a deux plans consécutifs iden
tiques. On dit qu'il y a un *plan stationnaire*. Soit

α le nombre des plans stationnaires.

Cette singularité corrrespond à l'inflexion dans les courbes planes.

Si quatre plans consécutifs, ou trois lignes consécutives, se ren
contrent en un même point, c'est-à-dire si deux points consécuti
deviennent identiques, on dit qu'il y a un *point stationnaire*. Cet
singularité correspond au rebroussement. Soit

β le nombre des points stationnaires.

Les autres singularités correspondent aux points doubles et a
tangentes doubles. Leur définition était indiquée par les métho
de démonstration de M. Cayley. Soient :

g le nombre des *lignes en deux plans* qui passent en un poi
c'est-à-dire des tangentes doubles qu'on peut mener du po
à la surface développable;

h le nombre des *lignes par deux plans* passant en un point, c'est
dire le nombre des *points doubles apparents* pour un obser
teur placé d'une manière quelconque;

x le nombre de *points en deux lignes* contenus dans un plan, c'est-à-dire l'*ordre de la ligne double* de la surface développable;

y le nombre de plans par deux lignes passant en un point, c'est-à-dire de plans tangents doubles du cône contenant la courbe et ayant son sommet en ce point.

Il suffit, pour obtenir les relations entre les neuf éléments que nous avons successivement définis, d'appliquer les formules de Plücker à une section plane de la développable et à un cône contenant la courbe. On trouve ainsi :

$$n = r(r-1) - 2x - 3m,$$
$$r = n(n-1) - 2g - 3\alpha,$$
$$\alpha = 3r(r-2) - 6x - 8m,$$
$$m = 3n(n-2) - 6g - 8\alpha,$$

et

$$r = m(m-1) - 2h - 3\beta,$$
$$m = r(r-1) - 2y - 3n,$$
$$n = 3m(m-2) - 6h - 8\beta,$$
$$\beta = 3r(r-2) - 6y - 8n.$$

Par exemple, pour la cubique gauche, on a le système suivant de valeurs :

m	n	r	α	β	g	h	x	y
3	3	4	0	0	1	1	0	0.

Ces formules si importantes de Plücker et de M. Cayley ont déjà rendu de grands services. Elles ont permis d'abord de diviser les courbes en *genres*, d'après la nature de leur *déficient*, chacun des genres répondant à une classe de fonctions abéliennes, comme l'ont montré Riemann et M. Clebsch. Il y a là un champ étendu de recherches qui a déjà fourni une ample moisson de belles découvertes.

Les recherches de M. Clebsch sont exposées dans le *Journal de M. Borchardt*, t. LXIV, p. 98. Comme ces recherches complètent celles de Plücker, et offrent dans un grand nombre de questions un secours tout à fait inattendu, il est bon que nous en disions ici quelques mots.

Dans un Mémoire antérieur (*), M. Clebsch avait déjà trouvé d'importantes relations entre la théorie des courbes algébriques et celle des fonctions abéliennes. D'après ces travaux, les courbes algébriques se divisent non plus d'après leur ordre, ni d'après leur classe, mais d'après *la classe de fonctions abéliennes* dont dépend leur théorie. C'est le nombre

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - x - y = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - u - v,$$

appelé aussi *déficient*, qui détermine le *genre* de la courbe.

Par exemple, les courbes du troisième ordre les plus générales, les courbes du quatrième ordre à deux points doubles, du cinquième ordre à cinq points doubles, etc., etc., appartiennent au même genre. On a pour toutes $p = 1$. Leur théorie dépend d'ailleurs des fonctions elliptiques, comme l'a montré M. Bertrand dans son *Traité de Calcul intégral*, p. 612.

Le *genre* dépend, on le voit, à la fois du degré de la courbe et du nombre des points singuliers. Inversement, si le genre était connu *a priori*, on aurait une équation nouvelle entre les singularités, et il suffirait de connaître deux d'entre elles pour déterminer toutes les autres. Ainsi, toutes les fois qu'on connaîtra le genre d'une courbe, il ne sera plus nécessaire de connaître trois singularités pour avoir toutes les autres : deux suffiront.

Il y a précisément un théorème très-important dû à M. Clebsch, et qui permet, dans un grand nombre de cas, d'assigner le genre de la courbe : Toutes les fois que deux courbes se correspondent de manière qu'à un point de l'une corresponde un seul point ou une seule tangente de l'autre, les deux courbes seront du même genre; pour elles p prendra la même valeur.

Prenons, par exemple, une courbe et sa développée : d'après le théorème précédent, ce sont deux courbes du même déficient. Or on trouve facilement que la classe de la développée m' est égale à

$$n^2 - 2x - 3y,$$

et que le nombre u' de ses points d'inflexion est égal au nombre y des points de rebroussement de la proposée. Cela suffit pour la détermination de toutes les autres singularités.

(*) *Journal de M. Borchardt*, t. LXIII, p. 189.

Pour les courbes gauches, il y a des théorèmes tout pareils; le genre se détermine d'après la formule

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - h - \beta = \frac{(r-1)(r-2)}{2} - y - n$$
$$= \frac{(r-1)(r-2)}{2} - x - m = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - g - \alpha.$$

C'est encore grâce aux formules de M. Cayley que M. Salmon a pu édifier une théorie et une classification très-rationnelle des courbes gauches algébriques. Mais pour ces détails nous renverrons aux Ouvrages si clairs du savant auteur.

Les recherches et les résultats qui précèdent présentent un ensemble très-satisfaisant pour les amis de la Géométrie; mais les progrès de la science réclamaient une étude plus approfondie. Cette étude a été commencée par les travaux de MM. Cayley, Salmon, Spottiswoode et de quelques autres géomètres. Dans son intéressant Mémoire, M. Zeuthen, de Copenhague, jeune géomètre déjà bien connu par plusieurs travaux, a beaucoup ajouté à ce que l'on savait déjà sur la question; il a repris l'étude des singularités ordinaires, mais il en a distingué un plus grand nombre que M. Cayley.

Il est, en effet, bien facile de voir que les singularités d'une courbe gauche sont en nombre *illimité*. Considérons par exemple la surface développable formée par les tangentes de cette courbe gauche. Cette surface a, en général, une ligne double, dont nous avons désigné l'ordre par x. Voilà donc une nouvelle courbe dérivée de la première, dont on peut rechercher toutes les singularités. Sa classe, par exemple, a déjà été donnée par M. Salmon (*Geometry of three dimensions*, 2[e] édit., p. 460). De cette deuxième courbe, on peut faire dériver une troisième, et ainsi de suite. De même, considérons la surface enveloppée par les plans tangents doubles de la courbe primitive, on aura un nouveau système dérivé. Enfin, les droites, rencontrant *trois* fois la courbe proposée, forment une surface gauche dont un certain nombre de génératrices rencontrent quatre fois la courbe, etc., etc.

Le Mémoire dont nous rendons compte contient les plus intéressants et les plus importants des nombres que l'on doit déterminer. M. Zeuthen a d'ailleurs égard à trois singularités qui n'avaient pas été introduites par M. Cayley. Ce sont : 1° les *points doubles réels*, dont il désigne le nombre par H; 2° les *plans biosculateurs* (plans tan-

gents doubles de la développable), dont il désigne le nombre par G, et 3° les *tangentes d'inflexion* (droites passant par trois points consécutifs de la courbe, ou situées sur trois plans consécutifs de la développable), dont le nombre est supposé égal à v. De telles singularités n'existent pas évidemment dans toutes les courbes, ni dans leurs polaires. Par exemple, un plan osculateur ne dépendant que d'un paramètre, il est impossible, en général, que le plan reste le même pour deux valeurs différentes du paramètre. Les singularités de cette nature sont distinguées par la dénomination d'*extraordinaires* ou *élevées*.

En tenant compte de ces singularités, les formules de M. Cayley doivent être remplacées par les suivantes :

$$r = m(m-1) - 2h - 2H - 3\beta,$$
$$m = r(r-1) - 2y - 3n - 3v,$$
$$n + v - \beta = 3(r-m),$$

et

$$r = n(n-1) - 2g - 2G - 3\alpha,$$
$$n = r(r-1) - 2x - 3m - 3v,$$
$$m + v - \alpha = 3(r-n).$$

Le premier point traité par M. Zeuthen est le suivant : les formules de M. Cayley déterminent, par exemple, les singularités du cône passant par la courbe et ayant son sommet en un *point quelconque* de l'espace. Mais si le sommet du cône se trouve sur une tangente de la courbe, sur la courbe, à un point double, stationnaire, sur une tangente d'inflexion, en un point d'inflexion, et, comme l'a fait du reste remarquer M. Cayley, les formules ne s'appliquent plus, de nouvelles recherches sont nécessaires. De même, pour une section plane de la surface développable; si le plan de la section contient une tangente simple ou une tangente d'inflexion, s'il est tangent à la développable, les nombres déterminés pour le cas général doivent être modifiés. Deux tableaux très-complets, placés au commencement du Mémoire, indiquent toutes ces modifications.

Voici maintenant quelques-uns des nombres déterminés par M. Zeuthen :

Classe de la courbe double de la développable

$$2g + r(n-2) - n(n-1).$$

Nombre des droites qui rencontrent deux droites fixes et deux fois la courbe proposée

$$h + \frac{m(m-1)}{2};$$

Nombre des tangentes doubles à la développable qui rencontrent deux droites fixes

$$g + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Ordre de la surface gauche formée par les droites qui rencontrent trois fois la courbe

$$(m-2)\left[h - \frac{m(m-1)}{6}\right].$$

Nombre des tangentes de la courbe qui la rencontrent encore une fois

$$r(m-4) + 4h - 2m(m-3) - 3v.$$

La méthode de M. Zeuthen est fondée sur le beau principe de correspondance de M. Chasles. La grande difficulté que rencontre ici l'application de ce principe consiste dans le degré de multiplicité des solutions. M. Zeuthen est, on le sait, très-habile dans ce genre de recherches; il a soin d'ailleurs de contrôler ses résultats en variant les démonstrations. Ses recherches paraissent donc, quelque délicate que soit la méthode, de nature à inspirer une entière confiance aux géomètres.

Nous avons essayé, dans cet article, de donner à nos lecteurs, une idée des progrès accomplis depuis cinquante ans, dans la théorie de l'élimination et en un point très-important de la théorie des courbes de degré supérieur. Nous ne dirons rien, pour aujourd'hui, des questions toutes semblables qu'on peut se proposer pour les surfaces, et qui sont bien près d'être résolues.

Nous nous estimerions heureux si les lignes qui précèdent attiraient l'attention de quelques géomètres sur ces questions trop négligées en France, où l'on est porté à considérer la Géométrie synthétique et analytique comme une science d'ordre inférieur. A notre humble avis, c'est aux progrès mêmes de cette Géométrie que sont subordonnés les développements ultérieurs du véritable Calcul infinitésimal, c'est-à-dire de la théorie des différentielles algébriques,

des fonctions elliptiques et abéliennes. Aux branches nouvelles de la science, créées depuis le commencement du siècle, doit correspondre aussi un enseignement nouveau, réclamé par les progrès accomplis et venant se placer à côté de l'ancien, sans lui nuire et sans en diminuer la valeur. Nos élèves, préparés par les études sérieuses des Mathématiques spéciales, suivraient avec goût et avec fruit des études dont ils n'auraient plus à surmonter les premières difficultés.

G. D.

GIORNALE DI MATEMATICHE, ad uso degli studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del professore G. BATTAGLINI (*).

T. VII; 1869

D'OVIDIO (E.). — *Nouvelle exposition de la théorie générale des courbes du deuxième ordre en coordonnées trilinéaires.* (16 p.; ital.)
Suite d'un article précédent.

JADANZA (N.). — *Sur les progressions à deux et à trois différences.*
Suite d'un article précédent. (7 p.; ital.)

JADANZA (N.). — *Sur les progressions.* (14 p.)
Progressions à *n* différences, etc.

SARDI (C.). — *Théorèmes d'Arithmétique.* (4 p.; ital.)
Théorèmes relatifs aux fractions décimales périodiques.

JANNI (V.). — *Décomposition d'une équation du quatrième degré entre deux variables en deux facteurs rationnels du deuxième degré.* (ital.)

VECCHIO (A.). — *Sur les équations transcendantes.*
Équations $\cosh ml . \cos ml = \pm 1$.

VECCHIO (A.). — *Sur les proportions et les progressions.* (7 p.; ital.)

(*) *Journal de Mathématiques à l'usage des étudiants des Universités italiennes*, publié sous la direction du professeur JOS. BATTAGLINI. Naples, B. Pellerano, éditeur. Paraissant tous les deux mois par fascicules de 4 feuilles, in-4°. Fondé en 1863. Prix 14 fr. pour l'Italie, 20 fr. pour la France. (En italien et en français.)

BATTAGLINI (G.). — *Sur les systèmes de droites du second degré.* 6 p.; ital.)

Suite d'un autre article. Ce travail se rapporte aux belles études Plücker sur les complexes, dont nous avons rendu dernièrement un compte détaillé.

TRUDI (N.). — *Sur la détermination des constantes arbitraires dans intégrales des équations différentielles et aux différences finies.* 11 p.; ital.)

Sur une erreur commise par Lagrange dans un Mémoire de 1775 t. IV, p. 151, des OEuvres complètes publiées par M. Serret), et reconnue par lui en 1792.

IUNG (G.) et ARMENANTE (A.). — *Sur une équation du huitième degré.* (7 p.; ital.)

BERTINI (E.). — *Nouvelle démonstration de ce théorème : deux courbes corrélatives projectivement sont du même genre.* (ital.)

D'OVIDIO (E.). — *Note sur deux théorèmes de M. Mannheim.* (ital.)

SARDI (C.). — *Sur les sommes des diviseurs des nombres.* (ital.)

BESSO (D.). — *De l'idée de fonction dans l'enseignement de la Géométrie élémentaire.* (5 p.; ital.)

GROSSO (R. DEL). — *Mémoire sur l'attraction des sphéroïdes.* (2 art., 32 p.; ital.)

BUSTELLI (A.-M.). — *Détermination analytique des centres de pression des surfaces immergées dans un liquide homogène pesant.* (2 art., 16 p.; ital.)

ZANNOTTI (M.). — *Leçons sur la Thermodynamique.* (2 art., 32 p.; ital.)

CALZOLARI (L.). — *Nouvelle solution générale en nombres rationnels de l'équation* $W^2 = a + bv + cv^2$. (16 p.; ital.)

BESSO (D.). — *Sur l'intégrale* $\int_0^\beta \frac{\sin^n x}{x}\,dx$. (ital.)

ARMENANTE (A.) et IUNG (G.). — *Résumé des leçons complémen-*

taires faites à l'Institut Technique supérieur de Milan. (11 p.; ital.)

Cours de MM. Brioschi, Cremona et Casorati. Fonctions elliptiques. Théories de Clebsch et Gordan, et de Riemann sur les fonctions abéliennes.

IUNG (G.) et ARMENANTE (A.). — *Sur les transformations birationnelles ou univoques* (eindeutigen), *et sur les courbes normales et sous-normales du genre p.* (19 p.; ital.)

SARDI (C.). — *Sur quelques séries; applications à l'arithmétique.* (56 p.; ital.)

CALZOLARI (L.). — *Solution générale de l'équation*

$$y^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2.$$

(4 p.; ital.)

CALZOLARI (L.) — *Recherche des valeurs rationnelles de v qui rendent le polynôme $a + bv + cv^2 + dv^3 + ev^4$ un carré parfait.* (33 p.; ital.)

CASSANI (P.). — *Étude sur la conique des neuf points et des neuf droites.* (5 p.; ital.)

GRANDI (A.). — *Sur une formule connue qui peut se déduire d'un théorème de Cauchy.* (ital.)

VALERIANI (V.). — *Du plan, sa définition. Axiome du plan élevé au rang de théorème.* (ital.)

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE SCIENCES, publiés par MM. les Secrétaires perpétuels (*).

N° 11. Séance du 14 mars 1870.

M. FAYE. — *Sur l'observation photographique des passages de Vénus et sur un appareil de M. Laussedat.*

M. PHILLIPS. — *Note sur les changements d'état d'un mélange d'une vapeur saturée et de son liquide, suivant une ligne adiabatique.*

N° 12. Séance du 21 mars 1870.

M. MOUTIER. — *Sur l'angle de raccordement d'un liquide avec une paroi solide.*

(*) Voir *Bulletin*, p. 63.

M. Chasles fait connaître un *Théorème concernant la théorie des surfaces de M. Spottiswoode.*

« On sait que, par un point d'une surface, on peut mener deux tangentes qui ont avec elle un contact du deuxième ordre, c'est-à-dire trois points consécutifs communs avec la surface. C'est un des beaux théorèmes dus à M. Dupin, et qui se retrouve, depuis lors, dans toutes les recherches des géomètres. Les deux tangentes dont il s'agit sont les asymptotes de l'indicatrice de la surface. Passant de la ligne droite aux sections coniques, M. Spottiswoode s'est proposé de rechercher combien on peut tracer sur une surface, en chaque point, de coniques ayant un contact du cinquième ordre, c'est-à-dire six points communs avec la surface. Il a trouvé que ces coniques sont au nombre de dix, réelles ou imaginaires. »

Nous pensons que M. Spottiswoode a voulu parler des contacts du sixième ordre, c'est-à-dire des coniques ayant sept points communs avec la surface. Menons, en effet, par un point A d'une surface un plan quelconque. Nous pourrons construire, dans ce plan, une conique ayant en A avec la surface cinq points communs, c'est-à-dire un contact du quatrième ordre. Pour que l'ordre du contact s'élève d'une unité, il suffit que les coefficients angulaires du plan satisfassent à une relation, c'est-à-dire que le plan enveloppe un cône. Mais, si l'on veut que le contact soit du sixième ordre, on trouve alors deux relations qui doivent déterminer un nombre limité de plans (*).

N° 13. Séance du 28 mars 1870.

M. Darboux. — *Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre.*

M. Tisserand. — *Sur un point du calcul des différences.*

« Dans un de ses Mémoires, Lagrange a montré comment, dans certains cas, d'une relation entre les dérivées d'une fonction et ses différences, on peut déduire aisément une relation nouvelle entre les intégrales successives de la fonction, et ses différences et intégrales finies. Le but de cette Note est d'en montrer des exemples intéressants, à propos des formules de quadrature en usage parmi les astronomes. »

(*) Voir *Comptes rendus*, t. LXII, 1866, p. 590.

Nous ajouterons à cette courte explication une remarque. C'est que, dans les cas particuliers fort importants signalés par M. Tisserand, on peut employer des procédés de démonstration à l'abri des reproches qu'on pourrait adresser justement à l'Analyse de Lagrange (*).

N° 14. Séance du 4 avril 1870.

M. DE SAINT-VENANT. — *Recherche d'une deuxième approximation dans le calcul rationnel de la poussée exercée contre un mur dont la face postérieure a une inclinaison quelconque, par des terres non cohérentes dont la surface supérieure s'élève en un talus plan quelconque à partir du haut de cette face du mur.*

M. OLTRAMARE. — *Sur l'existence d'une loi de répartition analogue à la loi de Bode (ou de Titius), pour chacun des systèmes de satellites de Jupiter, de Saturne et d'Uranus.*

M. R. WOLF. — *Études sur la fréquence des taches du Soleil et leur relation avec la variation de la déclinaison magnétique.*

M. ZEUTHEN. — *Sur les points fondamentaux de deux surfaces, dont les points se correspondent un à un.*

Cette Note de M. Zeuthen se rapporte à un des points les plus importants et les plus récemment découverts de la théorie des surfaces algébriques. Cette question des points fondamentaux mériterait plus de quelques lignes, et nous aurons l'occasion d'y revenir. Le travail de M. Zeuthen est, croyons-nous, avec ceux de M. Cremona, un des premiers essais d'étude géométrique de la nouvelle théorie.

M. DARBOUX. — *Sur la théorie des équations aux dérivées partielles.*

M. E. DIDON. — *Sur un mode d'approximation des fonctions de plusieurs variables.*

Dans la théorie des erreurs on est conduit à résoudre le problème suivant :

Étant donnée une fonction $f(x)$, trouver, parmi tous les polynômes P de degré m, celui qui, entre les limites -1 et $+1$, s'approche le plus de la fonction donnée, c'est-à-dire qui rend minim

(*) Voir *Œuvres complètes*, publiées par M. SERRET. t. III, p. 44.

l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} [f(x) - P]^2 dx.$$

On sait que le polynôme P qui fournit la solution de ce problème est représenté par la partie du développement de $f(x)$ suivant les fonctions X_n de Legendre qui s'arrête au terme X_{m+1}. M. Didon s'est proposé, pour les fonctions à plusieurs variables, un problème analogue qu'on peut énoncer ainsi :

Étant donnée une fonction $f(x, y, z, \ldots)$, trouver, parmi tous les polynômes P de degré m, celui qui rend minimum l'intégrale

$$\int\int\int [f(x, y, z, \ldots) - P]^2 dx\, dy\, dz \ldots,$$

dans laquelle les variables sont assujetties à la condition

$$x^2 + y^2 + z^2 + \ldots \leqq 1.$$

M. Boussinesq. — *Intégration de l'équation différentielle qui peut donner une deuxième approximation, dans le calcul rationnel de la poussée exercée contre un mur par des terres dépourvues de cohésion.*

M. Chapelas. — *Recherches sur les centres de moyenne position des étoiles filantes.*

N° 15. Séance du 11 avril 1870.

M. Flammarion. — *Loi du mouvement de rotation des planètes.*

La loi énoncée par l'auteur serait intéressante si elle était exacte.

M. Decharme. — *Aurore boréale observée à Angers.*

M. Le Verrier. — *Présentation de Notes diverses relatives à l'aurore boréale du 5 avril et adressées par MM. Tremeschini, Charault, Terby, Geslin, Guerreau, Fortier-Garnier, Gramant, Lepingard, etc.*

PAINVIN (L.), professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Lyon. — Discussion de l'intersection de deux surfaces du second ordre (*).

On sait que les couples de droites passant par l'intersection de deux courbes du second degré se déterminent au moyen d'une équation

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. VII, 1868, 103 p.

Chacune des courbes $\sqrt{U}=0$, $\sqrt{V}=0,\ldots$, à cause de sa relation de circonscription avec la courbe $\sqrt{U}+\sqrt{V}+\ldots=0$, est considérée comme une ceinture (ζῶμα) de cette courbe, d'où les expressions zome, polyzomal, etc. L'étude des propriétés de ces courbes est développée à partir de la valeur $\nu \overline{\gtrless} 3$ du nombre des zomes. Le Mémoire contient des recherches relatives au cas général d'une courbe à ν zomes, à ses branches, à son ordre, à ses singularités, à sa classe, etc.

Brewster (Sir David). — *Sur le mouvement, l'équilibre et les forme des bulles liquides.* (8 p.)

Scott (J.). — *Sur les miroirs comburants d'Archimède, avec quelques propositions concernant la concentration de la lumière, produite pa des réflecteurs de différentes formes.* (27 p.)

Discussion historique de l'invention d'Archimède. — Quand l lumière émanant d'une sphère lumineuse de petit diamètre appare tombe sur un miroir plan très-petit, trouver l'intensité de la lumièr réfléchie à une distance quelconque du miroir. — Quand un rayo cylindrique de lumière solaire est réfléchi par un miroir plan, trou ver l'intensité sur une surface plane perpendiculaire à la directio du rayon réfléchi et à une distance quelconque du miroir. — Un sphère lumineuse étant placée à l'un des foyers d'un miroir elliptiqu trouver l'intensité sur une petite surface plane placée à l'autre foye — Les rayons solaires tombant suivant l'axe sur un miroir parab lique, trouver l'intensité sur un petit disque placé au foyer. — L'a d'un miroir conique étant dirigé vers le Soleil, trouver l'intensi sur un plan perpendiculaire à l'axe. — Cas de deux miroirs conique d'axes parallèles et de surfaces parallèles ou perpendiculaires. — C de deux miroirs paraboliques confocaux. — On peut aussi facileme construire des surfaces comburantes à la distance de 150, 200 (300 pieds qu'à la distance de quelques pouces.

Thomson (Sir William). — *Sur le mouvement en tourbillons.* (44 p

La partie mathématique de ce travail a pour but de développ l'hypothèse que l'espace est occupé par un *liquide* incompressible *sans frottement*, n'étant soumis à l'action d'aucune force, et que l phénomènes matériels de toute sorte dépendent uniquement d mouvements produits dans ce liquide. Par *liquide sans frottemen*

l'auteur entend une masse occupant l'espace d'une manière continue, et dont chaque partie presse sur une autre quelconque, suivant une direction exactement perpendiculaire à la surface de séparation. Ces recherches se rattachent à celles de Helmholtz (*Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. Journ. de Crelle*, 1858), en s'appuyant sur les notions introduites par Riemann (*Lehrsätze aus der Analysis situs : Ibid.*, 1857).

TAIT. — *Sur la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.* (44 p.)

Application de la méthode des quaternions à la résolution du célèbre problème. Cette méthode a l'avantage de donner une représentation géométrique aussi claire qu'aucune autre pour les personnes familières avec ce calcul. Elle fournit des calculs d'une parfaite symétrie, ce qui n'est pas le cas des systèmes de coordonnées employés généralement. L'auteur s'est inspiré des travaux de Poinsot, ainsi que des recherches plus récentes de Hamilton, de Cayley, de Sylvester. Ses résultats ont, sur les constructions géométriques de Poinsot, l'avantage de se prêter à la détermination effective de la position du corps au bout d'un temps quelconque. Ce Mémoire se divise en deux Parties : 1° Cinématique d'un système rigide ayant un point fixe; 2° Dynamique d'un corps solide ayant un point fixe.

JENKIN (Fleeming). — *Sur l'application pratique de la théorie des figures réciproques au calcul des efforts des pièces dans la charpente.* (8 p., 6 pl.)

Deux figures planes sont dites *réciproques,* quand elles sont formées d'un même nombre de lignes, de telle sorte que les lignes correspondantes dans les deux figures soient parallèles, et que les lignes correspondantes qui concourent en un même point dans une des figures forment un polygone fermé dans l'autre. Si les forces représentées en grandeur par deux lignes d'une figure sont supposées agir entre les extrémités des lignes correspondantes de la figure réciproque, alors les points de la figure réciproque seront tous en équilibre sous l'action de ces forces.

SMITH (W.-Robertson). — *Hegel et la métaphysique du calcul des fluxions.* (20 p.)

L'auteur réfute les critiques des découvertes de Newton, lancées

par Hegel et reproduites par un de ses disciples, le Dr Stirling. Il montre sans peine les nombreuses erreurs commises par le grand métaphysicien, dans une science où la connaissance des détails pratiques est indispensable pour se former des vues d'ensemble. Pour n'en citer qu'un exemple, Hegel reproche à Lagrange d'avoir avancé que, la loi de la chute des corps étant exprimée par $s = at^2$, le cas le plus simple après celui-là, $s = at^3$, ne se trouve pas dans la nature : « Du moins, dit-il, on a la formule $s^3 = at^2$, qui exprime la troisième » loi de Kepler. » Cette assimilation des deux formules de nature si différente peut donner une idée de la valeur de ces critiques, que M. Smith qualifie de *Quixotic attempts.*

RANKINE (W.-J. Macquorn). — *Sur l'énergie thermale des tourbillons moléculaires.* (10 p.)

L'auteur part de cette hypothèse, que la chaleur thermométrique consiste dans un mouvement des particules des corps dans des courants circulatoires, avec une vitesse uniforme ou à oscillations périodiques. Cette hypothèse suffit pour arriver à l'équation générale de la Thermodynamique, sans qu'il soit besoin d'introduire aucune autre supposition sur la figure et l'arrangement des tourbillons moléculaires.

MEMOIRS OF THE LITERARY AND PHILOSOPHICAL SOCIETY OF MANCHESTER. — Third Series. London, H. Baillière. — Paris, J.-B. Baillière (*).

T. II; 1865.

CAYLEY (A.). — *Note sur une équation différentielle.*

La plus petite racine de l'équation

$$y = u + ay^n$$

se développe immédiatement par la série de Lagrange. D'ailleurs, le développement de y satisfait à l'équation

$$(uD_u)^{n-1}y = na\left(\frac{n}{n-1}D_u - \frac{2n-1}{n-1}\right)^{n-1}u^{n-1}y,$$

dont on a ainsi une intégrale.

(*) Paraît à époques indéterminées, par volumes in-8°. En langue anglaise.

THOMSON (W.). — *Sur l'équilibre convectif de température dans l'atmosphère.*

Il s'agit de l'équilibre produit par le déplacement des molécules de températures diverses.

KIRKMAN (Th.) — *Sur les groupes non-modulaires.* (23 p.)

Étude relative au nombre de valeurs d'une fonction de plusieurs éléments.

SPOTTISWOODE (W.). — *Sur les résolvantes différentielles.*

HARLEY (R.). — *Sur une certaine classe d'équations différentielles linéaires.* (14 p.)

D'une équation algébrique quelconque, de degré n, à coefficients fonctions d'une variable, on peut déduire (CAYLEY, *Philosophical Magazine,* 1861) une équation différentielle linéaire, qui est satisfaite par la plus petite racine de l'équation donnée, dont elle est la *résolvante différentielle* (BOOLE, *Memoir on a general Method in Analysis: Phil. Trans.,* 1844). Application aux équations

$$y^n - ny + (n-1)x = 0,$$
$$y^n - ny^{n-1} + (n-1)x = 0,$$

auxquelles peuvent se ramener toutes les équations algébriques pour $n \leqq 5$.

RUSSEL (W.-H.-L.).— *Sur la solution de la résolvante différentielle.*

HEELIS (Th.). — *Observations sur la lumière zodiacale.* (12 p.)

T. III; 1868.

BROTHERS (A.). — *Catalogue d'étoiles binaires, avec des remarques préliminaires.* (27 p.)

KNOTT (G.). — *Sur l'étoile variable* R *du Petit Renard,*

$$\text{Æ} = 20^h 58^m 21^s,9, \quad D = +23^\circ 17',2, \quad \text{ép. } 1865,0.$$

BAXENDELL (J.). — *Observations sur la nouvelle étoile variable* T *de la Couronne.*

BAXENDELL (J.). — *Observations sur la pluie météorique du* 13-14 nov. 1866.

MÉLANGES.

Imchenetsky (V.). — *Étude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes.* — In-8, 160 pages; 1868 (*).

En attendant qu'il nous soit donné de publier la traduction que nous faisons en ce moment de cet important Mémoire, nous croyons être agréable aux lecteurs du *Bulletin* en leur faisant connaître l'Avant-propos, dans lequel l'auteur a exposé l'objet de son travail et l'esprit dans lequel il l'a traité :

« La théorie des équations différentielles présente un ensemble si bien enchaîné, et si rigoureusement logique, que la possibilité de résoudre chaque nouveau problème que l'on rencontre en s'élevant dans cette théorie tient à la manière plus ou moins complète dont on a résolu les problèmes de classe inférieure qui se sont posés précédemment. Cette liaison si étroite entre toutes les parties de la doctrine est un inconvénient, lorsque, dans une certaine catégorie de questions, il se présente des difficultés susceptibles de résister longtemps aux efforts de l'Analyse mathématique; car un arrêt dans le développement d'une seule partie se fait ressentir dans tout le système, dont les portions forment un ensemble organique. Mais cet inconvénient se change en avantage, chaque fois qu'un succès notable est obtenu sur un point quelconque de la théorie; un triomphe remporté sur un obstacle considérable entraine quelquefois en même temps la chute d'autres obstacles, et imprime une impulsion sensible au développement de la théorie tout entière. C'est ainsi que les récents perfectionnements des méthodes générales d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre ont, d'une part, aidé à la constitution et à l'achèvement de la théorie des équations simultanées de forme canonique, tandis que, d'autre part, ils ont puissamment contribué aux progrès de la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre.

» Une fois la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre définitivement établie, est arrivé naturellement le tour des équations aux dérivées partielles des ordres supérieurs, et c'est vers la solution de ce problème que doivent tendre maintenant les

(*) Extrait des *Mémoires de l'Université de Kazan* pour l'année 1868, t. III.

efforts des géomètres. Par suite de la liaison organique qui existe entre toutes les parties de la théorie des équations différentielles, ainsi qu'entre les subdivisions de chaque partie, il se manifeste une analogie et une unité remarquables dans les méthodes de solution des questions qu'elle embrasse, quelle que soit la diversité de leur nature. Il s'ensuit de là que, lorsque l'analyste rencontre une question dont la solution, poussée déjà jusqu'à un certain point, se trouve arrêtée à cette période de son développement, il doit, avant tout, chercher à se rendre compte du chemin qu'on a suivi pour parvenir jusque-là, surtout quand ce chemin a été frayé par des hommes tels que d'Alembert, Euler, Laplace, Lagrange, Legendre, Monge, Ampère.

» En effet, l'étude consciencieuse de ce qui a été déjà fait peut montrer quelquefois que le succès ultérieur dépend bien moins de l'invention de nouvelles méthodes, que d'une application plus complète et plus générale des méthodes anciennes.

» La théorie de l'intégration des équations aux dérivées partielles des ordres supérieurs se divise en deux parties. Dans la première, on considère les équations de formes compliquées, et l'on cherche soit à déterminer leurs intégrales générales sous forme finie, soit à réduire les équations proposées aux formes les plus simples parmi celles dont les intégrales ne sont pas susceptibles d'expressions finies. Dans la seconde, on s'occupe de ces équations simplifiées et des méthodes par lesquelles on peut les intégrer, à l'aide soit des séries, soit des intégrales définies.

» Dans le présent Mémoire, je traite les questions relatives à chacune des deux parties de la théorie, dans le cas des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes. En donnant le résumé succinct, mais aussi complet que possible, des principales méthodes de résolution des problèmes de cette catégorie, je pense avoir comblé une lacune qui existe dans les Traités systématiques de Calcul intégral. La plupart des auteurs se bornent, en effet, à exposer la méthode de Monge; quelquefois les Ouvrages plus complets contiennent aussi les méthodes d'Euler et de Laplace. Mais aucun, à ma connaissance, ne fait mention des travaux d'Ampère sur ce sujet, publiés dans les Cahiers XVII et XVIII du *Journal de l'École Polytechnique*. Les recherches d'Ampère, qui comprennent la théorie des intégrales et les méthodes d'intégration pour des cas qui échappent à la méthode de Monge, devraient occuper une

place considérable dans tout cours sérieux de Calcul intégral, tandis qu'ordinairement, comme je viens de le dire, on expose la méthode de Monge, quelquefois avec des changements de forme qui ne sont pas toujours heureux. L'oubli dans lequel on laisse le beau travail d'Ampère est dû sans doute en partie au mode de rédaction de ses deux volumineux Mémoires, qui ne se prêtent pas aisément à une exposition succincte; j'ai fait cependant tous mes efforts pour atteindre ce but. J'ai trouvé moyen, dans le courant de mon exposition, d'intercaler les résultats de mes propres recherches à la place indiquée par l'ordre naturel des questions.

» Parmi ces résultats, je me permettrai de signaler un essai de généralisation de la méthode de Laplace (Chap. II, § 9), et une forme nouvelle que j'ai donnée à l'exposition de la méthode de la variation des constantes arbitraires (Chap. IV). Le lecteur familier avec ce sujet ne pourra manquer de reconnaître facilement les passages, moins importants, où je m'écarte de mes auteurs, que j'ai partout cités avec soin dans les Notes au bas des pages. »

J. Hoüel.

COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS PENDANT LE SECOND SEMESTRE.

Calcul différentiel et intégral. — Les lundis et jeudis, à 10 heures. — M. *J.-A. Serret*, professeur, continuera ce cours. Il traitera du Calcul intégral.

Mécanique rationnelle. — Les mercredis et vendredis, à 10 heures. — M. *Liouville*, professeur, continuera ce cours.

Astronomie. — Les lundis et jeudis à $8^h 30^m$. — M. *Le Verrier*, professeur. M. *Tissot*, suppléant, commencera le jeudi 17 mars. Il exposera les lois des principaux phénomènes astronomiques et les méthodes d'observation.

Cacul des probabilités et Physique mathématique. — Les mardis et samedis, à $10^h 30^m$. — M. ***, professeur. M. *Briot*, suppléant, continuera ce cours le samedi 19 mars. Il exposera les principes de la théorie des fonctions elliptiques, dont il fera ensuite l'application à diverses questions de Physique mathématique.

Mécanique physique et expérimentale. — Les mardis et samedis

à 8^h30^m. — M. *Delaunay*, professeur. M. *Bouquet*, suppléant, continuera ce cours, le samedi 19 mars. Il traitera des questions de Mécanique physique comprises dans le programme de la Licence (*).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Bersendorff. — Petites tablettes chronométriques, à l'usage de tout le monde. Guide pour choisir, diriger et régler soi-même les montres et les pendules, suivi d'un aperçu historique sur l'origine et les progrès de l'art de mesurer le temps. 2e édition. In-32, 64 p. Paris, l'auteur, 1, rue de Vannes. 60 c.

Bruhns (C.). — Neues logarithmisch-trigonometrisches Handbuch auf 7 Decimalen. Ster.-Ausg. Lex.-8. Leipzig, B. Tauchnitz. 1 $\frac{1}{4}$ Thlr.

Bruhns (C.). — Nouveau Manuel de logarithmes à 7 décimales pour les nombres et les fonctions trigonométriques. Édit. stér. Gr. in-8°. Leipzig, B. Tauchnitz. 1 $\frac{1}{3}$ Thlr.

Bruhns (C.). — A new Manual of Logarithms to seven places of decimals. Ster. edit. Lex.-8. Leipzig, B. Tauchnitz. 1 $\frac{1}{3}$ Thlr.

Bozzo (Em.). — Lezioni di nautica con l'aggiunta di un manuale di navigazione pratica del Rio de la Plata. In-8, 142 p. Genova, tip. del Commercio. 3 fr.

Catalan (E.). — Manuel d'Arithmétique et d'Algèbre, rédigé d'après les nouveaux programmes officiels d'enseignement des lycées impériaux, prescrits pour les examens du baccalauréat. 7e édit. In-12, VI-236 p. Paris, Delalain et fils. 2 fr.

Delaunay (Ch.). — Cours élémentaire d'Astronomie. 5e édit., avec 3 pl. et 381 figures dans le texte. In-18 jésus, 664 p. Paris, Masson et fils. 7 fr. 50 c.

Dürr (L.). — Zweck und Anwendung des Charto-Metre. Gr. in-16. Mit Charto-Metre. München, Ackermann. $\frac{1}{4}$ Thlr.

Ferguson (James). — Life of James Ferguson, the self-taught astro-

(*) Nous ne donnons que la liste des Cours de Mathématiques; les Cours de Géométrie et d'Algèbre supérieure ne se font que pendant le premier semestre. Les cours du second semestre ont commencé le 16 mars.

nomer; in a brief autobiographical account, and further extended Memoir. By Eb. Henderson. 2[d] edit., with additions, 8°, 512 p. London, Fullarton. 8 sh.

Frauenholz (A.). — Die Sonne und ihre Achsendrehung. In-8. Breslau, Gosohorsky. $\frac{1}{6}$ Thlr.

Gasser (A.). — Leitfaden für den Unterricht in der Planimetrie. 2. Aufl. Gr. in-8. Frankfurt a. M., Jäger'sche Buchh. $\frac{2}{3}$ Thlr.

Gasser (A.). — Leitfaden für den praktischen Unterricht in der Raumlehre. Dritte mit Rücksicht auf die neuen Maass- u. Gewichtsverhältnisse umgearb. 2. Aufl. Gr. in-8. Frankfurt a/M., Jäger'sche Buchh. $\frac{2}{3}$ Thlr.

Gerlach (H.).— Lehrbuch der Mathematik für den Schul- und Selbstunterricht. 4. Thl. 2. Aufl. In-8. Dessau, Aue. $\frac{1}{2}$ Thlr.

Girdlestrone (W.-H.). — Arithmetic; theoretical and practical. 2[d]. ed. revised and enlarged. Post 8°, 470 p. London, Rivingtons. 6 sh. 6 d.

Guarnieri (A.). — Lezioni di Aritmetica, Algebra, Geometria e Trigonometria, compilate secondo i programmi ministeriali per le scuole speciali e per l'ammissione alla Scuola superiore di guerra. In-8, 568 p. con 11 tav. Firenze, Pellas. 15 fr.

Haller v. Hallerstein (F.). — Lehrbuch der Elementar-Mathematik. 2 Theile. 7. Aufl. Gr. in-8. Berlin, Nauck et Co. 2 Thlr. 16 Ngr.

Hansen (P.-A.). — Bestimmung der Sonnenparallaxe durch Venusvorübergänge vor der Sonnenscheibe mit besonderer Berücksichtigung des im Jahr 1874 eintretenden Vorüberganges. Hoch-4. Leipzig, Hirzel. 1 Thlr.

Helmes (J.). — Die Elementar-Mathematik nach den Bedürfnissen des Unterrichts streng wissenschaftlich dargestellt. 4. Bd. Die Stereometrie und sphärische Trigonometrie. Gr. in-8. Hannover Hahn. 26 Ngr

Henrich (F.). — Lehrbuch der Arithmetik und Algebra mit zahlreichen Aufgaben und Anwendungen für Gymnasien, Realschulen und zum Selbstunterrichte. Gr. in-8. Wiesbaden, Limbarth. 24 Ngr

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

CHRISTOFFEL (E.-B.), corresp. Mitglied der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. — ALLGEMEINE THEORIE DER GEODAETISCHEN DREIECKE. Aus den Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1868. — Berlin, Buchdruckerei der Königlichen Akademie der Wissenschaften (C. Vogt), 1869. In Commission bei F. Dümmlers Verlags-Buchhandlung (*).

On doit regarder ce beau Mémoire comme marquant un progrès considérable dans cette Géométrie des surfaces courbes, une des plus belles créations de Gauss, suivant laquelle ces surfaces sont considérées « *non tamquam limes solidi, sed tamquam solidum, cujus dimensio una pro evanescente habetur, flexibile quidem, sed non extensibile,* » et qui, laissant de côté les propriétés qui se rapportent à telles ou telles formes qu'elles prennent dans l'espace, ne s'occupe que de celles qui « *absolutæ sunt, atque invariatæ manent, in quamcumque formam illa flectatur.* » (Gauss, à l'art. XIII des *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, 1827.) M. Christoffel s'est proposé d'établir les principes d'une Trigonométrie générale des surfaces, c'est-à-dire d'une méthode pour calculer les éléments d'un triangle géodésique au moyen des coordonnées curvilignes de ses sommets. Ces éléments sont en général au nombre de neuf (dont six indépendants); car, pour chaque côté, il faut connaître la longueur et les azimuts initial et final (ces azimuts étant rapportés aux directions des courbes coordonnées).

Par des considérations aussi simples qu'ingénieuses, l'auteur a réussi à faire dépendre toute cette recherche d'une seule fonction de quatre variables, qu'il a appelée *longueur réduite* d'un arc géodésique, et qui est le facteur par lequel on doit multiplier l'angle infiniment petit de deux géodésiques de même origine et d'égale longueur, pour obtenir la distance infiniment petite de leurs extrémités (sur la sphère,

(*) CHRISTOFFEL (E.-B.). *Théorie générale des triangles géodésiques*. Extrait des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin* pour l'année 1868. Berlin, imprimerie de l'Académie des Sciences, Librairie de F. Dümmler. In-8°. Prix : 4 fr.

On vend à part tous les Mémoires publiés par l'Académie de Berlin, et en général par les Académies allemandes.

la longueur réduite est le sinus de la longueur géodésique). Cette fonction, qui dépend évidemment des deux couples de coordonnées correspondants aux extrémités de l'arc, est symétrique par rapport à ces couples; elle satisfait généralement à une équation différentielle partielle non linéaire du troisième ordre à deux variables, qui sont les coordonnées d'une des extrémités de l'arc, les coordonnées de l'autre ne s'introduisant dans son expression que par une particularisation convenable des arbitraires de l'intégration. Cette fonction une fois connue, on n'a plus que des équations finies pour déterminer les longueurs des côtés.

Outre ce théorème fondamental très-remarquable, le Mémoire de M. Christoffel renferme une foule de résultats intéressants se rattachant au même sujet, entre autres une discussion très-précise de la continuité des lignes géodésiques, dont l'équation différentielle est présentée sous des formes nouvelles, et des développements très-curieux tirés de l'expression (déjà donnée par Gauss) de la mesure de courbure en coordonnées polaires curvilignes, expression qui fournit en même temps l'équation différentielle des longueurs réduites pour les différents arcs d'une même ligne géodésique. Ces développements se rapportent au cas, très-important à considérer, où la longueur réduite peut devenir nulle, sans que la longueur géodésique le soit elle-même. Fixant sur la ligne géodésique une origine arbitraire, les distances à cette origine de deux points variables, dont la distance réduite est constamment nulle, satisfont à une équation différentielle du troisième ordre, qui comprend, comme cas particulier, celle de Jacobi pour les équations modulaires des fonctions elliptiques, et qui possède une intégrale de même forme.

Nous devons signaler enfin, comme un sujet très-digne d'être étudié à fond, celui que M. Christoffel a rapidement traité dans la dernière Section de son Mémoire. Les côtés et les angles d'un triangle géodésique sont, en général, six fonctions indépendantes des coordonnées des sommets, de sorte qu'à chaque système de valeurs de ces éléments il ne répond qu'une seule position du triangle, ou plusieurs positions distinctes, mais non infiniment proches. Les surfaces appartenant à ce cas, qui est le plus général, constituent pour M. Christoffel la *première classe*. Mais on peut très-bien supposer, en particularisant convenablement la nature de la surface, qu'il existe, entre

les trois côtés et les trois angles, une, deux et même trois relations indépendantes des sommets, et dans ce cas, qui répond aux surfaces de la *seconde, troisième* et *quatrième* classe de M. Christoffel, il est évident que chaque triangle géodésique peut se déplacer sur la surface, sans que ses côtés et ses angles doivent varier nécessairement. Dans la seconde classe, le développement ne peut avoir lieu que suivant une ligne déterminée pour chaque sommet; dans la troisième, il est tout à fait arbitraire pour un sommet, mais déterminé en conséquence pour les deux autres; enfin il n'est limité, dans la dernière classe, que par la condition même de l'invariabilité des côtés.

Ce dernier cas est celui de la sphère, et, en général, de toutes les surfaces dont la courbure est constante en chaque point. C'est aussi le seul que M. Christoffel ait pu dégager complétement de ses formules. Le second cas comprend évidemment toutes les surfaces de révolution; mais sont-ce les seules? Le troisième doit aussi comprendre *certaines* surfaces de ce genre, et il serait bien intéressant de les connaître. Ces belles questions, qui ne sont pas les seules que l'étude du Mémoire fasse surgir dans l'esprit du lecteur, montrent combien le sujet inauguré par M. Christoffel est riche et attrayant.

E. Beltrami.

BRUHNS (C.), docteur en philosophie, directeur de l'Observatoire et professeur d'Astronomie à Leipzig. — Nouveau manuel de logarithmes a sept décimales, *pour les nombres et les fonctions trigonométriques*. Édition stéréotype. — Gr. in-8°, XXIV-610 pages; 1870. Leipzig, Bernard Tauchnitz, libraire-éditeur. Prix : $1\frac{1}{3}$ Thl. (*).

Les Tables logarithmiques de Bremiker et de Schrön, introduites en France dans ces dernières années, n'ont pas eu de peine à détrôner le vieux Callet, par suite des qualités précieuses qu'elles doivent à l'expérience de leurs auteurs dans la pratique du calcul. Le nouveau recueil que nous annonçons est, comme les précédents, l'œuvre d'un éminent astronome, qui a pu profiter des travaux de

(*) Ces Tables ont été publiées en allemand, en anglais et en français.

ses devanciers, et y introduire des perfectionnements qu'apprécieront aisément les calculateurs praticiens.

Il en est des Tables numériques comme des instruments d'Astronomie et de Physique. C'est par l'usage seulement qu'on peut en apercevoir les qualités et les défauts, et encore faut-il tenir un grand compte des habitudes individuelles du calculateur. Les jugements que l'on porte sur un Ouvrage de cette nature ont donc toujours un caractère plus ou moins subjectif. Aussi est-ce avec une certaine réserve que nous présenterons ici nos appréciations personnelles, uniquement fondées sur les observations que nous avons faites en pratiquant nous-même les calculs d'Astronomie mathématique.

Pour épargner des détails inutiles, nous supposerons connus de nos lecteurs les recueils de Bremiker et de Schrön, et nous nous contenterons d'indiquer en quoi s'en distingue l'ouvrage de M. Bruhns.

Comme ses deux devanciers, M. Bruhns a restreint son Recueil aux deux Tables rigoureusement nécessaires dans les calculs de précision, pensant avec juste raison qu'il est plus commode de trouver dans différents ouvrages les Tables qui répondent aux différents besoins du calculateur, que de les avoir toutes entassées dans un même volume. Comme le titre l'indique, le *Nouveau Manuel* contient la Table des logarithmes des nombres entiers, de 1 à 100000, et la Table des logarithmes des fonctions trigonométriques.

Une des considérations les plus importantes dans un Recueil de ce genre est celle de l'exécution typographique, et l'on peut dire que celle du présent Ouvrage fait le plus grand honneur aux presses de M. B. Tauchnitz. Comme dans les Tables de Bremiker, et dans la plupart des belles publications faites dans ces dernières années en Angleterre et en Allemagne, on a adopté les anciens chiffres elzéviriens, d'une lecture plus facile que les chiffres d'égale hauteur, de même que les chiffres français qu'emploie encore l'imprimerie de M. Gauthier-Villars. Les chiffres de M. Bruhns sont un peu plus forts que ceux de M. Bremiker; seulement, la plus grande inégalité d'épaisseur entre les pleins et les déliés nuit un peu à la facilité de la lecture.

Babbage, Schrön et quelques autres auteurs ont adopté une modification dont nous ne sommes nullement partisan. Ils indiquent par un signe particulier les cas où le dernier chiffre a été *forcé*. Cette indication, qui a dû leur couter un énorme travail, ne nous paraît

pas d'une grande utilité; elle introduit dans les pages du livre une certaine confusion, et conduit à des calculs beaucoup moins commodes et beaucoup plus longs que ceux qui résulteraient de l'emploi d'une huitième décimale. M. Bruhns restreint cette indication au seul cas où elle peut être réellement utile, à celui où le dernier chiffre est un 5, ce qui permet d'obtenir tous les logarithmes à 6 décimales, à moins d'une demi-unité près du dernier ordre.

La Table I, contenant les logarithmes vulgaires des nombres entiers de 1 à 100000, est disposée absolument comme la Table correspondante du Recueil de Bremiker. Malgré la meilleure forme des chiffres et la plus grande commodité du format de ces deux Recueils, nous avouons notre préférence pour la disposition donnée à cette section dans l'ouvrage de Schrön.

Il faut, en effet, considérer deux parties dans l'usage d'une Table : l'entrée *directe* et l'entrée *inverse*. Pour l'entrée directe, la disposition qui consiste à former chaque page de 50 ou 51 lignes, séparées de cinq en cinq par des blancs, permet à un calculateur tant soit peu exercé de trouver à première vue le nombre qu'il cherche, dès que le livre est ouvert à la page voulue. Il est inutile, dès lors, de se donner la peine, comme le font beaucoup d'auteurs et M. Schrön lui-même, de distinguer par des caractères plus forts les valeurs de l'argument de dix en dix lignes. Il nous semble même que le défaut d'uniformité qui en résulte est plutôt fait pour dérouter le coup d'œil. La disposition plus compliquée, qu'ont choisie MM. Bremiker et Bruhns, exige la lecture complète de l'argument, et rend la recherche moins prompte. A cela se joint la nécessité d'aller chercher quelques lignes plus haut ou plus bas les deux premiers chiffres de l'argument, qui ne sont inscrits que de dix en dix lignes, sans être séparés des autres par un blanc. Ce dernier inconvénient est plus sensible encore dans l'entrée inverse, quand on veut repasser du logarithme au nombre (*).

Nous pensons aussi qu'il n'eût pas été inutile de prolonger la Table

(*) Notre opinion sur ce point peut s'appuyer de l'autorité de Gauss, qui dit, en parlant d'une suppression de chiffres analogue dans les Tables de Pasquich : *Wir können diese Einrichtung bei Tafeln, die zum täglichen Gebrauch bestimmt sind, nicht unbedingt billigen, da das Auge immer die, wenn auch nur kleine, Mühe hat, in der Columne erst in die Höhe zu gehen, um die übrigen Ziffern zu finden.* (GAUSS Werke, t. III, p. 248.)

un peu au delà de 100000. Si l'on examine, en effet, un exemplaire d'une Table de logarithmes ayant longtemps servi, on verra les premières pages beaucoup plus usées que les autres, et cela tient à ce que les nombres voisins de l'unité sont ceux qui se rencontrent le plus souvent dans les calculs. Or, c'est précisément pour ces nombres que les différences tabulaires sont le plus fortes et l'interpolation le plus pénible. Seulement, il faudrait se garder, comme l'ont fait Callet et la plupart de ses successeurs, d'ajouter au prolongement de la Table une huitième décimale, qui n'est qu'un embarras inutile. Nous ne connaissons que Shortrede qui ait eu l'idée judicieuse de prolonger sa Table jusqu'à 120000, sans augmenter le nombre des décimales.

La Table trigonométrique se divise en deux parties, formant les Tables II et III.

La Table II contient les logarithmes des quatre fonctions trigonométriques de seconde en seconde, pour les six premiers degrés, c'est-à-dire pour un degré de plus que les Tables correspondantes de Callet et de Bremiker.

La Table III donne les mêmes logarithmes, de 10 en 10 secondes pour le reste du quadrant.

M. Bruhns a préféré adopter, pour les colonnes de ces Tables l'ordre suivi par Callet,

sinus, cosinus, tangente, cotangente,

tandis que Bremiker et Schrön ont choisi le même ordre que Lalande

sinus, tangente, cotangente, cosinus.

Quoique nous penchions plutôt en faveur de cette dernière disposition, nous conviendrons cependant que c'est surtout l'habitude d calculateur qui doit décider en pareille circonstance.

Pour les 10 premières minutes, la Table II donne les logarithm des quatre fonctions tout au long, avec les différences tabulaires des Tables auxiliaires pour faciliter le calcul des parties proportionnelles. A partir de 10 minutes, le nombre des colonnes de chaque page est doublé, ce qui a forcé de supprimer les différences et l parties proportionnelles jusqu'à 1°20'; à partir de là, elles so rétablies jusqu'à la fin du volume. Dans l'intervalle où elles man quent, on peut y suppléer avec avantage au moyen des logarithm

des rapports $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\tang x}{x}$, que donne la Table I. De 0° 10′ à 6 degrés, les premiers chiffres des logarithmes ne sont inscrits que dans les blancs qui séparent les lignes de dix en dix, en caractères différents de ceux du texte, mais qui ne s'en distinguent peut-être pas d'une manière assez tranchée.

La disposition de la Table III diffère encore de celle de Bremiker, en ce qu'au lieu de partager, comme celui-ci, les groupes de six lignes en un et cinq, M. Bruhns les partage en trois et trois, ce qui nous paraît bien préférable.

Il nous semble, d'après les détails dans lesquels nous venons d'entrer, que la partie trigonométrique a été traitée par M. Bruhns avec une supériorité qui suffit pour assurer à son livre le premier rang parmi tous les Recueils de Tables que nous connaissons.

En tête du volume est placée une Introduction où sont exposées avec une grande clarté les instructions nécessaires pour l'usage des Tables.

J. Hoüel.

CHRISTIAN WIENER, professeur à l'École Polytechnique de Carlsruhe. — Épreuves stéréoscopiques du modèle d'une surface du troisième ordre a 27 droites réelles. *Avec une Notice explicative.* — Leipzig, Teubner. Prix : $3^{f},25$.

Depuis 1849, époque des premières recherches de MM. Salmon et Cayley, la théorie des surfaces du troisième ordre a fait des progrès considérables, dont nous présenterons quelque jour l'histoire à nos lecteurs ; il nous suffira, pour le moment, de citer les noms de MM. Salmon, Cayley, Sylvester, Schläfli, August, Brioschi, Steiner, Clebsch, Cremona, Sturm, etc., qui tous ont contribué à donner à cette théorie un degré nouveau d'élégance et de perfection. Plusieurs auteurs ont déjà édifié une classification de la surface générale du troisième degré, d'après le nombre de droites réelles qu'elle renferme. C'est ainsi que M. Cremona, dans son beau Mémoire inséré au *Journal de M. Borchardt*, t. LXVIII, p. 1-133, a divisé les surfaces du troisième ordre en cinq espèces, d'après le nombre des droites réelles et des plans tangents triples réels. Le

tableau suivant indique les différents cas considérés par M. Cremona :

1re espèce.....	27 droites réelles.	45 plans tangents réels.	
2e »	15 »	15 »	
3e »	7 »	5 »	
4e »	3 »	7 »	
5e »	3 »	13 »	

Les géomètres, qui ont poussé si loin l'étude abstraite des propriétés de la surface du troisième ordre, désiraient vivement, et cela se conçoit, avoir une idée nette de sa forme et voir construire au moins un modèle d'une surface du troisième ordre. Sur l'invitation des savants allemands, et après des essais infructueux d'autres géomètres, M. Wiener s'est mis à l'œuvre, et il nous paraît avoir très-bien réussi dans la construction d'une surface à 27 droites réelles. Nous l'avouerons, c'est avec une vive impatience que nous attendions les deux épreuves stéréoscopiques du modèle construit par M. Wiener. Nous les avons soigneusement examinées, nous avons compté les droites qui sont tracées en noir sur le modèle et nous engageons vivement nos lecteurs à se donner le même plaisir. Il y a, pour ceux qui ont le goût de la Géométrie, une véritable satisfaction à voir réaliser ainsi et confirmer par l'expérience les conceptions les plus abstraites, fondées sur des calculs et des considérations géométriques d'un ordre si élevé.

Il serait à désirer qu'un de nos grands établissements se procurât un des modèles qui ont servi pour les épreuves stéréoscopiques. Dans sa Notice explicative, M. Wiener déclare qu'il tient à la disposition des géomètres un modèle en plâtre, à un prix qui nous paraît très-modéré (50 florins de Bade). Le modèle a 50 centimètres de hauteur à peu près.

Nous savons aussi que M. Kummer a fait exécuter, à Berlin, un modèle de la surface des centres de courbure de l'ellipsoïde. Si l'un des éditeurs de Berlin voulait en faire tirer quelques épreuves stéréoscopiques, il rendrait certainement service à toute une classe de géomètres, qui, après avoir étudié les propriétés d'une surface, ne sont pas fâchés de voir la surface elle-même.

G. D.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

TIDSKRIFT FÖR MATEMATIK OCH FYSIK, tillegnad den svenska elementar-undervisningen, utgifven af Dr G. DILLNER (hufvudredaktör), Dr FR.-W. HULTMAN och Dr T. ROB. THALÉN. — Upsala, W. Schultz' Förlag (*).

T. II, 1869.

D-G. — *Sur les équations du troisième degré.* (7 p.; suéd.)

HILDEBRANDSSON (H.). — *Revue historique des théories les plus importantes sur la vaporisation des liquides.* (11 p.; suéd.)

HULTMAN (F.-W.). — *Histoire de l'Arithmétique en Suède.* (Suéd.) Suite d'articles, commencés dans le tome précédent.

HULTMAN (F.-W.). — *Sur le calcul des valeurs des rentes viagères, des assurances sur la vie et des primes d'assurance sur la vie.* (3 art., 23 p.; suéd.)

MALMSTEN (C.-J.). — *Intégration de l'équation différentielle*

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=f(x^2+y^2).$$

(3 p.; suéd.)

D-G. — *Sur le reste de la série de Taylor.* (2 p.; suéd.)
ψ étant une fonction arbitraire, et $0<\lambda<1$,

$$R=\frac{\psi(h)-\psi(0)}{\psi'[(1-\lambda)h]}\,\frac{(1-\lambda)^n h^n}{1.2\ldots n}f^{(n+1)}(z+\lambda h).$$

DILLNER (G.). — *Théorie du calcul géométrique.* (Suéd.)
Suite d'articles commencés dans le précédent volume. — Le calcul géométrique a le même objet que le calcul des équipollences de M. Bellavitis. La forme seulement est plus analytique.

THALÉN (Rob.). — *Sur l'origine du temps et le jour de la semaine en différents lieux de la Terre.* (12 p.; suéd.)

(*) *Journal de Mathématiques et de Physique*, destiné à l'enseignement élémentaire en Suède. Publié par G. DILLNER, rédacteur en chef; FR.-W. HULTMAN et T.-R. THALÉN. Upsala, chez W. Schultz. Fondé en 1868. Paraissant tous les deux mois par cahier de 3 à 4 feuilles. In-8°. Prix : 10 francs. En langue suédoise, etc.

D-G. — *Sur la théorie élémentaire du facteur d'intégration.* (8 p.; suéd.)

Thalén (Rob.). — *Léon Foucault.* (18 p.; suéd.)

Dillner (G.). — *Détermination des accélérations par une construction.* (6 p.; suéd.)

Phragmén (Lars). — *Théorie des maxima et minima.* (8 p.; suéd.)

Lindman. — *Remarques sur les figures rectilignes inscrites et circonscrites à une ellipse.* (17 p.; suéd.)

D-G. — *Sur l'intégration par substitution.* (8 p.; suéd.)

Étant donnée une équation différentielle

$$f_1(x,y)\,dx + f_2(x,y)\,dy = 0,$$

on pose $y = F(x,z)$, et l'on cherche à déterminer la fonction F, de manière à pouvoir séparer les variables.

Rubenson (R.). — *Est-il possible de prédire le temps?* (37 p., 2 pl.; suéd.)

Résumé des travaux météorologiques exécutés dans ces derniers temps, en France, en Angleterre et en Norvége.

T. III, 1870.

Dillner (G.). — *Essai d'exposition de la théorie des parallèles.* (6 p.; suéd.)

L'auteur remplace l'axiome d'Euclide par un principe tiré de la formation des angles par des rotations, et qui lui paraît d'une plus grande évidence.

Hultman (F.-W.). — *Histoire de l'Arithmétique en Suède* (suite). (5 p.; suéd.)

Steen (Ad.). — *Nouvelle méthode pour l'intégration de l'équation*

$$\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\dfrac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = 2f(x^2+y^2).$$

(4 p.; dan.)

LEFFLER (G.-M.). — *Intégration de l'équation*

$$f(x^2+y^2) = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

On prend pour nouvelles variables le rayon vecteur et la distance de l'origine à la tangente; puis on introduit l'angle de cette distance avec l'axe des x.

DILLNER (G.). — *Éléments du calcul géométrique* (suite). (13 p.; suéd.)

Notations. Propositions déduites d'identités géométriques.

Résolution des équations géométriques.

Nous donnerons prochainement un résumé de la première Partie de ce travail.

STEEN (Ad.). — *Remarques sur l'intégration des équations différentielles.* (4 p.; dan.)

Au sujet de la méthode de substitution proposée par D-G.

TIDSSKRIFT FOR MATHEMATIK. Udgivet af CAMILLO TYCHSEN. Anden Række (*).

T. V, 1869.

HANSEN (Chr.). — *Détermination élémentaire de l'aire et du volume du tore.* (3 p.; dan.)

TYCHSEN (C.). — *Sur le mouvement de la toupie gyroscopique.* (11 p.; dan.)

TYCHSEN (C.). — *Rectification relative à un Mémoire d'Abel.* (3 p.; dan.)

Voyez *Œuvres d'Abel,* t. II., p. 244. « Sur l'équation différentielle

$$(y+s)dy + (p+qy+ry^2)dx = 0. »$$

(*) *Journal de Mathématiques.* Publié par C. TYCHSEN. 2e Série. Copenhague, chez Otto Schwartz. Imprimerie de Cohen. — La 2e Série a commencé à paraître en 1865, faisant suite au *Mathematisk Tidsskrift* du même auteur, composé de six années. Publié en danois, etc. Paraissant tous les deux mois, par fascicules de 2 feuilles gr. in-8. (Prix : 6 francs par an.)

Zachariæ (G.). — *Mesure du degré de méridien en Danemark, tome I. Publié par* C.-G. Andræ (18 p.; dan.)

Remarques sur le calcul des triangles sphéroïdiques et sur l'application de la méthode des moindres carrés.

Petersen (J.). — *Application du principe des vitesses virtuelles à un système où il existe des frottements.* (2e art., 9 p.; dan.)

Hansen (Chr.). — *Sur les solutions particulières des équations différentielles du premier ordre.* (4 p.; dan.)

Zeuthen (H.-G.). — *Équations fondamentales pour les deux systèmes de coordonnées trilatères et pour les deux systèmes de coordonnées tétraédriques.* (7 p.; dan.)

Pfeiffer (Ad.) — *Recherche sur la convergence de la formule du binôme.* (3 p.; dan.)

Discussion du reste du développement de $(1+x)^m$ par la série de Taylor dans les cas limites de $x = \pm 1$ et pour les différentes valeurs de m.

Thiele (T.-N.). — *Remarques sur les fractions continues.* (2 p.; dan.)

Les fractions convergentes peuvent se mettre sous la forme du quotient de deux déterminants. On peut aussi remplacer deux quotients incomplets consécutifs a_m, a_{m+1} par les trois autres $a_m + \sqrt{-1}$, $\sqrt{-1}$, $a_{m+1} + \sqrt{-1}$, ce qui conduit à des formules qui ont lieu quelle que soit la parité de l'indice.

Lorenz (L.). — *Sur les soulèvements et les affaissements.* (5 p.; dan.)

Zeuthen (H.-G.). — *Remarques au sujet de l'article de* Chr. Hansen *sur les solutions singulières.* (3 p.; dan.)

Hansen (P.-C.-V.). — *Intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{m(m+1)}{x^2} z - a^2 \frac{d^2 z}{dy^2} = 0,$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{2n}{x}\frac{dz}{dx} - a^2 \frac{d^2 z}{dy^2} = 0,$$

$$x^2 \frac{d^2 z}{dx^2} + q x^2 \frac{d^2 z}{dx\,dy} - 6z = 0.$$

(6 p.; dan.)

Mylord (H.). — *Sur l'ellipsoïde central et les axes principaux.* (7 p.; dan.)

Petersen (J.). — *Quelques remarques sur la théorie des équations.* (12 p.; dan.)

PHILOSOPHICAL Transactions of the Royal Society of London. — London, printed by Taylor and Francis (*).

T. CLVII; 1867.

Cayley (A.). — *Mémoire supplémentaire sur les caustiques.* (9 p.)

Addition au « Mémoire sur les caustiques, » publié dans les *Philos. Transact.*, t. CXLVII, 1857; p. 273-312.

Maxwell (J.-Cl.). — *Sur la théorie dynamique des gaz.* (40 p.)

Everett (J.-D.). — *Expériences sur la torsion et la flexion pour déterminer la rigidité du verre.* (15 p., 1 pl.)

Clarke (A.-R.). — *Extrait des résultats des comparaisons des étalons de mesures de longueur en Angleterre, en Belgique, etc.* (20 p.)

Smith (H.-J.-St.). — *Sur les ordres et les genres des formes quadratiques ternaires.* (44 p.)

Eisenstein, dans son Mémoire intitulé : « Neue Theoreme der höheren Arithmetik » (*Journal de Crelle*, t. XXXV, p. 117), a étudié les caractères des ordres et des genres des formes quadratiques ternaires de déterminant impair. M. Smith complète ces recherches, en les étendant aux formes de déterminant pair.

Neumayer (G.). — *Sur la variation diurne lunaire de la déclinaison magnétique, eu égard spécialement à la déclinaison de la Lune.* (9 p.)

Cayley (A.). — *Huitième Mémoire sur les quantiques.* (42 p., 1 pl.)

Application des recherches contenues dans les Mémoires précédents (nos 2, 3, 5), au cas des quintiques. Détermination des covariants du sixième degré. Développements des recherches récentes de MM. Sylvester et Hermite. Voici les titres des Chapitres :

La quintique binaire, covariants et syzygies du sixième degré. — Expression de l'invariant du dix-huitième degré en fonction des ra-

(*) Il paraît chaque année un volume gr. in-4, en un ou plusieurs fascicules. En langue anglaise.

cines. — Théorie de la détermination du caractère d'une équation; auxiliaires; espace facultatif et non facultatif. — Application à l'équation quartique. — Détermination des caractères de l'équation quintique. — Nouvelle forme donnée par Hermite à la transformation de Tschirnhaus, et application à la quintique. — Application par Hermite des résultats précédents à la détermination du caractère de l'équation quintique. — Comparaison avec le critérium précédent; la cubique nodale. — Troisième espèce de critériums d'Hermite; comparaison avec ce qui précède, et remarques. — Forme canonique de la quintique d'après Hermite. — Théorie des transformations linéaires imaginaires qui conduisent à une équation réelle. — Application aux auxiliaires d'une quintique. — Théorème d'analyse relatif à une quantique binaire d'ordre quelconque.

T. CLVIII; 1868.

Airy (G.-B.). — *Calcul des longueurs des ondes lumineuses correspondantes aux raies du spectre de dispersion mesurées par Kirchhoff.* (27 p.)

Oxmantown (Lord). — *Compte rendu des observations de la Grande Nébuleuse d'Orion, faites à Birr-Castle avec des télescopes de* 3 *et de* 6 *pieds, de* 1848 *à* 1867. (17 p., 3 pl.)

Cayley (A.). — *Sur les courbes qui satisfont à des conditions données. — Premier Mémoire* (69 p.). — *Deuxième Mémoire.* (18 p.)

Le but de ces Mémoires est la recherche du nombre des courbes qui satisfont à des conditions données. Les courbes considérées sont ou des courbes d'un ordre déterminé r, assujetties à des conditions de contact avec une courbe donnée, ou des coniques assujetties à des conditions de même genre, mais plus compliquées.

Premier Mémoire : Sur la représentation quasi-géométrique des conditions. — Représentation et développement des recherches de Chasles et de Zeuthen. — Recherches faites comme extension de celles de M. de Jonquières, relativement aux contacts d'une courbe d'ordre r avec une courbe donnée. — Additions : N° 1. Sur la forme de l'équation des courbes d'une série d'indice donnée. — N° 2. Sur les couples de lignes passant par trois points donnés et touchant une conique donnée. — N° 3. Sur les coniques passant par deux points donnés et touchant une conique donnée. — N° 4. Sur les coniques

nt une cubique à rebroussement. — N° 5. Sur les coniques qui contact du troisième ordre avec une cubique à rebroussement e, et deux contacts (contact double) avec une conique donnée. 6. Formes de Zeuthen pour les caractéristiques des coniques isfont à quatre conditions. — N° 7. Problème.

xième Mémoire : Le principe de correspondance. — L'auteur luit, avec de nouveaux développements, la théorie établie dans Mémoire : « *On the correspondence of two points on a curve* » *n Math. Society,*, n° 7, avril 1866). — Sur la correspondance ints d'une courbe. — Application aux coniques satisfaisant à nditions dont une au moins est arbitraire. — Application aux es qui satisfont à cinq conditions de contact avec une courbe e.

LEY (A.). — *Addition au Mémoire sur la résultante d'un système x équations.* (8 p.)

Mémoire dont il s'agit se trouve dans les *Phil. Trans.* pour p. 703-715. Le nouveau travail de M. Cayley contient, écrites étement, les résultantes de deux équations dont les degrés res- varient de 2 à 4.

TTON (N.-W.). — *Sur la théorie de la probabilité locale, appli- des lignes droites, tracées au hasard sur un plan; les méthodes n outre, étendues à la démonstration de certains théorèmes nou- de calcul intégral.* (19 p.)

ateur parvient au théorème suivant, d'où l'on peut déduire un nombre d'intégrales doubles : « Si θ est l'angle sous lequel on n point (x, y) une aire convexe Ω, on a

$$\int\int \theta\, dx\, dy = \pi(\Theta - 2A),$$

gration s'étendant à tout l'espace annulaire compris entre Ω contour convexe extérieur, donné d'une manière quelcon- Θ étant l'aire de l'espace annulaire, et A l'aire *moyenne* du seg- détaché de l'anneau par une tangente au contour de Ω. »

en déduit, par exemple, pour deux ellipses homothétiques,

$$\tan\!\text{g}\left(\frac{2\sqrt{a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2}}{x^2+y^2-a^2-b^2}\right)dx\,dy = \pi ab k^2(\pi \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha - \alpha + \sin\alpha),$$

$$\left(1 < \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < k^2, \quad \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{1}{k}\right).$$

Phillips (J.). — *Notices sur quelques parties de la surface de la Lune.* (13 p., 3 pl.)

Sabine (E.). — *Contributions au magnétisme terrestre.* N° 9. (46 p., 3 pl.)

Recherches sur le magnétisme terrestre dans les régions polaires antarctiques.

Bashforth (F.). — *Sur la résistance de l'air au mouvement des projectiles allongés, pour diverses formes de la tête.* (25 p.)

Merrifield (Ch.-W.). — *Sur la loi de la résistance de l'air aux projectiles de carabine.* (4 p.)

L'auteur trouve une résistance proportionnelle au cube de la vitesse.

Stokes (G.-G.). — *Communication des vibrations d'un corps vibrant à un milieu gazeux.* (17 p.)

Étude mathématique entreprise à l'occasion de l'expérience de Leslie sur l'extinction du son par le mélange de l'hydrogène avec l'air atmosphérique.

Airy (G.-B.). — *Comparaison des perturbations magnétiques indiquées par le magnétomètre enregistreur de l'Observatoire Royal de Greenwich, avec les perturbations magnétiques déduites des courants galvaniques terrestres correspondants, indiqués par le galvanomètre enregistreur de l'Observatoire Royal.* (8 p.)

Huggins (W.). — *Nouvelles observations sur le spectre de quelques étoiles et de quelques nébuleuses, avec un essai pour déterminer, d'après cela, si ces corps se meuvent en s'approchant ou en s'éloignant de la Terre et des observations sur les spectres du Soleil et de la Comète II, 1868* (36 p., 1 pl.)

Cayley (A.). — *Sur les conditions d'existence de trois racines égales ou de deux couples de racines égales dans une quartique ou une quintique binaire.* (12 p.)

Pollock (Sir Fr.). — *Sur les mystères des nombres, auxquels Fermat fait allusion. — Deuxième Communication.* (16 p., 2 pl.)

Sur la décomposition des nombres en carrés, en nombres triangulaires, etc.

MAXWELL (J.-C.). — *Sur une méthode pour faire une comparaison directe de l'électrostatique avec la force électromagnétique; avec une Note sur la théorie électromagnétique de la lumière.* (15 p.)

PARKES (W.). — *Sur les marées à Bombay et à Kurrachee.* (12 p., 1 pl.)

T. CLIX, 1869 (Première Partie).

WARREN DE LA RUE, BALFOUR STEWART et BENJAMIN LOEWY. — *Recherches sur la physique du Soleil. Positions héliographiques et aires des taches solaires observées au photohéliographe de Kew, en 1862 et* 1863. (110 p., 2 pl.)

CAYLEY (A.). — *Troisième Mémoire sur les surfaces gauches (Scrolls).* (16 p.)

Ce Mémoire est un supplément au second Mémoire sur les surfaces gauches (*Phil. Trans.*, 1864, p. 559-577), et est aussi relatif à la théorie des surfaces gauches du quatrième ordre (quartiques). L'auteur y traite de deux espèces de surfaces omises dans son second Mémoire.

ROBINSON (T.-R.) et GRUBB (Th.) — *Description du grand télescope de Melbourne.* (35 p., 10 pl.)

Cet instrument est un réflecteur de 4 pieds, à miroir métallique, construit d'après le système de Cassegrain, et destiné à l'observation des nébuleuses de l'hémisphère austral.

CAYLEY (A.). — *Mémoire sur la théorie des surfaces réciproques.* (29 p.)

Extension de la théorie de ces surfaces donnée par M. Salmon dans sa Géométrie analytique.

CAYLEY (A.) — *Mémoire sur les surfaces du troisième degré.* (96 p.)

Ce Mémoire fait suite au Mémoire de M. Schläfli *sur la distribution des surfaces du troisième ordre en espèces, eu égard à la présence ou à l'absence des points singuliers, et à la réalité de leurs lignes.* (*Phil. Trans.*, 1863, p. 193-241.) Mais le point de vue auquel se place l'auteur est différent. Il ne tient aucun compte de la division fondée sur la réalité des lignes, ne conservant que la division en 22 ou plutôt en 23 cas, ayant pour base la nature des singularités. Il

s'attache à cette question, en vue surtout de la lumière qu'elle jette sur la théorie des surfaces réciproques.

Chambers (Ch.). — *Sur les variations solaires de la déclinaison magnétique à Bombay* (24 p., 6 pl.)

Résultats d'observations faites pendant les sept années 1859-65 à l'Observatoire du Gouvernement à Bombay.

Airy (G.-B.). — *Sur les inégalités diurnes et annuelles du magnétisme terrestre, déduites d'observations faites à l'Observatoire Royal de Greenwich, de* 1858 à 1863. *Suite d'une Communication sur les inégalités diurnes de* 1841 à 1857, *imprimée dans les* Philosophical Transactions *de* 1863. *Avec une Note sur les inégalités luno-diurnes et autres inégalités lunaires, déduites d'observations s'étendant de* 1848 *à* 1863. (12 p., 4 pl.)

Lockyer (J.-N.). — *Observations spectroscopiques sur le Soleil.* N° II. (20 p., 2 pl.)

Recherche des protubérances rouges au moyen du spectroscope.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN der Koninglijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. 2de Reeks, 3de Deel; 1869 (*).

Cohen Stuart. — *Sur les formules connues de l'équilibre intérieur d'un cylindre creux et d'une sphère creuse.* (3 p.; holl.)

Cohen Stuart. — *Sur la pression exercée sur les points d'appui.* (3 p.; holl.)

Euler a démontré que la recherche des pressions exercées sur ses points d'appui par un corps pesant, reposant sur un plan horizontal par un nombre quelconque de points, est un problème déterminé, lorsque le corps est parfaitement rigide et que les points d'appui cèdent, dans la direction des pressions, de quantités proportionnelles à ces pressions. M. Cohen Stuart étend la même proposition au cas où le corps, limité par une surface quelconque, repose sur un nombre quelconque de surfaces fixes et est soumis à des forces quelconques.

Stamkart (F.-J.). — *Mesure d'une base dans la mer de Harlem, pendant l'été de* 1868. (28 p., 2 pl.; holl.)

(*) *Actes et Communications de l'Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.* 2e Série, t. III; 1869. — Un volume in-8° par an. En hollandais et en français.

HOEK. — *Détermination de la vitesse avec laquelle est entraîné un rayon lumineux traversant un milieu en mouvement.* (8 p., 1 pl.; fr.)

BIERENS DE HAAN. — *Sur la théorie des intégrales définies.* N° IX. (17 p., 1 pl.; holl.)

Sur les intégrales singulières. Cauchy appelle ainsi les intégrales définies dont les limites sont prises à des distances infiniment petites de part et d'autre d'une valeur qui rend infinie la fonction sous le signe $\int$. Généralement ces intégrales sont indéterminées, sauf les cas où elles s'annulent. Dans ces derniers cas, une intégrale définie, prise entre des limites qui comprennent entre elles la valeur critique, est complétement déterminée. M. Bierens de Haan étudie en particulier les intégrales

$$\int_0^\infty f(x)\frac{dx}{q^2-x^2}, \qquad \int_0^\infty f(x)\frac{x\,dx}{q^2-x^2},$$

qui sont finies et continues toutes les fois que $f(x)$ est continue dans le voisinage de $x=q$.

MONATSBERICHTE DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN zu Berlin. Jahrgang 1869 (*).

CHRISTOFFEL. — *Sur la transformation des expressions différentielles homogènes entières.* (5 p.)

LIPSCHITZ. — *Recherches sur les fonctions homogènes entières de n différentielles.*

KRONECKER (L.). — *Sur les systèmes de fonctions de plusieurs variables.* (2 art., 44 p.)

AUWERS. — *Sur la valeur de la constante de l'aberration d'après les observations de Molyneux.* (39 p.)

DU BOIS-REYMOND. — *Sur le mouvement apériodique des aimants.* (46 p.)

WEIERSTRASS. — *Sur les fonctions monodromes les plus générales de n variables, à 2n périodes.* (4 p.)

(*) *Comptes rendus mensuels de l'Académie Royale des Sciences de Prusse*, à Berlin Année 1869. — Paraît chaque mois par livraisons in-8, en langue allemande.

Kirchhoff (G.-R.). — *Sur les forces que peuvent paraître exercer l'un sur l'autre deux anneaux rigides, infiniment minces, dans un fluide.* (6 p.)

RENDICONTI del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. 2ᵉ Série; Milan (*).

T. II, 1869. Fasc. 1-16.

Brioschi (F.). — *Sur l'équation qui donne les points d'inflexion des courbes elliptiques.* (7 p.)

Les courbes *elliptiques* sont les courbes planes du $n^{ième}$ ordre, ayant $\frac{n(n-3)}{2}$ points doubles ou de rebroussement. Leurs coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3 peuvent s'exprimer par trois équations de la forme

$$\rho x_i = f_i(x) + \varphi_i(x)\psi(x), \quad (i = 1, 2, 3),$$

x étant un paramètre variable; f_i, φ_i des fonctions entières et rationnelles, et

$$\psi(x) = \sqrt{x(1-x)(1-k^2x)} \ (^{**}).$$

M. Brioschi ramène la résolution de l'équation aux points d'inflexion à des équations des quatre premiers degrés.

Cremona (L.). — *Sur la transformation des courbes hyperelliptiques.* (5 p.)

On appelle ainsi une courbe dont les coordonnées sont exprimables rationnellement au moyen d'un paramètre λ et de la racine carré d'une fonction entière $Q(\lambda)$ de degré $2p + 2$ (Clebsch et Gordan *Theorie d. Ab. Funct.*, p. 69 et 77). L'auteur étend le procédé de transformation appliqué dans l'Ouvrage cité aux cas de $p = 1$ et de $p = 2$.

Casorati (F.) et Cremona (L.). — *Sur le nombre des modules des équations ou des courbes algébriques d'un genre donné.* (5 p.)

Le mot *genre* est pris ici dans le même sens que le mot *Klasse* (Ri

---

(*) Publié annuellement en vingt fascicules in-8; en langue italienne. Prix : 12 l pour l'Italie.

(**) Clebsch, *Ueber diejenigen Curven u. s. w.* (*Journ. de Crelle*, t. LXIV). — Clebsch Gordan, *Th. d. Ab. Funct.*

MANN, *Th. d. Ab. Funct.*) et le mot *Geschlecht* (CLEBSCH et GORDAN). Le nombre des modules des courbes du genre p ayant été indiqué par Riemann comme égal à $3p - 3$, et par Cayley (*Proc. of the London Math. Soc.*, oct. 1865) comme égal à $4p - 6$, la question a été décidée dans le sens de Riemann par BRILL. (*Math. Annalen*, t. I, p. 401.)

BELTRAMI (E.). — *Sur un nouvel élément introduit par M. Christoffel dans la théorie des surfaces.* (10 p.)

Au sujet du Mémoire de CHRISTOFFEL : *Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke* (*Mém. de l'Ac. de Berlin*, 1868, p. 119-176). Si une ligne géodésique ab tourne d'un angle infiniment petit $d\omega$ autour de a, l'arc ds décrit par b, a pour mesure $d\omega \times$ une certaine quantité, que Christoffel nomme la *longueur réduite* de ab. C'est sur cette considération que sont fondées les recherches importantes, sur lesquelles M. Beltrami présente ici quelques remarques.

MÉLANGES.

FUNÉRAILLES DE M. LAMÉ, LE MARDI 3 MAI 1870.

DISCOURS DE M. BERTRAND.

« La mort de notre excellent et illustre confrère est une perte cruelle pour l'Académie. Sa tâche d'inventeur était depuis longtemps accomplie, et les infirmités qui l'éloignaient de nos séances lui avaient interdit le travail; mais la gloire d'un tel nom était encore une force pour nous tous, et la Section de Géométrie pouvait, après tant de pertes, saluer avec un légitime orgueil, dans son vénéré et cher doyen, l'un des représentants les plus élevés, en Europe, de la Physique mathématique et de la Philosophie naturelle.

» Lamé a été un grand géomètre, il a créé des méthodes aujourd'hui classiques; mais il était avant tout un grand esprit, un penseur aux conceptions hardies, un investigateur obstiné des secrets les plus cachés de la nature.

» Aucun rôle n'est plus grand dans l'histoire de la science que celui des physiciens géomètres. Cette grande école a compté dans

notre Académie, depuis Huyghens, de bien illustres représentants; celui que nous perdons aujourd'hui était, dans l'opinion de tous, leur plus éminent successeur.

» Peu d'esprits, à aucune époque, ont été plus aptes que celui de Lamé au maniement des formules analytiques. Il excellait à donner une forme élégante et concise aux expressions les plus rebelles. Quelque question qu'il abordât, la solution contenait, comme à son insu, d'admirables développements analytiques, dont il était le seul à méconnaître l'intérêt propre.

» Il avait placé plus haut le but de ses efforts; les Mathématiques ont été surtout à ses yeux un instrument destiné à pénétrer la nature. La joie qu'il éprouvait parfois à contempler l'élégance de ses méthodes et de ses résultats intermédiaires n'était pas chez lui la satisfaction vulgaire de l'auteur complaisant pour son œuvre; il songeait trop à ce qui lui restait à faire, pour s'enorgueillir de ce qu'il avait fait. L'esprit toujours tendu vers le but qu'il espérait atteindre, toute autre conquête était à ses yeux sans valeur, et si les bonnes fortunes analytiques, si souvent admirées par de si grands juges, ne le laissaient pas indifférent, c'est qu'il estimait qu'elles ne sont possibles que sur la route de la vérité.

» Cette conviction, aussi sincère chez lui que modeste, n'était pas partagée par les géomètres. Trop d'exemples prouvent que ces hasards heureux n'arrivent qu'à certains esprits, et qu'à ceux-là ils arrivent toujours. L'Algèbre, comme toutes les langues, a ses grands écrivains qui savent marquer tous les sujets à l'empreinte de leur génie, et forcer l'admiration de ceux mêmes qui n'acceptent pas leurs prémisses; mais le triomphe des idées est pour les esprits de premier ordre le seul but réellement digne d'efforts, et le seul souvenir qu'ils veulent attacher à leur nom.

» Telle a été la préoccupation incessante de Lamé. Il ne s'était rien proposé de moins que de relier toutes les lois physiques dans les conséquences d'un principe unique, en les rattachant, avec celles de la Mécanique et du Système du monde, à l'étude d'un fluide, dont les physiciens, depuis Fresnel, ne contestent plus l'existence. Malgré les grands travaux qui la préparent, une œuvre aussi vaste ne pouvait être accomplie par un seul homme. Lamé savait qu'il n'y mettrait pas la dernière main, mais il a épuisé ses forces à l'attaquer en tous sens.

» Les auditeurs de la Sorbonne n'ont pas oublié les accents généreux qui, chaque année, au début de son cours, les conviaient à la tâche pour laquelle il eût voulu unir les efforts de tous. Persuadé que le succès était proche, peu lui importait que d'autres atteignissent le but avant lui, pourvu que la vérité fût révélée.

» Cet enthousiasme éloquent par lequel il stimulait les jeunes savants, Lamé le portait dans toutes les questions qui intéressaient la science; il nous étonnait, sans jamais froisser personne, par l'ardeur de ses convictions et l'élévation passionnée et émue de sa parole. On sentait en toute occasion, sous la rigueur du géomètre, l'imagination brillante, féconde, poétique parfois, du philosophe et la générosité entraînante et dévouée de l'homme de bien.

» L'élévation et la variété de son œuvre n'ont jamais altéré la modestie de notre excellent confrère; il s'humiliait devant la grandeur des problèmes dont il ne pouvait détacher ses efforts en réservant pour les principes seuls de ses travaux son admiration tout entière.

» L'avenir prononcera; mais que sa cause triomphe, ou que ses espérances s'évanouissent, l'histoire de la science devra lui consacrer plus d'une page et saluer à plus d'un titre les œuvres que leur solide beauté ferait survivre, quoi qu'il puisse arriver, aux hypothèses mêmes qui les ont inspirées. »

DISCOURS DE M. COMBES.

« Le corps des Ingénieurs des Mines, dont je suis ici l'organe, tient à honneur de revendiquer comme l'un des siens le professeur illustre, le géomètre éminent dont nous venons rendre les restes mortels à la terre. Les premiers travaux de Lamé ont été publiés dans le Recueil des *Annales des Mines*, de 1819 à 1830. C'est d'abord un Mémoire sur une nouvelle manière de calculer les angles des cristaux, où l'auteur, tout en reconnaissant les avantages particuliers aux considérations purement géométriques appliquées par Haüy, montre comment l'analyse de Descartes conduit à une formule générale qui embrasse tous les cas possibles. Une note de la rédaction nous apprend que cet article est extrait d'un Ouvrage de Lamé, ayant pour titre : *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre*

les problèmes de Géométrie, et les rédacteurs ajoutent : « Cet Ouvrage » sera lu avec un grand intérêt par les personnes qui se livrent à » l'étude des Mathématiques; elles y trouveront des principes géné- » raux dont elles pourront faire de fréquents usages pour la solution » des problèmes. » Lamé était alors élève ingénieur des Mines. Le tome suivant du Recueil renferme des extraits du *Journal du voyage* qu'il fit avec M. Thirria aux usines du Creuzot et à celles de Vienne et de la Voulte, dans la vallée du Rhône.

» On sait qu'en quittant l'École des Mines, Lamé et son ami Clapeyron partirent pour la Russie, où ils séjournèrent jusqu'en 1830, remplissant à la fois les fonctions de professeurs et d'ingénieurs. Pendant ces dix années, ils entretinrent une correspondance suivie avec plusieurs membres du corps des Mines, particulièrement avec M. Baillet, professeur du Cours d'exploitation des Mines. Lamé écrivait, en 1824, à cet excellent homme, son vénéré maître et le mien: « *Le souvenir des leçons dans lesquelles vous m'avez inspiré le goût de » la Mécanique pratique me fait espérer que ce que je prends la liberté » de vous écrire ici ne sera pas sans intérêt pour vous.* »

» On trouve dans cette lettre un exposé bref et élégant du calcul des ponts suspendus en chaines de fer, la description d'une machine à essayer les résistances des chaines à la rupture et à l'extension, et les résultats des expériences faites sur des fers de diverses provenances. L'année suivante, il adressait également à M. Baillet les éléments principaux du projet d'un pont en chaînes de 1022 pieds d'ouverture sur la Néva, dressé par lui, par Clapeyron et par Bazaine, du corps des Ponts et Chaussées de France, engagé comme eux au service de la Russie.

» Ils avaient envoyé, l'année précédente, à l'Académie des Sciences, un Mémoire sur la stabilité des voûtes, composé à l'occasion de la reconstruction de l'église Saint-Isaac, à Saint-Pétersbourg, présentant deux portiques semblables à celui du Panthéon de Rome, dont chacun devait être recouvert par une voûte en berceau et en plein ceintre, et par deux plates-bandes latérales. La voûte, de plus de 40 pieds de diamètre, assise sur des colonnades sans autre massif latéral pour résister à la poussée, présentait de graves difficultés et des doutes avaient été élevés sur sa stabilité. Chargés de traiter la question, ils établirent une théorie qui, au jugement de l'illustre rapporteur de l'Académie, M. de Prony, offrait des résultats cu-

rieux et nouveaux, obtenus par une analyse conduite avec *adresse et élégance*. L'originalité et la netteté de l'exposition sont également de sa part l'objet d'éloges auxquels l'Académie s'associait en 1823, et qui ont été consacrés depuis par l'assentiment de tous les ingénieurs.

» Le Mémoire sur les engrenages, imprimé en 1824, et resté classique dans l'enseignement des machines, se distingue par les mêmes qualités.

» En 1828, Lamé, sans avoir eu connaissance des travaux antérieurs de Navier et de Cauchy sur l'équilibre intérieur des solides élastiques, arriva non-seulement aux mêmes résultats que ces illustres géomètres, mais encore en obtint beaucoup d'autres, parmi lesquels nous citerons la découverte des surfaces que l'on peut appeler, suivant l'expression de notre savant confrère M. de Saint-Venant, *les deux véritables ellipsoïdes des pressions,* dont l'un donne par ses rayons vecteurs leurs directions et intensités, et l'autre par ses plans tangents les directions des faces sur lesquelles agissent ces pressions. Son beau Mémoire, écrit en Russie en commun avec Clapeyron, commença à élucider une matière auparavant difficile à aborder. Les Leçons sur l'élasticité, de 1852, ont complétement éclairé ce sujet et ont approprié les principes de l'équilibre intérieur des corps aux applications même pratiques, ainsi que le montrent les récents Mémoires de savants ingénieurs des Ponts et Chaussées sur l'équilibre des terres et l'hydrodynamique des cours d'eau.

» Le Mémoire de 1828 présente d'admirables exemples d'intégration des équations de l'élasticité; mais le plus mémorable est la magnifique solution, donnée vingt ans plus tard, du problème de la déformation d'une sphère élastique pleine ou creuse, sollicitée par des forces distribuées d'une manière quelconque à sa surface.

» Après sa rentrée en France en 1830, Lamé, devenu professeur à l'École Polytechnique et à la Faculté des Sciences de Paris, a néanmoins coopéré, comme ingénieur, avec son ami Clapeyron, à la grande œuvre de la construction des chemins de fer; il a pris une part effective et considérable aux projets et à l'exécution de ceux de Paris à Saint-Germain et de Paris à Versailles, rive droite.

» Lamé n'a donc pas été seulement un géomètre éminent et l'un des écrivains les plus distingués de notre temps : ses travaux ont eu et auront pour l'art des constructions des conséquences pratiques

dont l'importance devient chaque jour plus manifeste; son nom appartient à la fois à l'histoire de la science pure et à celle des sciences appliquées par les ingénieurs du Corps auquel il s'honorait d'appartenir. C'est parmi eux qu'il a choisi celui à qui il a confié le bonheur de sa fille, et qui a partagé avec elle les soins pieux dont il a été entouré dans sa vieillesse et sa longue maladie.

» Tous ceux d'entre nous qui ont eu le bonheur de connaître Lamé l'aimaient pour les excellentes qualités de son cœur, autant qu'ils l'admiraient pour les grandes et brillantes facultés de son esprit. Sa mémoire, dont nous ne séparerons pas celle de Clapeyron, restera en vénération dans le Corps des ingénieurs des Mines. »

DISCOURS DE M. PUISEUX.

« En présence de cette tombe qui va se refermer sur une de nos gloires scientifiques, vous permettrez aux professeurs de la Faculté des Sciences de Paris d'exprimer la douleur que leur cause la perte d'un collègue vénéré. Chargé de leur servir d'organe, j'essayerai de remplir cette pieuse mission en vous disant combien, parmi nous, les travaux de M. Lamé étaient admirés, et combien aussi était apprécié son noble caractère.

» Attiré vers les recherches spéculatives par la conscience de son génie, M. Lamé s'était, de bonne heure, donné tout entier à la science. Ses premières productions le placèrent au rang des maîtres. Laplace, Fourier, Poisson, venaient de fonder la théorie mathématique de la chaleur; notre illustre collègue sut lui donner un nouvel essor. Il aborda victorieusement des questions qui avaient arrêté ses célèbres devanciers, et les méthodes fécondes qu'il imagina pour les résoudre ne servirent pas seulement à perfectionner cette théorie particulière: elles ouvrirent une voie nouvelle dans les recherches de Géométrie et de Physique mathématique. Admirablement écrits d'ailleurs, ces premiers Mémoires de M. Lamé peuvent être cités, aussi bien que les Ouvrages qui les ont suivis, comme des chefs-d'œuvre de rigueur et de netteté, comme de vrais modèles du style scientifique.

» La Physique mathématique, cette science de création toute moderne, a été l'objet principal et préféré des recherches de M. Lamé, et, bien que nous lui devions des travaux très-importants sur d'autres

sujets, notamment sur la théorie des nombres, il est toujours revenu à ses études de prédilection. Il y était rappelé d'ailleurs par son enseignement, et les leçons qui avaient captivé son auditoire de la Sorbonne devenaient la matière d'excellents Traités, où presque tout est original, et qui ont puissamment contribué à l'avancement des hautes études mathématiques.

» M. Lamé avait cette passion de la vérité scientifique qui enfante les découvertes; les progrès de la science excitaient chez lui un vif enthousiasme; il rêvait une époque où les lois primordiales du monde matériel se dévoileraient à nos yeux; il entrevoyait, et il aimait à le croire prochain, le moment où l'esprit humain, guidé par l'Analyse mathématique, tirerait d'un petit nombre de principes certains l'explication rationnelle des phénomènes physiques. Même à ses dernières leçons, lorsque les infirmités amenées par l'âge et le travail inspiraient déjà de vives craintes aux admirateurs de son talent, M. Lamé retrouvait, dans la contemplation de ses belles perspectives, une ardeur toute juvénile, et il la faisait partager à ses auditeurs.

» Aussi M. Lamé n'a pas seulement écrit des Mémoires et des Livres d'une importance capitale dans la science; il a formé des disciples, et, parmi les travaux des jeunes géomètres d'aujourd'hui, il en est bien peu qui ne portent la trace de l'heureuse influence exercée par l'éminent professeur.

» Il accueillait d'ailleurs les débutants avec une bienveillance qu'ont éprouvée plusieurs de ceux qui m'entendent et dont j'ai gardé pour ma part un précieux souvenir. Il leur apprenait, par son exemple, à chercher dans la vie autre chose que la fortune et la satisfaction des ambitions vulgaires; il les encourageait en même temps par la bonté avec laquelle il accueillait leurs travaux, dès qu'il y apercevait quelque mérite. De tels hommes sont rares, et leur perte est pour nous un bien juste sujet d'affliction. Mais la Providence, qui les a suscités pour nous servir de modèles, les récompense sans doute, dans un monde meilleur, du noble usage qu'ils ont fait de leurs hautes facultés. C'est dans cet espoir que j'adresse à notre regretté collègue un suprême adieu. »

COURS DE MATHÉMATIQUES DU COLLÉGE DE FRANCE PENDANT LE SECOND SEMESTRE.

Mécanique céleste. — M. *Serret*, membre de l'Institut, continuera à traiter du mouvement de rotation de la Terre autour de son centre de gravité. Il étudiera ensuite les effets de la précession et de la nutation sur les positions apparentes des astres.

Les mardis et les vendredis à 10 heures.

Mathématiques. — M. *Liouville*, membre de l'Institut, continuera à traiter de diverses questions d'analyse.

Les lundis et samedis, à 10 heures.

Physique générale et mathématique. — M. *Bertrand*, membre de l'Institut, continuera à traiter des lois mathématiques relatives à la transformation des forces physiques.

Les mardis et vendredis, à midi.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. O. Hesse. — ... La citation que vous faites à la page 15 du *Bulletin* me remet en mémoire un travail de jeunesse dans lequel j'avais revêtu d'une forme peu élégante un théorème en réalité digne d'intérêt. Mais si l'on énonce ce théorème comme il suit :

« Six quelconques des huit points d'intersection de trois surfaces » du second ordre peuvent être considérés comme les sommets d'un » hexagone gauche. Les trois droites menées d'un point quelconque » de l'espace et telles que chacune d'elles rencontre deux côtés op» posés de l'hexagone déterminent, si l'on joint leurs points d'inter» section avec les côtés de l'hexagone dans l'ordre même de ces côtés, » un nouvel hexagone inscrit dans le premier *et dont les côtés se trou» vent toujours sur un hyperboloïde*. Les deux hexagones inscrits, » formés de cette manière avec le septième et le huitième point d'in» tersection des trois surfaces, sont situés sur le même hyperbo» loïde »,

on n'hésitera pas à le placer sur le même rang que le théorème de Pascal.

De même que le théorème de Pascal suffit à la construction d'un

sixième point d'une conique, quand cinq points sont déjà donnés, de même le théorème précédent, en supposant connues les propriétés de l'hyperboloïde, apprend à construire *linéairement* le huitième point d'intersection de trois surfaces, quand les sept premiers sont donnés.

Il existe certainement aussi, entre dix points d'une surface du second ordre, une relation géométrique semblable, facile à énoncer....

Munich, 30 avril 1870.

D[r] Otto Hesse.

Dans notre Compte rendu du *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* nous avions attribué à M. Liouville l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tang} x}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{8}\log 2.$$

M. Catalan nous écrit que cette formule n'est pas nouvelle ; il l'a déjà donnée dans un Mémoire dont voici le titre : *Mémoire sur la transformation des séries et sur quelques intégrales définies,* présenté à l'Académie royale de Belgique le 1[er] avril 1865. La seconde partie de cet élégant travail contient les valeurs d'un assez grand nombre d'intégrales définies, toutes déduites de l'intégrale définie déterminée autrefois par MM. Bertrand et Serret. (*Journal de M. Liouville,* t. VIII, p. 110 ; t. IX, p. 436.)

Nous profitons de l'occasion pour indiquer quelques autres Mémoires que le nom de M. Catalan recommande suffisamment à l'attention des géomètres.

Remarques sur l'équation $x^n - 1 = 0$. (Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique,* 2[e] Série, t. XXIX, n° 3, 1870.)

Sur les roulettes et les podaires. (Même *Bulletin*, 2[e] Série, t. XXVII, n° 2, 1869.)

Sur l'addition des fonctions elliptiques de première espèce. (*Ibid.*)

Jury du Concours quinquennal des Sciences physiques et mathématiques. Période de 1864-68. Rapport à M. le Ministre de l'Intérieur. Ce Rapport contient principalement une analyse des beaux travaux de M. Plateau, que le Jury a proposé pour le prix quinquennal.

Sur quelques sommations et transformations des séries. (Extrait des *Atti dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei*, t. XXIII, séance du 1[er] mai 1870.)

M. MANNHEIM nous communique l'énoncé du théorème suivant :

« Si l'on transforme une surface par la méthode des polaires ré-
» ciproques, les lignes asymptotiques se transforment en lignes
» asymptotiques, ou plutôt aux lignes asymptotiques d'une surface
» correspondent les développables formées par les tangentes aux
» lignes asymptotiques de la réciproque. »

Ce théorème est l'équivalent du suivant, qui est sans doute connu de tous ceux qui étudient sérieusement la Géométrie, mais qu'on n'énonce pas d'habitude.

« La définition des tangentes d'inflexion (tangentes coupant la
» surface en trois points consécutifs) est dualistique. Une tangente
» quelconque ne coupe la surface qu'en deux points consécutifs, et
» aussi on ne peut mener par cette droite que deux plans tangents à
» la surface, confondus avec celui qui la contient. Au contraire, si
» la tangente coupe la surface en trois points consécutifs, *trois* plans
» tangents menés par cette droite à la surface se confondront avec
» celui qui la contient. »

Le théorème de M. Mannheim trouve d'ailleurs une belle application dans l'étude de la surface des ondes, qui, comme on le sait, a ses deux nappes réciproques l'une de l'autre par rapport à un ellipsoïde.

G. D.

M. Ph. GILBERT, professeur à l'Université de Louvain, nous envoie un Mémoire présenté à l'Académie de Belgique, le 9 octobre 1869, sous le titre :

Sur une propriété des déterminants fonctionnels et son application au développement des fonctions implicites.

On trouvera démontrée dans cet élégant travail la formule que nous avions proposée dans une Note insérée aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXVIII, 1869, p. 134, et qui est destinée à remplacer la formule plus compliquée de Laplace. A ce propos, nous communiquons à nos lecteurs une remarque que nous devons à M. Hermite : *La formule qui donne le terme général de la série de Laplace n'est pas exacte pour les premiers termes du développement.*

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Hermann. — Kritik Newton'scher Astronomie. Gr. in-16. Rostock, Stiller. $\frac{1}{6}$ Thlr.

Jeans (H.-W.). — Nautical Astronomy and Navigation. New edit. Parts 1 and 2. 1 vol. royal 8. London, Longmans. 14 sh.

Kepler (J.). — Opera omnia. Edidit Ch. Frisch. Vol. VIII. 1. Lex.-8. Frankfurt a. M., Heyder u. Zimmer. 3 $\frac{1}{2}$ Thlr.

Liber (H.), und *Lühmann* (F.-V.). — Geometrische Constructions-Aufgaben. Gr. in-8. Pyritz, Backe. $\frac{3}{4}$ Thlr.

Lockyer (N.). — Questions on Lockyer's Elementary Lessons in Astronomy, for the use of Schools, by J.-F. Robertson. In-18, 96 p. London, Macmillan. 1 sh. 6 d.

Lutterbeck (A.-B.). — Zeitberechnungstafeln. Gr. in-fol. Giessen, Ricker. $\frac{1}{4}$ Thlr.

Mädler (J.-H. von). — Reden und Abhandlungen über Gegenstände der Himmelskunde. In-8. Berlin, Oppenheim. 2 $\frac{2}{3}$ Thlr.

Mathematiske Formler til Brug ved Artium og anden Examen. Christiania, Lund. 6 sk.

Meynert (Th.). — Beiträge zur Kenntniss der centralen Projection der Sinnesoberflächen. Lex.-8. Wien, Gerold. 16 Ngr.

Nautical Magazine for 1869. In-8. London, Simpkin. 14 sh. 6 d.

Nordlinger (H.). — Würtembergisch-metrische Reduktionstafeln nebst Tabellen vierstelliger Logarithmen, Kreisflächentafel für Durchmesser von 1 bis 1000 und Verwandlungstabelle für die gewöhnlichsten Geldsorten. 2. Aufl. Gr. in-8. Stuttgart, Metzler. 16 Ngr.

Oppolzer (Th.). — Definitive Bahnbestimmung des Planeten (64) « Angelina. » Lex.-8. Wien, Gerold. 9 Ngr.

Petterson (C.-A.). — Lärobok i Navigations-Vetenskapen. Tredje upplagan. Efter författarens död utgifven af C. Skogman. In-8, 223 sid. och 1 karta. Stockholm, Norstedt och Söner. 5 rd.

Sabato (V.). — Elementi di Aritmetica. In-8, 216 p. Lecce, tip. Garibaldi. 3 fr. 50 c.

Sabato (V.). — Elementi di Geometria. In-8, 104 p. con 4 t
Lecce, tip. Salentina. 2 fr. 50

Sabato (V.). — Problemi geometrici. In-8, 24 p. Lecce, tip. Ga
baldi. 60

Schlotke (J.). — Stereoskopische Figuren. Ein Anschauungsmi
zum Gebrauche beim Studium der Stereometrie und sphärisch
Trigonometrie. In-8. In Carton. Hamburg, Friederichsen. 1 Th. 6

Smith (J.-H.). — A Treatise on Elementary Algebra, for use of C
leges and Schools. Post-8, 390 p. London, Rivingtons. 6 sh.

Smith (J.-H.). — A Treatise on Elementary Statics. 2[d] edit., roy
100 p. London, Rivingtons. 5 sh.

Sonnet (H.). — Premiers éléments de Calcul infinitésimal à l'u
des jeunes gens qui se destinent à la carrière d'ingénieur. I
363 pages. Paris, Hachette.

Theorell (A.-G.).—Proportionslärans elementer. In-8, 39 sid. St
holm, Haeggström. 50

Ulffers (D.-W.). — Praktische Anleitung und Tafeln zur Berech
von Dreiecks-, Vierecks-, und Polygon-Netzen ohne Logarith
4. Aufl. Gr. in-8. Koblenz, Baedeker. 2 T

RECTIFICATION.

Dans notre article sur l'important ouvrage de M. Serret (Paul), *Géométri
direction*, nous avions attribué à M. Hesse la priorité, non de la méthode,
d'un théorème donné par M. Serret et relatif à 6 points sur une conique (
p. 11). Ce théorème se trouve, en effet, dans les *Vier Vorlesungen aus
analytischen Geometrie* de M. Hesse, mais il avait déjà été publié par M.
Serret dans une suite d'articles insérés aux *Nouvelles Annales de Mathémati*
en 1865. Le petit Traité de M. Hesse ne date que d'octobre 1866. Nous de
dons pardon à nos lecteurs et à M. Serret de l'erreur involontaire que
avons commise; nous n'osons pas répondre, malgré les soins que nous appor
à cette publication, de l'exactitude de toutes les indications si nombreuses
nous faut donner régulièrement. En tous cas, nous accueillerons avec recon
sance toutes les rectifications qu'on voudra bien nous indiquer.

G. D.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

OPPOLZER (TH.). — LEHRBUCH ZUR BAHNBESTIMMUNG DER KOMETEN UND PLANETEN. Erster Band. — Gr. in-8°; 1870. Leipzig, Verlag von W. Engelmann. Pr. : 4 ⅔ Thlr.

M. Oppolzer vient de publier la première Partie de ses *Leçons d'Astronomie* à l'Université de Vienne; cette Partie a pour objet la détermination de l'orbite d'un corps céleste, comète ou planète, d'après trois ou quatre observations.

Ce problème a, comme on sait, provoqué les recherches des plus grands géomètres et astronomes : au commencement de ce siècle, Gauss en a donné, dans le cas des planètes, une solution merveilleuse de simplicité, d'élégance et de précision; c'est en grande partie d'après la méthode de Gauss qu'ont été calculées les orbites des cent dix petites planètes découvertes jusqu'ici entre Mars et Jupiter. Divers perfectionnements ont été successivement apportés à la méthode par les astronomes qui s'occupaient de ces recherches. M. Oppolzer les reproduit avec soin, et propose lui-même une nouvelle méthode pour la détermination de l'orbite d'une planète d'après trois ou quatre observations; dans les cas où il l'a appliquée, elle l'emporte, au point de vue de la précision et de la rapidité, sur celle de Gauss. Ne serait-ce donc qu'à ce titre, son Ouvrage ne fait pas double emploi avec le livre très-soigné publié récemment sur le même sujet par Watson (*); il est appelé à rendre des services utiles aux amis de l'Astronomie; aussi pensons-nous qu'on désirera voir paraître le plus promptement possible la seconde Partie, celle où l'auteur exposera la correction des éléments de l'orbite d'après un grand nombre d'observations, et en tenant compte des perturbations *spéciales* produites par les planètes voisines du corps céleste que l'on considère.

Nous allons essayer de donner une idée des matières traitées dans le premier volume.

La première Partie (partie préparatoire) s'étend jusqu'à la page 92; l'auteur y définit d'abord avec précision les éléments des orbites des comètes, sans faire de distinction entre le mouvement direct et le mouvement rétrograde, en comptant l'inclinaison de zéro à 180 de-

(*) WATSON, *Theorical Astronomy*; Philadelphie, 1868.

grés; il met en regard les éléments de deux orbites, exprimés dans ce système et dans l'ancien, où l'on spécifie la nature du mouvement, direct ou rétrograde. Il s'occupe ensuite de la transformation des coordonnées écliptiques en équatoriales ou inversement, donne des exemples numériques, et indique les précautions à prendre, dans certains cas, pour obtenir toujours la plus grande précision, par exemple quand les latitudes sont très-faibles. Il rappelle les formules pour passer des coordonnées géocentriques aux héliocentriques et les formules inverses, celles qui permettent de tenir compte de la parallaxe, quand on connaît la distance de l'astre à la Terre, ou, quand on ne la connaît pas, en introduisant, dans ce dernier cas, le *lieu fictif*; en opérant ainsi, on a l'avantage de pouvoir tenir compte tout de suite de la latitude du Soleil.

Pour le mouvement dans l'orbite parabolique, nous trouvons, à la fin du volume, la Table de Barker légèrement modifiée; c'est la Table V, qui donne la valeur de $M = \frac{t}{q^{\frac{3}{2}}}$ pour les valeurs de v comprises entre zéro et 30 degrés, et variant de minute en minute, et les valeurs de $\log M$, quand v est compris entre 30 et 175 degrés; la Table VI permet d'appliquer la méthode de Bessel, quand l'anomalie vraie est trop forte, plus grande que 167 degrés, et elle est alors d'un emploi plus commode que la Table de Barker.

Pour les orbites voisines de la parabole, nous voyons mentionnées les méthodes de Bessel et de Brünnow, tandis que celle de Gauss y est traitée en détail et avec des exemples numériques; l'application de cette méthode est facilitée par l'emploi des Tables V et VII.

Les derniers Chapitres de la première Partie ont en vue les corrections de précession, nutation et aberration.

Nous arrivons à la deuxième Partie, la détermination des orbites, et d'abord celle des orbites paraboliques.

Cinq données suffisant pour déterminer une orbite parabolique, la seconde observation sera employée seulement à fournir une relation entre les deux quantités nécessaires à fixer la position d'un grand cercle auxiliaire passant par le second lieu observé. L'auteur expose les relations connues provenant de ce que les trois positions de la comète sont dans un plan passant par le Soleil, et il en tire l'équation

$$\rho'' = m + M\rho',$$

ı et M étant des fonctions des quantités observées et des secteurs iangulaires compris entre le Soleil et les positions de la comète rises deux à deux.

Il démontre ensuite l'équation d'Euler (appelée d'ordinaire l'*équa-on de Lambert*), reproduit une transformation élégante d'Encke lative à cette équation, et qui permet de calculer aisément la corde mprise entre deux positions de la comète, quand on connaît les istances de ces positions au Soleil et le temps que la comète emploie passer de l'une à l'autre. Il développe en séries les expressions es secteurs triangulaires, détermine l'ordre de petitesse des divers rmes, et montre très-bien qu'on aura la précision désirable si l'on sujettit le grand cercle auxiliaire à passer par le lieu moyen du oleil; c'est la méthode d'Olbers qui donne $m = 0$, et simplement $'' = M\rho'$. Si le grand cercle dont on vient de parler coïncide à peu rès avec celui qui passe par les positions extrêmes de la comète, la uantité M se présente presque sous la forme $\frac{0}{0}$; elle est mal déter-inée. C'est le cas d'exception de la méthode d'Olbers. M. Oppolzer herche à déterminer M le mieux possible par un choix convenable u grand cercle, et, au lieu de le faire passer par le lieu moyen du oleil, il trouve qu'il faut le prendre perpendiculaire au grand cercle mené par les positions extrêmes de la comète. Mais alors il perd la orme simple d'Olbers; m n'est plus nul, et il a

$$\rho'' = m + M\rho'.$$

Cela constitue donc une méthode qu'il propose pour remplacer celle l'Olbers, mais seulement dans le cas d'exception.

En cherchant, d'après Clausen, avec quelle précision se trouvent déterminés les éléments dans la méthode d'Olbers, il montre que la ienne (pour le cas d'exception) est de beaucoup préférable à celles qu'ont proposées pour le même cas Encke et Klinkerfues.

Puis vient le calcul de ρ' par une série d'hypothèses et d'inter-polations; les formules sont appliquées à la comète III de 1867 d'après la méthode d'Olbers et d'après celle de l'auteur. On trouve ensuite le calcul usuel des éléments à l'aide de ρ' et ρ''', et le moyen de faire une première correction de l'orbite, quand le lieu moyen calculé ne coïncide pas avec le lieu moyen observé; on modifie convenablement la valeur de M.

Enfin l'auteur traite avec facilité une question intéressante, la

détermination de l'orbite parabolique d'un essaim d'étoiles fil[...]
d'après la connaissance du point radiant.

Détermination de l'orbite d'une planète d'après trois observati[...] Méthode de Gauss. — M. Oppolzer arrive rapidement, avec Gau[...] Hansen, à l'équation

$$K \cos\beta'' \rho'' = b_0 + \frac{c_0 Q}{r''^3},$$

où K, β'', b_0, c_0 sont des fonctions des données de l'observatio[...] développement en série de Q lui montre que, dans la première [...] proximation, on peut prendre

$$Q = \tau' \tau''',$$

et même il ajoute, avec Encke, un petit terme de l'ordre de [...] négligés, mais qui est souvent plus sensible, et du reste aisé à [...] culer.

Les cas d'exception de la méthode de Gauss sont exposés [...] détail; avant tout, les intervalles des observations ne doivent [...] être trop petits; dans le cas d'une planète, il faut généralement [...] le mouvement géocentrique soit d'au moins 1 ou 2 degrés, et [...] grés dans le cas d'une comète. Il faut, en second lieu, que le [...] cercle qui passe par les positions extrêmes de la planète et cel[...] contient les lieux moyens de la planète et du Soleil ne se co[...] pas sous un angle trop voisin de zéro ou de 180 degrés. C'est cet a[...] en quelque sorte le poids de la détermination de l'orbite, [...] M. Hansen voudrait toujours voir figurer à côté des éléments. M. [...] polzer propose avec raison de prendre pour criterium le produit [...] sinus de l'angle précédent par le sinus de la distance des li[...] moyens de la planète et du Soleil. En dernier lieu, les latitudes [...] la planète ne doivent pas être trop petites.

L'auteur donne des formules qui ne sont pas sujettes à excep[...] tout en étant assez simples, pour déduire ρ' et ρ''' de ρ'' supposé co[...]

Il fait voir ensuite, d'après V. Knorre, que, dans les hypoth[...] successives, on peut se contenter de faire varier Q, sans chang[...] même temps P et Q, comme le fait Gauss. La suite du calcul [...] peu près la même que dans le *Theoria motus*; mentionnons cep[...] dant la fraction continue de M. Hansen, qui très-souvent off[...] moyen le plus expéditif pour le calcul de $\eta - 1$.

Vient ensuite un résumé des formules, avec distinction du ca[...]

st complétement inconnue (et où l'on ne peut pas corriger le l'aberration) et de celui où elle est approximativement et enfin une application numérique à la planète Elpis.
encore la détermination des éléments dans le cas d'une isine de la parabole, et son application à la comète III

ination de l'orbite d'une planète d'après trois observations : le M. Oppolzer. — L'auteur a trouvé une nouvelle solution emble surpasser les méthodes connues sous le rapport de la et de la rapidité. Ainsi, dans l'exemple de Cérès rapporté s, et où l'on embrasse un intervalle de temps de deux cent jours, la convergence des approximations est si faible, que, is hypothèses, le résultat n'est pas satisfaisant; grâce à un interpolation, la quatrième hypothèse approche assez de la éanmoins une cinquième est encore nécessaire, et, sans le interpolation, il n'aurait pas fallu moins de neuf hypothèses. ouvelle méthode, deux hypothèses suffisent le plus souvent, sième donne toute la précision qu'on peut espérer avec les sept décimales. Les calculs préparatoires sont moins longs, e hypothèse ne demande pas plus de temps que dans la mé- Gauss. A l'appui de ce qu'il avance, l'auteur reproduit *in* e calcul de l'orbite de Cérès.
ons en quelques mots l'esprit de la méthode. On a

$$\rho' = (\mathrm{I})' + (\mathrm{II})' x + (\mathrm{III})' xy,$$
$$\rho''' = (\mathrm{I})''' + (\mathrm{II})''' x + (\mathrm{III})''' xy,$$

ients étant connus, et x et y ayant les valeurs

$$x = \frac{4}{(r' + r''')^3}, \quad y = \frac{r''' - r'}{r' + r'''}.$$

ge d'abord y et l'on suppose $x = 0,04$; on calcule ρ' et ρ''', t r''', et x; la valeur de x ne sera pas égale en général à $0,04$; série d'hypothèses et d'interpolations, et en tenant compte le petites quantités négligées dans ρ' et ρ''', on arrive rapi- à la vraie valeur de x, y, ρ' et ρ''', après quoi on rentre dans odes ordinaires.
ur fait une application de ses formules à la planète Hélène.
ination d'une orbite d'après quatre observations. — C'est à

cette méthode qu'on doit avoir recours quand les latitudes sont petites; on a alors deux données de trop. Gauss met de côté les latitudes des observations extrêmes. M. Oppolzer, au contraire, regarde les observations extrêmes comme complètes, et, quant aux observations intermédiaires, chacune n'intervient que pour fournir une relation entre les quantités nécessaires à fixer les positions de deux grands cercles auxiliaires passant par les lieux moyens de la planète. Le sens de la méthode est semblable à celui de la nouvelle méthode dans le cas de trois observations. Les distances de la planète à la Terre, dans les positions extrêmes, sont encore exprimées en fonction des données de l'observation, et des deux inconnues x et y; puis on fait les hypothèses successives. Quant aux cercles auxiliaires, on les prendra généralement perpendiculaires sur l'écliptique. En opérant ainsi, le calcul n'est guère plus long que dans le cas de trois observations.

L'auteur fait un résumé des formules, et les applique à Vesta et Elpis.

F. Tisserand.

PAUL MANSION, docteur ès sciences physiques et mathématiques, chargé du cours d'Analyse infinitésimale à l'Université de Gand. — Théorie de la multiplication et de la transformation des fonctions elliptiques. *Essai d'exposition élémentaire.* — Gr. in-8°, 120 p. Paris, Gauthiers-Villars; et Gand, Hoste. Prix : 4f,50.

Depuis une quarantaine d'années, les fonctions elliptiques ont été l'objet de nombreux travaux, entrepris sur tous les points de cette belle théorie. Il serait très-désirable qu'un géomètre habile voulût bien consacrer ses soins à une œuvre d'exposition complète, destinée à remplacer l'Ouvrage trop ancien de l'illustre Legendre. Cette habitude d'écrire de grands Traités sur les différentes parties de la science paraît, malheureusement, perdue aujourd'hui; et, à part quelques heureuses exceptions, les géomètres éminents, loin d'imiter Euler, Lagrange, Laplace, Legendre, Monge, etc., préfèrent condenser le résultat de leurs recherches personnelles dans des Mémoires écrits souvent avec trop de concision et ne contenant que les résultats essentiels de leurs études. Pourtant, par suite du développement

actuel des travaux scientifiques, rien ne serait plus nécessaire aujourd'hui que ces Ouvrages complets, servant de point de repère aux érudits, et contribuant d'une manière considérable à l'instruction des géomètres et aux progrès des recherches ultérieures. Les Ouvrages de M. Salmon, pour ne citer qu'un exemple, n'ont pas seulement été utiles aux élèves; ils ont rendu, même aux savants, de véritables services, comme l'attestent les nombreuses citations qu'on rencontre dans tous les Recueils de Mémoires mathématiques.

Le livre dont nous avons à rendre compte traite seulement de la multiplication et de la transformation des fonctions elliptiques, et même l'auteur a volontairement laissé de côté, les réservant sans doute pour un autre Travail, un grand nombre de questions se rattachant à cette théorie, telles que la multiplication complexe, l'introduction dans la transformation des fonctions Θ, les équations différentielles auxquelles satisfont le numérateur et le dénominateur des fractions rationnelles qu'on rencontre dans cette étude. M. Mansion s'est proposé pour but principal de donner la démonstration rigoureuse et complète des formules relatives à *tous* les cas de la multiplication et de la transformation. Les principes relatifs aux fonctions imaginaires ont permis à MM. Briot et Bouquet d'introduire, dans l'exposition de ce problème, un haut degré de simplicité. M. Mansion s'est proposé d'atteindre le même résultat sans s'appuyer sur des théories aussi élevées, et en n'employant, à peu près comme l'a fait Abel, que le principe de la double périodicité et les règles élémentaires de l'Analyse. Son ouvrage, écrit avec une parfaite connaissance du sujet, sera donc très-profitable, notamment aux personnes qui ne connaissent les fonctions elliptiques que par les Traités élémentaires et qui désirent en faire une étude plus approfondie et plus détaillée.

Un grand nombre de notes et d'indications bibliographiques témoignent de l'érudition et du soin que l'auteur a apportés à son travail. Enfin une Introduction de 36 pages est consacrée à l'analyse des principaux écrits sur la multiplication et la transformation. Le lecteur pourra donc reconnaître sans effort les points de l'exposition qui appartiennent à l'auteur et ceux qu'il doit à ses prédécesseurs dans l'étude de cette belle question.

G. D.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

SITZUNGSBERICHTE DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN. — WIEN, in Commission bei Karl Gerold's Sohn (*).

T. LVIII, juin-décembre 1868.

LOSCHMIDT (J.). — *Le potentiel d'une masse électrique en mouvement déduit du potentiel d'une masse en repos.* (8 p.)

UNFERDINGER (Fr.). — *Sur quelques formules remarquables de Trigonométrie sphérique.* (5 p.)

MATZEK. — *Sur la construction du plan tangent à une surface de révolution.*

Construction des lignes d'intensité lumineuse déterminée sur les surfaces de révolution, au moyen des sphères tangentes.

BOLTZMANN (L.). — *Sur les intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques.*

WEYR (E.) — *Sur les lignes de courbure des surfaces du second degré, et sur les systèmes confocaux de ces surfaces.* (24 p.)

SCHELL (A.). — *Théorie générale du planimètre polaire* (21 p., 1 pl.)

WEYR (E.). — *Généralisation du théorème de Desargues, avec des applications.*

SCHLESINGER (J.). — *Les surfaces projectives. Contribution à la constitution de la Géométrie descriptive dans le sens de la nouvelle Géométrie.* (8 p.)

BOLTZMANN (L.). — *Études sur l'équilibre de la force vive entre des points matériels en mouvement.* (44 p.)

LOSCHMIDT (J.). — *Mouvement de l'électricité dans le courant électrique.*

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie impériale des Sciences de Vienne.* Classe des sciences mathématiques et physiques. — Vienne, Carl Gerold fils.

Chaque année se compose de dix livraisons grand in-8. Publié en langue allemande.

Exner (S.). — *Sur le temps nécessaire pour la perception visuelle.* (32 p.)

Weyr (E.). — *Sur la génération des courbes du troisième ordre.* (12 p.)

Schlesinger (J.). — *Représentation des projections collinéaires et des principes projectifs sous une forme appropriée à la Géométrie descriptive.* (19 p.)

Oppolzer (Th.), Weiss et Řiha. — *Rapports sur l'Expédition autrichienne entreprise pour l'observation de l'éclipse totale de Soleil de l'année* 1868 *à Aden.* (5 art., 102 p., 2 pl.)

Mach (E.). — *Observations sur la stéréoscopie monoculaire.*

Obermayer (A.). — *Expériences sur l'écoulement de l'argile plastique.* (19 p., 3 pl.)

Staudigl (R.). — *Application des projections centrales et parallèles dans l'espace à la résolution de divers problèmes sur les surfaces du second ordre.* (20 p.)

Niemtschik (R.). — *Procédé simple pour mener, par des points extérieurs, des normales aux surfaces du second ordre.*

Staudigl (R.). — *Constructions diverses, relatives aux surfaces du second degré, exécutées à l'aide des surfaces coniques et cylindriques.* (12 p.)

Winckler (A.). — *Sur les intégrales abéliennes complètes.* (39 p.)

Boltzmann (L.). — *Solutions d'un problème de Mécanique.* (10 p.)

Stolz (O.). — *Sur les caractères distinctifs des maxima et des minima des fonctions de plusieurs variables.* (18 p.)

T. LIX, janvier-mai 1869.

Handl (A.). — *Théorie du baromètre à balance.* (10 p.)

Niemtschik (R.). — *Sur la construction des points d'intersection des cercles et des sections coniques.* (9 p.)

Weyr (E.). — *Construction du cercle de courbure des courbes podaires.* (8 p.)

Staudigl (R.). — *Construction de l'ellipse.* (12 p.)

WINCKLER (A.). — *Sur quelques questions d'analyse élémentaire.* (39 p.)

LOSCHMIDT (J.). — *Le second théorème de la théorie mécanique de la chaleur.* (24 p.)

UNFERDINGER (Fr.). — *Sur les deux intégrales générales*

$$\int x^n \cos[m\log(a+bx)]\,dx,\quad \int x^n \sin[m\log(a+bx)]\,dx,$$

et sur quelques formules qui s'y rattachent. (18 p.)

UNFERDINGER (Fr.). — *Différentes manières de mettre le produit*

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2)\ldots(a_{n-1}^2+b_{n-1}^2+c_{n-1}^2+d_{n-1}^2),$$

sous forme d'une somme de quatre carrés. (10 p.)

UNFERDINGER (Fr.). — *Sur les caractères de divisibilité des nombres.*

MILITZER (H.). — *Détermination des constantes d'un élément galvanique.* (9 p.)

NIEMTSCHIK (R.). — *Construction des points d'intersection de deux sections coniques.* (14 p.)

WINCKLER (A.). — *Sur le reste de la série de Taylor* (extrait). (16 p.)

LITTROW (K. von). — *Dénombrement des étoiles boréales du Catalogue de Bonn d'après leurs grandeurs.* (28 p.)

M. de Littrow fait suivre son Catalogue de calculs sur la distribution probable des étoiles dans l'espace, en les supposant à des distances égales les unes des autres. Ces considérations le conduisent à des conclusions à peu près conformes à celles de W. Herschel.

SCHLESINGER (J.). — *Représentation des projections collinéaires dans l'espace par des transformations orthogonales.* (9 p., 1 pl.)

BOLTZMANN (L.). — *Sur la résistance de deux cylindres creux superposés.* (10 p.)

STEFAN (J.). — *Sur les formules fondamentales de l'électrodynamique.* (77 p.)

Étude sur la loi d'action de deux éléments de courant donnée par Ampère.

Waltenhofen (A. von). — *Sur les limites de l'aimantation du fer et de l'acier.* (9 p.)

Oppolzer (Th.). — *Rapport sur l'Expédition autrichienne pour l'observation de l'éclipse totale de Soleil de 1868 à Aden. — VI. Coordonnées géographiques d'Aden.* (15 p.)

T. LX, juin-juillet 1869.

Boltzmann (L.). — *Sur l'action électrodynamique mutuelle des parties d'un courant électrique de forme variable.* (19 p., 1 pl.)

Kiechl (Fr.). — *Essais pour déterminer l'équivalent calorique de l'électricité* (19 p.)

En prenant pour unité d'électricité la quantité capable d'extraire de l'eau 1 gramme d'hydrogène à zéro centigrade et $0^m,760$ de pression, on demande le nombre des unités de chaleur qui peuvent être produites par l'emploi de cette unité d'électricité. Ce nombre est identique avec la chaleur de combustion de 1 gramme d'hydrogène (à zéro et $0^m,760$) dans l'oxygène, sous la condition que la vapeur produite soit transformée en eau à zéro. La moyenne des expériences conduit au nombre 33653.

Weiss (E.). — *Rapport sur l'Expédition autrichienne pour l'observation de l'éclipse totale de Soleil de 1868 à Aden. — VII. Observations d'étoiles filantes à Aden.* (15 p., 1 pl.)

Winckler (A.). — *Sur quelques intégrales multiples.* (9 p.)

Réduction de certaines intégrales multiples, portant sur des fonctions exponentielles.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, publiés par MM. les Secrétaires perpétuels (*). T. LXX.

N° 16. Séance du 18 avril 1870.

M. Moutard. — *Recherches sur les équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes.* (Mémoire présenté.)

L'Extrait inséré nous permet de donner à nos lecteurs une idée

(*) Voir *Bulletin*, p. 154.

des résultats obtenus par M. Moutard. Ce géomètre a entrepris l'étude minutieuse de la forme la plus élémentaire dont soit susceptible l'intégrale générale des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, à savoir : celle qui consiste en une relation unique entre les trois variables, deux fonctions arbitraires de quantités distinctes formées explicitement avec les trois variables, et les dérivées en nombre limité de ces fonctions arbitraires, les arbitraires n'entrant d'ailleurs sous aucun signe d'intégration.

Dans la première Partie de son Mémoire, M. Moutard donne la forme générale des équations aux dérivées partielles de la forme précédente, et indique comment on peut en effectuer l'intégration. La question est ramenée dans cette première Partie à l'intégration d'une équation linéaire de Laplace.

Dans la deuxième Partie, l'auteur construit l'équation de Laplace la plus générale, susceptible d'être intégrée entièrement sous forme finie, avec deux fonctions arbitraires et leurs dérivées en nombre déterminé *m* et *n*.

Enfin, dans la troisième Partie de son Mémoire, M. Moutard examine les équations particulières de la forme

$$\frac{d^2 z}{du\,dv} = \mathrm{A}(u, v)z$$

et cherche dans quel cas on peut en déterminer l'intégrale en termes finis. Il a trouvé la solution complète de ce problème, qui se présente dans plusieurs recherches géométriques.

Au reste, nous aurons l'occasion de revenir sur cette importante étude, quand elle aura été publiée.

M. G. Quesneville. — *Remarque relative à une Note M. C. Flammarion sur la loi du mouvement de rotation des planètes.*

N° 17. Séance du 25 avril 1870.

M. Delaunay. — *Découverte d'une petite planète à l'Observatoire de Marseille.*

M. Faye. — *Sur l'observation spectrale des protubérances solaires.* (Travaux de M. Respighi.)

M. Faye. — *Sur les procédés d'observation photographique proposés par M. Paschen pour le prochain passage de Vénus.*

M. de Saint-Venant. — *Comparaison des évaluations de la poussée des terres par la considération rationnelle de l'équilibre limite, et par l'emploi du principe dit* de moindre résistance, *de Moseley.*

M. Durrande. — *Sur les surfaces du quatrième ordre.*

M. Flammarion. — *Réponse à une observation relative à la loi du mouvement de rotation des planètes.*

M. Chasles. — *Nouvel énoncé d'un théorème de M. Spottiswoode.*

« Chaque point d'une surface est sextactique en dix des sections faites par les plans d'un faisceau dont l'axe passe par le point. »

M. Spottiswoode entend par sextactique un point d'une courbe qui admet une conique osculatrice au cinquième ordre. C'est l'expression dont il s'est servi, ainsi que M. Cayley, dans plusieurs Mémoires importants.

Sous cette nouvelle forme, le théorème est à l'abri des objections que nous lui avons adressées. (Voir *Bulletin*, p. 155.)

M. Chasles fait hommage à l'Académie, de la part de M. *Cremona*, d'un Mémoire en italien, extrait des *Comptes rendus de l'Institut royal Lombard* (2e série, t. III) sur les 27 droites d'une surface de troisième ordre, sujet qui, depuis quelques années, n'a pas cessé d'occuper les géomètres, et sur lequel M. *C. Jordan*, notamment, a adressé quelques Communications à l'Académie (*Comptes rendus*, 12 avril 1869, p. 865; 14 février 1870, p. 326), que cite M. Cremona.

N° 18. Séance du 2 mai 1870.

M. le Président informe l'Académie de la perte qu'elle vient de faire dans la personne de M. Lamé, décédé le 1er mai.

M. l'abbé Aoust — *Sur les roulettes en général.*

L'auteur étudie le roulement d'une courbe gauche sur une autre défini par la condition qu'à chaque instant les plans osculateurs des deux courbes au point de contact coïncident. Le mouvement de la courbe mobile rentre donc dans la classe de ceux qui se composent d'une suite de rotations. Il nous semble qu'on peut obtenir de tels mouvements d'une manière générale, en faisant rouler sur une surface gauche une surface gauche applicable sur la première, de manière qu'à chaque instant les génératrices correspondantes coïn-

cident. Alors toute ligne géodésique de la surface mobile roulerait sur la géodésique correspondante de la surface fixe, suivant le mode indiqué par M. l'abbé Aoust. Les théorèmes intéressants que donne d'ailleurs ce géomètre comprennent comme cas très-particuliers ceux qu'on connaissait déjà sur les roulettes planes et sphériques.

M. Breton (de Champ). — *Sur les lignes de plus grande pente à déclivité maximum ou minimum.*

L'auteur démontre que de telles lignes ont toujours pour projection horizontale une ligne droite.

N° 19. Séance du 9 mai 1870.

M. Mannheim. — *Quelques résultats obtenus par la considération du déplacement infiniment petit d'une surface algébrique.*

« Steiner, dans un *Mémoire sur les courbes et les surfaces algébriques* (*), a cherché le nombre des normales qu'on peut abaisser d'un point sur une courbe algébrique ou sur une surface algébrique. Pour une courbe de degré m, il arrive de trois manières à montrer que, d'un point, on peut mener à cette courbe m^2 normales. Son premier procédé consiste à déplacer infiniment peu la courbe autour du point donné; les m^2 points d'intersection de la courbe considérée dans sa première position et dans sa position voisine, sont les pieds des normales cherchées.

» Steiner n'a pas étendu ce procédé au cas de l'espace. M. August a fait connaître cette généralisation (**); il considère pour cela deux déplacements infiniment petits autour de deux droites quelconques issues du point où l'on veut mener les normales.

» Je me propose de montrer comment, dans l'espace, l'emploi de déplacements infiniment petits conduit non-seulement au nombre de normales qu'on peut abaisser d'un point sur une surface algébrique, mais encore à quelques autres résultats nouveaux. »

Après les quelques lignes qui précèdent et qui forment le début de la Communication de M. Mannheim, nous indiquerons les théorèmes suivants :

« Les pieds des normales abaissées de tous les points d'une droite sur une surface de degré m appartiennent à une courbe de degré m^2.

(*) *Journal de Crelle*, t. XLIX; — *Journal de M. Liouville*, t. XX.

(**) *Journal de Crelle-Borchardt*, t. LXVIII, p. 242.

» Les normales forment une surface gauche d'ordre m^3.

» Il y a donc m^3 normales rencontrant deux droites.

» Il y a $m^3\alpha\beta$ normales rencontrant deux courbes d'ordres α et β. »

M. C. Jordan. — *Sur la division des fonctions hyperelliptiques.*

Nous citerons seulement le théorème suivant :

« Si l'on connaissait l'une des racines de l'équation X_n de la division en p parties égales des fonctions à $2n$ périodes, on obtiendrait les autres en résolvant : 1° une équation X_{n-1} analogue à celle de la division en p parties des fonctions à $2n - 2$ périodes ; 2° une équation abélienne de degré $p - 1$; 3° $2n - 1$ équations abéliennes de degré p.

M. Allégret. — *Note sur l'existence de nouvelles classes renfermant chacune un nombre illimité de courbes algébriques planes, dont les arcs offrent une représentation exacte de la fonction elliptique de première espèce.*

M. Valson. — *Étude sur les actions moléculaires, fondée sur la théorie de l'action capillaire.*

TRANSACTIONS of the Cambridge Philosophical Society. — In-4°. T. XI, 1866-69.

Cayley (A.). — *Sur la théorie de l'involution.* (18 p.)

U, U', U''... représentant des quantiques, et $\lambda, \lambda', \lambda'', \ldots$ des constantes, les quantiques sont dits en involution, s'ils satisfont à une équation linéaire de la forme

$$\lambda U + \lambda' U' + \lambda'' U'' + \ldots = 0.$$

En particulier le lieu de l'équation $U + kV = 0$ est en involution avec les lieux $U = 0$, $V = 0$. M. Cayley s'occupe surtout, dans ce Mémoire, des points singuliers du lieu $U + kV = 0$.

Cayley (A.). — *Sur un cas de l'involution des courbes du troisième degré.* (42 p.)

Ce Mémoire se rapporte à l'involution

$$xyz + k(x + y + z)^3(\lambda x + \mu y + \nu z) = 0.$$

Voir le Mémoire précédent, ainsi que les deux Mémoires du même

auteur : *On the Cubic Centres of a Line with respect to three Lines and a Line*, insérés dans le *Philosophical Magazine*, t. XX, p. 418-42 (1860), et t. XXII, p. 433-436 (1861).

Cayley (A.). — *Sur la classification des courbes du troisième degré.* (48 p., 2 pl.)

Exposition des classifications établies par Newton, Stirling, Murdoch, puis, sur des bases nouvelles, par Plücker, dans son *System der analytischen Geometrie* (1835). L'auteur développe, plus que ne l'a fait Plücker, la théorie de la division en groupes.

Cayley (A.). — *Sur les cônes et les courbes du troisième degré.* (16 p.)

Ce Mémoire est consacré au développement du théorème établi par Newton dans son *Enumeratio linearum tertii ordinis*, que toutes les courbes du troisième degré peuvent être considérées comme des projections coniques des cinq paraboles divergentes.

De Morgan (A.). — *Sur l'infini et sur le signe d'égalité.* (45 p.)

De Morgan (A.). — *Théorème concernant les séries neutres.* (13 p.)

M. de Morgan appelle ainsi les séries telles que $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ qui forment le passage entre les séries dont la somme converge vers une limite déterminée, et celles dont la somme croît à l'infini. La question qui fait l'objet de ce Mémoire est de savoir si une telle série ne provient pas toujours du développement d'une fonction qui, pour la valeur considérée de la variable, tend vers la limite $\frac{1}{2}$.

De Morgan (A.). — *Sur l'histoire des origines des signes + et —.* (10 p.)

Clifton (R.-B.). — *Note sur le Mémoire précédent.* (6 p.)

M. de Morgan a trouvé l'indication de ces signes dans un Ouvrage plus ancien de près de quarante ans que le livre de Rudolf, et publié en 1489 par Johannes Widman, d'Egra.

Todhunter (I.). — *Sur la méthode des moindres carrés.* (20 p.)

Laplace a étudié la méthode des moindres carrés dans sa *Théorie des probabilités*, pour les seuls cas de la détermination d'*un* et de *deux* éléments d'après un grand nombre d'observations, et il annonce, sans le justifier, que son analyse, déjà très-compliquée pour le cas de deux éléments, pourrait s'étendre à un nombre quelconque d'élé-

ments. M. Todhunter, dans son *Histoire du calcul des probabilités* (*), (p. 578), a présenté des recherches sur le cas général du problème, en se servant d'une méthode toute différente de celle que Laplace a employée pour deux éléments. Dans le présent Mémoire, il démontre un résultat remarquable, que Laplace n'avait fait qu'énoncer dans le premier *Supplément* à son Ouvrage. Il développe ensuite le procédé de Laplace relatif à deux éléments, et en déduit plusieurs résultats qui s'appliquent à des éléments en nombre quelconque.

De Morgan (A.). — *Sur la racine d'une fonction quelconque, et sur les séries neutres* (2e Mémoire). (28 p.)

Démonstration du théorème, que toute équation $\varphi(n) = 0$, dans laquelle $\varphi(n)$ peut se mettre sous la forme $P + Q\sqrt{-1}$, admet au moins une racine.

Cayley (A.). — *Sur certaines surfaces gauches.* (13 p.)

Le but de ce Mémoire est d'introduire certaines modifications aux considérations employées par M. J. de la Gournerie, dans son livre intitulé : *Recherches sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques, avec des notes par A. Cayley.* (In-8°, Paris, 1867.)

Cayley (A.). — *Sur les six coordonnées d'une ligne.* (34 p.)

En désignant par p, q, r, s, t, u les six déterminants que l'on peut former avec le tableau d'éléments

$$\left\| \begin{matrix} x, & y, & z, & w \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta \end{matrix} \right\|,$$

on a identiquement

$$ps + qt + ru = 0.$$

La considération du cône représenté par une équation homogène $V = 0$ entre les six coordonnées p, q, r, s, t, u a déjà conduit l'auteur, il y a plusieurs années, à de nombreux et importants résultats. Ces coordonnées sont les mêmes qu'a employées Plücker, dans son remarquable Mémoire : *On a new Geometry of Space* (*Phil. Trans.*, 1865, p. 725-791), mais en suivant une marche toute diffé-

(*) *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace.* Cambridge and London, 1865. In-8°, XVI-624 p. Prix : 18 shillings.

rente. *Voy.* encore le Mémoire de Lüroth : *Zur Theori* *schiefen Flächen* (*Journal de Crelle-Borchardt*, t. LX p. 130-152). M. Cayley applique ici ces coordonnées à de l'involution de six lignes.

Röhrs (J.-H.). — *Sur les efforts qu'éprouvent les pièces et sur les vibrations des corps solides en général.* (36 p.)

Discussion de certaines équations, dont l'intégration timer à peu près la quantité dont la tension d'une piè artillerie, sous l'action de l'inflammation de la poudre passer la tension qu'elle éprouverait si la pression des la combustion agissait suivant les lois de la statique. Re moyens qui peuvent rendre un canon plus efficace, sans le risque de la rupture.

Boole (G.). — *Des propositions définies numériquement.*

Ce Mémoire posthume, communiqué par M. de Mor à un ordre de questions philosophiques dont ce dernie ticulièrement occupé, et qui concernent la logique d exactes.

Stokes (G.-G.). — *Supplément d'un Mémoire sur la des constantes arbitraires qui se présentent dans les dévelo vergents.* (14 p.)

Les transformations exposées dans ce Mémoire sont, faite de la question de la discontinuité des constantes, de culiers de celles qui sont contenues dans un Mémoire de M (*Journal de Crelle*, t. XV, 1836, p. 39-127.) Mais la d des constantes, qui forme le principal objet du présent été complétement laissée de côté par le géomètre allemand

Airy (G.-B.). — *Sur la décomposition en facteurs* $x^n - 2\cos n\alpha + \frac{1}{x^n}$. (18 p.)

Adams (J.-C.). — *Note sur la décomposition en* $x^n + \frac{1}{x^n} - 2\cos n\alpha$. (2 p.)

MEMORIE dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna (*). — Serie seconda.

T. VII; 1868.

Cremona (L.). — *Préliminaires d'une théorie géométrique des surfaces.*

Mémoire divisé en deux Parties, dont la première a paru dans le tome précédent. (46-50 p.)

Chelini (D.). — *Usage du principe géométrique de la résultante dans la théorie des tétraèdres.* (20 p.)

Beltrami (E.). — *Sur les propriétés générales de la surface d'aire minimum.* (70 p.)

Résumé des travaux des divers géomètres sur ce sujet, précédé d'un historique très-complet de la question.

T. VIII; 1869.

Chelini (D.). — *De la courbure des surfaces, par une méthode directe et intuitive.* (50 p.)

Sacchetti (L.). — *Considérations sur l'origine de la théorie mécanique de la chaleur.* (14 p.)

Cremona (T.). — *Sur les surfaces gauches du quatrième degré.* (16 p.)

Chelini (D.). — *Théorie des coordonnées curvilignes dans l'espace et dans les surfaces.* (52 p.)

Beltrami (E.). — *Sur la théorie générale des paramètres différentiels.* (42 p.)

GIORNALE di matematiche. — 8e année. Janvier-février, mars-avril 1870 (**).

Isè (E.). — *Note sur la résultante de deux équations.* (27 p.; it.)

Exposition d'une méthode qui conduit à une règle pour écrire immédiatement la résultante de deux équations, l'une du degré n, l'autre

---

(*) Un volume par année, divisé en quatre fascicules, grand in-4. En langue italienne.

(**) Voir *Bulletin*, p. 152.

du deuxième ou du troisième degré. L'expression de la résultante est ordonnée suivant les puissances du terme connu de l'équation de degré inférieur, et a une forme telle, qu'elle n'admet pas de réductions ultérieures.

Calzolari (L.). — *Note sur l'équation* $u^2 = Ax^2 \pm By^2$. (7 p.; it.)

Démonstration d'un théorème différent de celui de Legendre, et qui non-seulement rend manifeste la possibilité ou l'impossibilité en nombres entiers de l'équation $u^2 = Ax^2 \pm By^2$, mais encore, sans recourir au procédé de Lagrange, présente l'avantage de déterminer pour x, y, u deux systèmes de valeurs, dont chacun sert ensuite à composer les formules de la solution générale.

Aschieri (F.) — *Sur un complexe du second degré.* (3 p.; it.)

L'objet de cette Note est une génération des complexes du second degré, dont l'équation peut se ramener à la forme particulière qui ne contient que les carrés des coordonnées de la ligne droite. L'auteur trouve que, pour tout complexe du second degré dont l'équation est réductible à la forme susdite, il existe une série simplement infinie de surfaces du second degré, que l'on peut faire correspondre deux à deux, de manière que le complexe lui-même soit ou le lieu géométrique des droites divisées harmoniquement par deux surfaces correspondantes, ou encore l'ensemble des droites qui déterminent, avec les plans tangents de ces surfaces correspondantes, des faisceaux harmoniques de quatre plans.

Battaglini (G.). — *Sur les formes ternaires quadratiques* (1re Partie). (22 p.; it.)

Ce Mémoire a pour objet la représentation des formes ternaires quadratiques. L'auteur commence par considérer le *continu* (*il continuo*) à deux dimensions d'une manière tout à fait abstraite et indépendante des conceptions géométriques. En supposant que l'on considère trois variables, et que l'on attribue à leurs rapports toutes les valeurs possibles, l'*ensemble* de ces valeurs est ce qui constitue le *continu* à deux dimensions. L'*élément* de ce continu est la *détermination* qui s'y opère par les valeurs attribuées aux rapports entre les variables, et les valeurs elles-mêmes de ces variables sont les *coordonnées* de l'élément. Le principe de dualité, qui coordonne par couples les propriétés du continu, résulte immédiatement de la con-

m d'une seconde espèce d'éléments, dont chacun a pour coor-
les coefficients des variables dans une relation linéaire établie
s mèmes variables. Les deux espèces d'éléments du continu à
nensions sont distinguées, dans la représentation géométrique
nu, sous les noms d'éléments de *première classe* et d'éléments
ier *ordre*. D'une manière indépendante de toute considération
ique, l'auteur définit encore les concepts : 1° de *triade fon-*
le d'éléments; 2° de coordonnées d'un élément *par rapport* à
ide quelconque; 3° de rapport *anharmonique* et *harmonique*
ux couples d'éléments; 4° de couples en *involution*, et 5° de
mikarmoniques d'éléments.

s ces préliminaires, l'auteur passe à la discussion de la qua-
ernaire; en supposant qu'elle détermine dans le continu une
léments de première classe, par la considération des couples
nts de la série *infiniment peu différents* entre eux, on déduit de
e proposée une autre forme ternaire quadratique (la forme
e à la première), laquelle détermine dans le continu une série
nts de premier ordre, intimement liée à la série des éléments
ière classe. Les formes ternaires quadratiques conjointes cor-
lent à la double représentation géométrique d'une forme ter-
avoir : comme *locale*, ou comme *enveloppe* d'éléments. Ensuite,
r s'occupe de trouver : 1° la condition pour qu'une forme qua-
e ternaire puisse s'exprimer comme forme quadratique à deux
es, auquel cas la série d'éléments de première classe ou de
r ordre, représentée par la quadrique, se réduit à une couple
nts de premier ordre ou de première classe; et 2° la condition
a'une forme ternaire quadratique puisse s'exprimer au moyen
eule variable, auquel cas les éléments de la couple en question
nt l'un avec l'autre.

considérations du *covariant* d'une forme ternaire quadratique,
nant pur de la forme par rapport à un élément, ou *émanant*
le la forme par rapport à une couple d'éléments, conduit l'au-
tablir les propriétés *harmoniques* de la forme ternaire relatives :
élément de premier ordre ou de première classe, harmonique
ément de première classe ou de premier ordre par rapport à
adrique (*pôle* et *polaire*); 2° aux couples d'éléments de pre-
rdre ou de première classe, harmoniques l'un de l'autre par
t à une quadrique (*pôles conjugués* et *polaires conjuguées*); et

enfin 3° aux triades d'éléments conjuguées harmoniques par rapport à la même quadrique (triades de *pôles conjugués* et de *polaires conjuguées*).

Après avoir exposé quelques propriétés relatives aux éléments communs à une quadrique et à une forme linéaire, M. Battaglini passe au développement de la très-importante conception de Cayley [*Sixth Memoir on Quantics* (*Philos. Trans.*, vol. CXLIX, 18)], au moyen de laquelle on établit les relations métriques des figures sur une base entièrement analytique. En imaginant avec Cayley deux quadriques conjointes, auxquelles se rapportent tous les éléments de première classe et de premier ordre du continu, et qui constituent l'*absolu* du système, on peut, au moyen des coefficients de ces quadriques et des coordonnées de deux éléments (de première classe ou de premier ordre) composer une formule que l'on prend, par définition, comme expression analytique de l'*intervalle* entre ces deux éléments. Cette expression est caractérisée par la propriété que, pour trois éléments quelconques, de première classe ou de premier ordre, appartenant à un même élément de premier ordre ou de première classe, l'intervalle entre le premier et le second élément, ajouté à l'intervalle entre le second et le troisième, donne l'intervalle entre le premier et le troisième. De l'expression de l'intervalle on déduit: 1° que deux éléments de première classe ou de premier ordre, d'intervalle égal à un quadrant, sont conjugués harmoniques par rapport à l'absolu; 2° que l'intervalle entre deux éléments de première classe ou de premier ordre est égal à l'intervalle entre les deux éléments de premier ordre ou de première classe, harmoniques respectivement des deux premiers par rapport à l'absolu; 3° que par *intervalle* entre deux éléments, l'un de première classe, l'autre de premier ordre, on peut entendre le complément au quadrant de l'intervalle entre un des éléments proposés et l'élément harmonique de l'autre par rapport à l'absolu; et enfin 4° que tous les éléments à intervalle constant d'un élément donné constituent une quadrique (quadrique *circulaire*), qui a avec l'absolu deux couples d'éléments conjoints communs.

De tout cela, l'auteur déduit avec facilité la représentation géométrique du continu à deux dimensions, et les relations métriques fondamentales correspondantes. En supposant que les éléments de première classe et ceux de premier ordre soient les droites et les plans concourants en un point, il suffit d'observer que la propriété carac-

ristique de l'*intervalle* appartient à l'angle compris entre deux oites ou entre deux plans du système, pour en déduire : 1° la signiation géométrique de l'absolu; 2° celle des coordonnées de la droite du plan; 3° les relations connues de la Trigonométrie entre les rties d'une triade de droites ou de plans; 4° les relations métriques adamentales de la Géométrie analytique du point. Si l'on suppose suite que les éléments de première classe et de premier ordre du stème soient les points et les droites situés dans un plan, et si l'on serve que la propriété caractéristique de l'*intervalle* appartient au gment rectiligne compris entre deux points, et à l'angle compris tre deux droites, on aura les formules correspondantes à la Géométrie du plan.

(Le Mémoire sera continué dans les fascicules suivants du urnal.)

ZANNOTTI (M.).— *Leçons de Physique mathématique (sur la Thermonamique)*, professées à l'Université de Naples en 1868-1869. (24 p.; L) (Suite du tome VII de ce Journal.)

Capacités thermiques des gaz. Les équations principales appliquées aux gaz permanents. Lignes thermiques de gaz permanents. Altérations produites dans l'état d'un gaz avec réversibilité ou non-réversibilité. Application aux vapeurs, vapeur saturée et vapeur réchauffée. Tension de la vapeur saturée. Chaleur de fluidité et de vaporisation. Chaleur latente, intérieure et extérieure. Densité des vapeurs saturées. Équations principales pour les mélanges de la vapeur et du liquide générateur. Courbes thermiques de ces mélanges.

HOÜEL (J.). — *Note sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe de la théorie des parallèles, dit* Postulatum d'Euclide. (6 p.; fr.)

PADOVA (E.). — *Application de la méthode d'Hamilton au mouvement d'un point sur une surface.* (7 p.; it.)

L'auteur s'est proposé dans cette Note de déduire d'une manière facile du théorème d'Hamilton, modifié par Jacobi, pour le cas le plus simple, c'est-à-dire pour celui d'un point libre, l'équation aux dérivées partielles qui définit la fonction principale pour le mouvement d'un point sur une surface, et d'appliquer les formules ainsi obtenues à quelques cas particuliers.

Bitonti (V.-N.). — *Théorèmes de Géométrie élémentaire à démontrer.*

Del Grosso (R.). — *Mémoire sur l'attraction des sphéroïdes.* (32 p.; it.) (Suite du tome VII de ce Journal.)

Chapitre V. Attraction d'une masse homogène terminée par une surface quelconque du second degré. — *Chapitre VI.* Théorèmes de Mac-Laurin, d'Ivory et de Newton. — *Chapitre VII.* Application des théorèmes précédents au calcul de l'attraction d'un ellipsoïde plein homogène. — *Chapitre VIII.* Théorème de Green. Attraction des couches de niveau. (*A continuer.*)

MÉLANGES.

GABRIEL LAMÉ.

LISTE DE SES TRAVAUX ET DES FONCTIONS QU'IL A OCCUPÉES.

Né le 22 juillet 1795, à Tours; décédé le 1er mai 1870, à Paris; successivement élève de l'École Polytechnique, 1816; de l'École des Mines à la fin de 1817; ingénieur des Mines, 1820; détaché à Saint-Pétersbourg jusqu'à la fin de 1831, avec Clapeyron. Après son retour en France, professeur de Physique à l'École Polytechnique (1832-1845); examinateur d'Analyse à la même École (1845-1864); professeur de Calcul des probabilités à la Faculté des Sciences depuis 1848 ; ingénieur en chef des Mines depuis 1836; membre du Bureau des Longitudes depuis 1864; membre de l'Académie des Sciences depuis le 6 mars 1843 (en remplacement de Puissant); membre correspondant des Académies de Saint-Pétersbourg, Turin, Berlin, etc., etc.

LISTE DE SES TRAVAUX.

Annales de Mathématiques de Gergonne.

Mémoire sur les intersections des lignes et des surfaces présenté à l'Académie des Sciences en décembre 1816. — Extrait inséré en février 1817.

Dans ce Mémoire se trouvent démontrés, par une analyse facile, plusieurs théorèmes nouveaux sur les intersections des lignes et des surfaces du second degré, lesquels conduisent à la solution de plusieurs problèmes de Géométrie et entre autres de celui-ci : Déterminer les éléments d'une surface du second ordre assujettie à passer par neuf points de l'espace. Ce Mémoire n'a jamais été publié *in extenso*.

Annales des Mines.

Travaux publiés par Lamé seul :

Formule pour déterminer l'inclinaison d'une couche minérale, reconnue par trois trous de sonde (1re série, t. IV, p. 81).

Sur la lampe à gaz hydrogène (1re série, t. VIII, p. 119).

Sur les ponts de chaînes en Russie et sur les résistances des fers employés dans leur construction (1re série, t. X, p. 311 ; — *voir* aussi *Journal du Génie Civil*, octobre 1828.

Sur une nouvelle manière de calculer les angles des cristaux (1re série, t. IV, p. 69).

Travaux publiés en collaboration avec Clapeyron :

Description d'un pont suspendu de 192 pieds d'ouverture projeté par M. Bazaine (1re série, t. XI, p. 265).

Mémoire sur la stabilité des voûtes (1re série, t. VII, p. 789).

Supplément à ce Mémoire (*ib.*, p. 811). Ce Mémoire a été présenté à l'Académie des Sciences en 1822.

Mémoire sur les engrenages (1re série, t. IX, p. 601).

Précis d'une course dans le pays du Hartz (1re série, t. VIII, p. 21).

Sur un cabestan mis en usage par feu M. de Bétancourt (1re série, t. XII, p. 225).

Travaux publiés en collaboration avec M. Thirria :

Description d'un fourneau de grillage pour le minerai de fer employé au Creusot et à Vienne (1re série, t. V, p. 391).

Mémoire sur la mine de fer de la Voulte (Ardèche) (1re série, t. V, p. 325).

Annales de Physique et de Chimie.

Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides en équilibre de température (t. LIII, p. 190).

Mémoire sur les lois de l'équilibre de l'éther dans les corps diaphanes (t. LV, p. 322).

Mémoire sur les vibrations lumineuses des milieux diaphanes (t. LVIII, p. 211).

Note sur les lois du refroidissement et de la solidification d'un globe liquide (en commun avec Clapeyron), présentée à l'Académie en mai 1830 (*Annales de Physique et de Chimie*, 1831).

Mémoires des Savants étrangers.

Sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes (en collaboration avec Clapeyron (t. IV, 1833).

Sur la propagation de la chaleur dans les polyèdres (t. IV, 1833).

Sur la démonstration d'un nouveau cas du dernier théorème de Fermat (t. VIII, 1843).

Sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température (t. V).

Nouvelles Annales de Mathématiques.

Discours prononcé dans la séance d'ouverture du cours de Calcul des probabilités à la Faculté des Sciences, le 23 *novembre* 1850 (t. X, p. 1-14).

Discours prononcé lors de la reprise du cours de Calcul des probabilités, à la Faculté des Sciences, le 26 *avril* 1851 (t. X, p. 214-238).

Journal de M. Liouville.

Note sur l'équilibre des températures dans les corps solides de forme cylindrique (t. I, p. 77).

Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température (t. II, p. 147).

Extrait d'une lettre adressée à M. Liouville sur cette question : Un polygone convexe étant donné, de combien de manières peut-on le partager en triangles au moyen de diagonales (t. IV, p. 100).

Mémoire sur l'équilibre des températures dans un ellipsoïde à trois axes inégaux (t. IV, p. 126).

Second Mémoire sur l'équilibre des températures dans les corps solides homogènes de forme ellipsoïdale, concernant particulièrement les ellipsoïdes de révolution (t. IV, p. 351).

Mémoire d'analyse indéterminée, démontrant que l'équation $x^7+y^7=z^7$ *est impossible en nombres entiers* (t. V, p. 195).

Mémoire sur les coordonnées curvilignes (t. V, p. 313).

Mémoire sur les surfaces isostatiques dans les corps solides homogènes en équilibre d'élasticité (t. VI, p. 37).

Note sur la méthode de recherche des surfaces isothermes (t. VIII, p. 515).

Mémoire sur la résolution en nombres complexes de l'équation $A^n+B^n+C^n=0$ (t. XII, p. 172).

Mémoire sur les variations des coordonnées curvilignes (t. XVI, p. 171).

Mémoire sur l'équilibre d'élasticité des enveloppes sphériques (t. XIX, p. 51).

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences.

Mémoire sur les coordonnées curvilignes (t. VI, p. 43).

Mémoire sur les surfaces isostatiques dans les corps solides en équilibre d'élasticité (t. VII, p. 778).

Mémoire sur l'équilibre des températures dans un ellipsoïde homogène et solide (t. VIII, p. 236).

Mémoire sur le dernier théorème de Fermat (t. IX, p. 45).

Mémoire sur le principe général de la Physique (t. XIV, p. 35).

Mémoire sur les surfaces isothermes et orthogonales (t. XVII, p. 338).

Rapport sur la roue hydraulique de M. Passot (t. XVII, p. 853).

Sur la méthode de recherche des surfaces isothermes (t. XVII, p. 1222).

Rapport sur un Mémoire de M. Bertrand concernant les surfaces orthogonales (t. XVII, p. 1268).

Rapport sur un Mémoire de M. Clapeyron, relatif au règlement des tiroirs

dans les machines locomotives et à l'emploi de la détente (t. XVIII, p. 275 et 345).

Rapport sur la machine hydraulique à flotteur oscillant de M. de Caligny (t. XIX, p. 704).

Note sur la limite du nombre des divisions dans la recherche du plus grand commun diviseur entre deux nombres entiers (t. XIX, p. 867).

Rapport sur un Mémoire de M. Sonnet relatif au mouvement rectiligne et uniforme des eaux, en ayant égard aux différences de vitesse des filets (t. XX, p. 786).

Rapport sur le système de chemin atmosphérique de M. Arnollet (t. XX, p. 1004 et 1010).

Mémoire sur plusieurs théorèmes d'analyse démontrés par la théorie des surfaces orthogonales (t. XXI, p. 112).

Rapport sur un Mémoire de M. Villarceau concernant l'établissement des arches de pont (t. XXIII, p. 866).

Démonstration générale du théorème de Fermat sur l'impossibilité, en nombres entiers, de l'équation $x^n + y^n = z^n$ (t. XXIV, p. 310, 569 et 888).

Note au sujet de la démonstration du théorème de Fermat (t. XXIV, p. 352.)

Dépôt d'un paquet cacheté (Séance du 22 mars 1847; t. XXIV, p. 485).

Loi mathématique de la progression de l'impôt sur les successions (t. XXVII, p. 125).

Note sur les chances du brelan, au jeu de la bouillotte (t. XXVIII, p. 705).

Note sur les épaisseurs et les courbures des appareils à vapeur (t. XXX, p. 157 et 185).

Mémoire sur les variations des coordonnées curvilignes (t. XXXII, p. 566).

Note sur la théorie de l'élasticité des corps solides (t. XXXV, p. 459).

Mémoire sur l'équilibre d'élasticité des enveloppes sphériques (t. XXXVII, p. 145).

Rapport sur un Mémoire de M. de Saint-Venant concernant la torsion des prismes (t. XXXVII, p. 984).

Note accompagnant la présentation de son Ouvrage sur les coordonnées curvilignes (t. XLIX, p. 34).

Note accompagnant la présentation de ses Leçons sur la théorie analytique de la chaleur (t. LI, p. 1063).

Note accompagnant la présentation d'un Ouvrage de M. Gilbert intitulé : « Recherches analytiques sur la diffraction de la lumière » (t. LIV, p. 1119).

Note sur la marche à suivre pour découvrir le principe, seul véritablement universel, de la nature physique (t. LVI, p. 983).

Étude des binômes cubiques $x^3 \mp y^3$ (t. LXI, p. 921, 961).

JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les polyèdres et principalement dans le prisme triangulaire régulier (C. XXII, p. 194).

Mémoire sur les lois de l'équilibre du fluide éthéré (C. XXIII, p. 191).

BULLETIN DE FERUSSAC.

Mémoire sur la stabilité des voûtes (mai 1824).
Mémoire sur la construction des polygones funiculaires (mai 1829).
Mémoire sur l'application de la statique à la solution des problèmes relatifs à la théorie des moindres distances (mai 1829).

JOURNAL DU GÉNIE CIVIL (*).

Mémoire sur la solution graphique des problèmes du 3e et du 4e degré pour servir au tracé des épures de construction.

JOURNAL DE CRELLE.

Sur quelques formules analogues aux séries de Taylor et de Maclaurin (t. VI, p. 40).
Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes (t. VII, p. 150, 237 et 381).
(Ces deux Mémoires en collaboration avec Clapeyron.)

OUVRAGES SÉPARÉS.

Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie (Bachelier, 1818, in-8°).
Cours lithographiés de l'École russe des Voies de communication (en particulier : Traité élémentaire de Calcul intégral, publié en collaboration avec Bazaine).
Cours de Physique de l'École Polytechnique (1re édition, 1836; 2e éd., 1840).
Leçons sur la théorie mathématique de l'Élasticité (in-8°; 1re édition, 1852; 2e édition, 1866).
Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et sur les surfaces isothermes (in-8°, 1857).
Leçons sur la théorie analytique de la Chaleur (in-8°, 1861).
Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications (in-8°, 1859).

SUR LES LIGNES ASYMPTOTIQUES DES SURFACES GAUCHES;

Par UN ABONNÉ.

M. O. Bonnet a démontré, dans une Note des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, et dans son Mémoire sur la théorie des surfaces applicables (**), que la détermination des lignes asymptotiques d'une surface gauche dépend d'une équation de Riccati. Depuis

(*) Ce Journal contient d'autres travaux de Lamé; mais tous, à part celui que nous citons, ont été publiés dans d'autres Recueils.

(**) *Journal de l'École Polytechnique*, XLIe et XLIIe Cahiers.

MM. Clebsch et Cremona ont publié des recherches (*) sur les lignes asymptotiques des surfaces gauches, et en particulier des surfaces gauches algébriques. Il résulte des travaux de ces éminents géomètres que, si une surface gauche a deux directrices rectilignes ou une directrice rectiligne et une ligne asymptotique algébrique, toutes les autres lignes asymptotiques sont algébriques. Mais peut-être n'a-t-on pas remarqué les théorèmes suivants qui nous paraissent, à cause de leur simplicité, mériter d'être énoncés.

Le rapport anharmonique des quatre points où quatre lignes asymptotiques coupent une droite quelconque de la surface est constant.

La démonstration de ce théorème s'obtient facilement par les considérations géométriques suivantes. Imaginons une surface gauche et l'hyperboloïde osculateur en tous les points d'une génératrice. La surface et l'hyperboloïde ayant les mêmes rayons de courbure, les directions des lignes asymptotiques seront les mêmes pour les deux surfaces ; en d'autres termes :

Les tangentes aux lignes asymptotiques d'une surface gauche en tous les points d'une génératrice sont les génératrices de l'hyperboloïde osculateur.

Quatre génératrices de l'un des systèmes de l'hyperboloïde allant couper les génératrices de l'autre système en quatre points dont le rapport anharmonique est constant, on obtient sans difficulté le théorème énoncé au commencement de cette Note.

On déduit d'ailleurs très-facilement de ce théorème que l'équation différentielle des lignes asymptotiques est une équation de Riccati. C'est en effet la propriété *caractéristique* de cette équation différentielle, que quatre solutions particulières donnent lieu à un rapport anharmonique constant.

En même temps, notre première proposition montre immédiatement que, si sur une surface gauche trois lignes asymptotiques sont algébriques, il en sera de même de toutes les autres (**).

(*) *Voir* Clebsch (*Journal de M. Borchardt*, t. LXVIII, p. 868); Cremona (*Annali di Matematica*, 2e série, t. Ier, p. 248).

(**) Les théorèmes cités dans ce court article n'ont pas été donnés en effet dans les travaux les plus récents des géomètres qui se sont occupés de la théorie des lignes asymptotiques ; ils sont cependant *connus*, et se trouvent dans la *Théorie géométrique et mécanique des courbes à double courbure* de M. Paul Serret. Comme ils nous paraissent élégants, nous avons pensé qu'on ne nous saurait pas mauvais gré de les réimprimer ici.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Baltzer (R.). — Theorie und Anwendung der Determinanten. 3. Aufl. Gr. 8°. Leipzig, Hirzel. $1\frac{2}{3}$ Thlr.

Beobachtungen der totalen Sonnenfinsterniss am 18. August 1868, angestellt von den Vätern der Gesellschaft Jesu zu Manilla auf den Philippinen. Brief des P. *F. Fauro* an P. *A. Secchi*. Nebst einer lithographischen Tafel. Halle, H.-W. Schmidt, 1869.

Berg (Fr.-W.). — Ueber die Berechnung der Störungen. Dorpat, C. Mattiesen, 1869.

Bette (W.). — Unterhaltungen über einige Kapitel der Mécanique céleste und der Kosmogonie. Gr. 8°. Halle, Nebert. $\frac{2}{3}$ Thlr.

Bremiker (C.). — Studien über höhere Geodäsie. Berlin, Weidmann'sche Buchhandlung, 1869.

C. Bruhns. — Alexander von Humboldt. Eine wissenschaftliche Biographie. Im Verein mit *R. Avé-Lallemant*, *E. du Bois-Reymond*, *J.-V. Carus*, *A. Dove* u. a. herausgegeben. Leipzig, F.-A. Brockhaus. (*Sous presse.*)

Denza (Il P. Fr.).—Le aurore polari del 1869 ed i fenomeni cosmici che le accompagnarono. Torino, S. Giuseppe, 1869.

Despeyrous. — Des six opérations fondamentales des mathématiques sur la quantité composée relative à trois dimensions; applications. In-8°, 23 p. Toulouse, impr. Rouget frères et Delahaut.

Die Reise nach Indien zur Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss am 18. August 1868. Vortrag, gehalten in der Singakademie zu Berlin am 16. Januar 1867, von Prof. Dr. *G. Spörer*, Mitglied der astronomischen Expedition. Leipzig, W. Engelmann, 1869.

Eberhardt (K.-W.-H.). — Betrachtung der Niveauflächen und des hydrostatischen Druckes einer um zwei oder mehrere vertikale Achsen rotirenden Flüssigkeit. Progr. der gross. Stadtschule zu Rostock. 22 S. gr. 4°. u. 1 Taf. (Berlin, Calvary). 16 Ngr.

Ellery (Robert-S.-F.). — Astronomical Observations made at the Williamstown Observatory in the years 1861, 1862 and 1863. Melbourne, John Ferres, 1869.

Förster (W.).— Sammlung von Hülfstafeln der Berliner Sternwarte.

Herausgegeben unter Mitwirkung der Herren *Powalky*, *Tietjen*, *Romberg*, *Becker* und *Lehmann*. Berlin, 1869.

Gundelfinger (S.). — Zur Theorie des simultanen Systems einer cubischen und einer biquadratischen binären Form. Gr. 8°. (Stuttgart). Tübingen, Fues. ½ Thlr.

Kapoustin (Pl.). — Méthode graphique simple et générale pour diviser un angle en un nombre quelconque de parties égales avec une exactitude aussi approximative qu'on puisse le désirer, fondée sur des données fournies par le calcul. Moscou, Sutthoff. 2 fr.

Lamont (J. von). — Verzeichniss von 6323 telescopischen Sternen zwischen + 3° und + 9° Declination, welche in den Münchener Zonen-Beobachtungen vorkommen, reducirt auf den Anfang des J. 1850, nebst Vergleichung mit den Beobachtungen von *Lalande*, *Bessel*, *Rümker* und *Schjellerup*. (VIII. Supplementband zu den Annalen der Münchener Sternwarte. München, 1869.)

Lefébure de Fourcy.— Traité de Géométrie descriptive, précédé d'une Introduction qui renferme la théorie du plan et de la ligne droite considérée dans l'espace. 7e édit., conforme au programme d'admission à l'École Polytechnique. 2 vol. in-8°, VIII-263 p. et 36 pl. Paris, Gauthier-Villars.

Leroy (C.-F-A.).—Traité de la Stéréotomie, comprenant les applications de la Géométrie descriptive à la théorie des ombres, la coupe des pierres et la charpente, avec un atlas composé de 74 pl. in-folio. 5e édit., revue et annotée par M. E. Martelet. In-4°, XVI-396 p. Paris, Gauthier-Villars.

Meyer (A.-M.). — The Total Eclipse of August 7th 1869. Philadelphia.

Mehler (F.-G.). — Ueber eine mit den Kugel-und Cylinderfunctionen verwandte Function und ihre Anwendung in der Theorie der Elektricitätsvertheilung. Gr. 4°. Elbing, Neumann-Hartmann. ⅓ Thlr.

Neumann (C.). — Formelbuch enthaltend die hauptsächlichsten Formen, Sätze und Regeln der Elementar-Mathematik zum Gebrauche an Realschulen und Gymnasien. 2. Aufl. 16°. Dresden, Türk. 12 Ngr.

Nova elementa Amphitrites planetæ, ex observationibus duodecim

oppositionum annorum 1854-1868 deducta et cum observatione Besseliana anno 1825 conciliata. Sunt additæ tabulæ motum planetæ heliocentricum usque ad annum 1900 exhibentes. Berolini, 1869.

Saint-Loup (L.). — Sur le mouvement des projectiles sphériques dans l'air. In-8°, 16 p. Strasbourg, impr. Silbermann.

Schmidt (J.-F.-Julius). — Astronomische Beobachtungen über Meteorbahnen und deren Ausgangspunkte. Athen, K. Wilberg, 1869.

Second Radcliffe Catalogue, containing 2386 Stars; deduced from Observations extending from 1854 to 1861, at the Radcliffe Observatory, Oxford, and reduced to the epoch 1860. Under the superintendance of the Rev. *Robert Main,* M. A., Radcliffe Observer. Oxford, James Parker and Co., 1870.

Settimani (C.). — D'une seconde nouvelle méthode pour déterminer la parallaxe du Soleil. In-8°, 16 p. Florence, Barbera.

Sexe (S.-A.). — Nogle Bemærkninger om de mathematiske Satser $\frac{0}{a} = 0$, $\frac{a}{0} = \infty$, og $\frac{0}{0} = x$. Aftryk af Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. VII. Iste Hefte. Christiania, Dahl. 16 Sk.

Sylow (L.). — Bemærkninger i Anledning af Dr. A. S. Guldberg's Afhandling betitlet « Bestemmelse af den almindelige Form for en Ligning af n te Grad, hvis Rödder repræsenteres ved Formelen $\sqrt[n]{R_1} + \sqrt[n]{R_2}$, hvor n er Primtal, R_1 og R_2 ere Rödder i en Kvadratisk Ligning ». Aftryk af « Nyt Magazin for Naturvideskaberne ». VII. 1ste Hefte. Christiania, Dahl. 10 Sk.

Tables to facilitate the Reduction of Places of the Fixed Stars. Prepared for the Use of the American Ephemeris and Nautical Almanac. Washington, Bureau of Navigation, Navy Department, 1869.

Thomae (J.). — Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Veränderlichen. Gr. 8°, 152 p. Halle, Nebert. 2 Thlr.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

CREMONA (Dr Luigi). — Preliminari di una Teoria geometrica delle Superficie; 1866, Milano, Zanetti. Traduction allemande par M. Curtze; 1870, Berlin, Calvary.

Depuis que les grands géomètres Poncelet, Chasles, Steiner, Möbius, Plücker ont donné à la Géométrie pure un essor jusque-là inconnu, ces géomètres eux-mêmes et ceux qui les ont suivis sont parvenus, non-seulement à mettre dans un nouveau jour toutes les parties qu'on croyait bien connues, mais aussi à apercevoir une foule de propriétés nouvelles et importantes, à pénétrer dans des régions très-élevées, à y découvrir des vérités, à y résoudre des problèmes dont on n'aurait pas même eu l'idée de s'occuper. Mais il ne suffit pas, pour les progrès ultérieurs de la science, d'accroître le nombre et l'importance des propositions; il est encore nécessaire d'établir un lien entre ces propositions obtenues par des voies si différentes, d'en constituer un corps de doctrine propre à pénétrer dans l'enseignement, à aider les étudiants avancés et même les savants désireux de connaître et de comprendre des théories, des propositions laissées souvent sans démonstration, et dans tous les cas obtenues par les procédés les plus variés. Des Ouvrages didactiques composés avec ordre, où rien n'est laissé sans démonstration, où tout est rattaché au même principe, sont d'une utilité inappréciable pour tous les géomètres désireux de s'instruire et de faire progresser la branche à laquelle ils se sont voués. Malheureusement de tels Ouvrages sont très-difficiles à faire. Ils ne peuvent être entrepris par de simples compilateurs; il faut, pour l'unité de l'œuvre, créer de nouveaux procédés de démonstration, suppléer à des parties incomplétement traitées : il est vrai que l'auteur est récompensé par les points de vue nouveaux qui s'offrent à lui et par la découverte de nombreux et importants théorèmes.

On comprend donc bien que la tâche dont nous parlons ne peut être entreprise que par les personnes qui se sont mises au premier rang des inventeurs dans la branche qu'elles cultivent. Cette condition se trouve heureusement remplie par les deux géomètres qui ont publié des OEuvres didactiques sur la théorie des courbes et des sur-

faces algébriques : M. Salmon, qui s'est placé à un point de vue analytique; M. Cremona, qui n'utilise que les méthodes de la Géométrie pure, appelée improprement synthétique. L'Ouvrage dont nous voulons parler aujourd'hui, traduit depuis peu en allemand (comme la *Théorie des courbes* du même auteur (*), vient compléter l'œuvre de M. Cremona, et sa publication en deux langues en permettra la lecture à tous les géomètres.

M. Cremona s'est proposé pour but principal de démontrer, par la méthode synthétique, les propositions les plus essentielles de la théorie des surfaces d'ordre quelconque, propositions établies analytiquement ou seulement énoncées dans les Ouvrages et Mémoires de MM. Salmon, Cayley, Chasles, Steiner, Clebsch, etc., et d'en augmenter ou compléter quelques parties par le résultat de *ses propres recherches*. Pour les jeunes géomètres, l'auteur commence par exposer, dans l'Introduction, des parties bien connues des savants; mais nous croyons que *tous ses lecteurs* seront très-heureux de voir clairement établir les relations des propriétés déjà connues avec celles qui leur paraitront nouvelles. L'auteur d'ailleurs avait donné la mesure de ce qu'il sait faire à ce point de vue dans la *Théorie des courbes planes*.

Après un exposé des propriétés des cônes, analogue à la théorie des courbes, M. Cremona expose la théorie des surfaces développables et celle des courbes gauches; il donne notamment les formules de M. Cayley. Arrivant à une surface quelconque, il la considère : 1° comme lieu de ses points; 2° comme enveloppe de ses plans tangents. Dans le premier cas, la figure d'une surface autour d'un point est étudiée, au moyen de l'intersection de la surface avec son plan tangent, ou avec le cône des tangentes si le point est multiple. Dans le cas où la surface est regardée comme enveloppe de ses plans tangents, l'auteur a eu besoin du théorème de M. Dupin sur les tangentes conjuguées, ce qui nécessite l'introduction d'un Chapitre sur les surfaces du second ordre. M. Cremona expose ensuite le théorie des *systèmes linéaires d'ordre m*, c'est-à-dire d'un ensemble de surfaces assujetties à des conditions communes, et telles que chacune est déterminée si l'on ajoute aux conditions dejà données celle de passer

(*) CREMONA (Ludwig). — *Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven*. Greifswald, 1865. C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung.

par n points. Il termine la première partie de son livre par une belle recherche des propriétés générales des surfaces gauches. On trouve dans cette partie de l'Ouvrage les théorèmes de M. Cayley sur l'égalité de l'ordre et de la classe d'une surface gauche, sur la développable bitangente et sur l'ordre de la courbe double d'une surface, ainsi que de nouvelles démonstrations stéréométriques des théorèmes sur les séries projectives de points sur les courbes, théorèmes établis d'abord par Riemann avec le secours du Calcul intégral; et démontrés depuis par M. Clebsch par les procédés de l'Analyse algébrique.

La seconde Partie commence par un exposé des plus satisfaisants de la théorie des surfaces polaires, analogue à celui que M. Cremona a déjà donné pour les courbes planes. A la théorie des surfaces polaires viennent se joindre naturellement celle des enveloppes des plans polaires et celle des lieux formés par les pôles.

Le reste de l'Ouvrage est consacré à des recherches sur les *systèmes linéaires projectifs*, c'est-à-dire dont les surfaces se correspondent une à une, et à la démonstration des propriétés formées par l'assemblage de plusieurs systèmes, appelé *complexe symétrique* par M. Cremona. Des Chapitres distincts traitent des systèmes linéaires projectifs du premier ordre (faisceaux), ou du second ordre (réseaux), ou du troisième ordre. On y trouvera le théorème fondamental de M. Chasles, et beaucoup de théorèmes nouveaux sur les lieux des points d'intersection des surfaces correspondantes, etc.; et les théorèmes ainsi obtenus sont appliqués à l'étude des lieux qu'on rencontre dans la théorie des surfaces polaires. Au nombre des autres applications, nous signalerons la démonstration des *caractéristiques* de la courbe d'intersection de deux surfaces qui se coupent déjà suivant une courbe donnée, et celle des propositions qu'a établies M. Salmon, sous une forme bien différente, dans un Mémoire sur l'ordre d'un système d'équations qui fait suite à son grand Ouvrage : *Geometry of three dimensions*.

Voilà l'indication très-rapide, nous l'avouons, des riches trésors contenus dans l'œuvre originale de M. Cremona. La traduction allemande de M. Curtze, faite avec le concours de l'auteur, contient encore un extrait comprenant les résultats, non donnés dans l'Ouvrage italien, du *Mémoire de Géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre*, pour lequel l'Académie de Berlin attribua, en 1866, à M. Cremona, la moitié du prix Steiner, et qui est inséré au

tome LXVIII du *Journal de Crelle-Borchardt* (*). Un Chapitre de ce Mémoire qui, dans la traduction de M. Curtze, est adjoint à la seconde Partie du Livre sur les surfaces, traite des surfaces *hessienne* et *steinerienne* déduites des surfaces d'un ordre quelconque. Les autres Chapitres, formant la troisième Partie du Livre, constituent une théorie des surfaces du troisième ordre. La traduction contient aussi d'autres additions semblables, dues à l'auteur de l'Ouvrage original. Nous nous bornerons à indiquer ici l'application de la théorie des surfaces polaires à celle des surfaces développables. Dans cette addition, M. Cremona introduit d'abord de nouvelles singularités dans les formules de M. Salmon, et donne une démonstration plus complète de ces formules; mais surtout la nouvelle démonstration a l'avantage de mettre en quelque sorte sous les yeux du lecteurs la figure que prend la surface aux environs d'un point singulier. La promesse ajoutée à la fin de l'édition italienne nous fait espérer que M. Cremona appliquera un jour la notion si claire des figures de l'espace qui lui a servi dans ces recherches, à la discussion géométrique des singularités ordinaires, et peut-être aussi à celle des singularités extraordinaires les plus importantes d'une surface quelconque, discussion dont beaucoup de difficultés ont déjà été levées par l'étude des surfaces développables.

Note. — Je viens d'indiquer un avantage considérable des méthodes de la Géométrie pure : celui de présenter une image claire des figures dont on cherche les propriétés. Cet avantage et bien d'autres sont bien prouvés par les résultats obtenus en si grand nombre dans l'Ouvrage de M. Cremona. Les méthodes géométriques tiennent maintenant leur place dans la science à côté des méthodes analytiques. Néanmoins, on élève quelquefois des doutes sur la sûreté des résultats qu'elles fournissent. Il ne me paraît pas que ce doute soit bien justifié. Certes, on peut se tromper dans les raisonnements géométriques difficiles, comme on peut, en analyse, faire des fautes de calcul, et comme l'analyste peut tirer de ses résultats algébriques de fausses conclusions géométriques; mais cela n'intéresse en rien la justesse des méthodes. Seulement on doit, afin de leur donner l'exactitude qu'elles doivent avoir, en indiquer une base assurée, alors même que

(*) L'autre moitié du prix fut donnée à M. Sturm, à Bromberg, qui a publié ses recherches dans un livre séparé.

cette dernière base devrait être trouvée dans le domaine de l'analyse. On sait que le *principe de continuité* fournit des méthodes qui sont des plus fécondes en Géométrie pure. Je ne dis pas qu'il soit impossible d'établir ce principe géométriquement; mais pour cela, on aurait au moins besoin d'une définition géométrique des points d'intersection imaginaires. Sans elle, le théorème sur le nombre des points d'intersection de deux courbes est un emprunt à l'analyse qui est *permis*, bien entendu, à condition qu'on l'avoue. C'est pour cela que j'aurais désiré que M. Cremona eût admis, au commencement de son Ouvrage sur les courbes planes, le principe de continuité, en en renvoyant la démonstration à l'analyse, ou au moins qu'une remarque de cette nature précédât la définition, au n° 28, d'une courbe d'ordre m, et eût remplacé, au n° 32, la démonstration du théorème dont nous venons de parler.

Pour l'intersection d'une courbe gauche avec une surface, on peut raisonner de la manière suivante. L'analyse nous montre qu'une courbe d'ordre n, qui est l'*intersection complète* de deux surfaces, rencontre une surface d'ordre m en mn points. S'il faut ajouter à la courbe d'ordre n une courbe d'ordre n' pour avoir une intersection complète, on sait de même que ces deux courbes rencontrent une surface (m) en $m(n+n')$ points. Quant à la distribution de ces points sur les deux courbes, elle doit rester la même si la surface (m) varie; car au cas où des points d'intersection pourraient passer d'une courbe à l'autre, on devrait les regarder comme des branches d'une même courbe. On a ainsi justifié le procédé dont M. Cremona se sert au n° 21 de son Ouvrage sur les surfaces, sans le démontrer, celui de remplacer la surface par m plans.

H.-G. ZEUTHEN.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

PROCEEDINGS OF THE CAMBRIDGE PHILOSOPHICAL SOCIETY. — In-8°.

Séance du 27 mai 1867.

MILLER (W.-H.). — *Sur la méthode cristallographique de Grassmann, et sur son emploi dans l'étude des propriétés géométriques générales des cristaux.* (24 p.)

MEMOIRS OF THE ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY (*).

T. XXXVI; 1867.

LASSELL (W.). — *Observations de planètes et de nébuleuses à Malte.* (32 p.)

— *Observations diverses faites à Malte avec l'équatorial de 4 pieds.* (19 p.)

— *Catalogue de nébuleuses nouvelles, découvertes à Malte avec l'équatorial de 4 pieds, en* 1863-1865. (23 p., 10 pl.)

NACHRICHTEN VON DER K. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN UND DER GEORG-AUGUSTS-UNIVERSITÄT. — GÖTTINGEN, Verlag der Dieterichschen Buchhandlung (**).

Année 1868.

ENNEPER (A.). — *Sur un théorème de géométrie.* (7 p.)

Sur la courbe limite de l'ombre projetée par une surface de révolution sur un plan perpendiculaire à l'axe.

ENNEPER (A.). — *Remarques sur l'intersection de deux surfaces.* (9 p.)

HELMHOLTZ (H.). — *Sur les faits qui servent de base à la géométrie* (29 p.)

NEUMANN (C.). — *Résultats d'une étude sur les principes de l'électrodynamique* (12 p.)

ENNEPER (A.). — *Recherches de géométrie analytique.*

Suite d'articles publiés dans les volumes précédents. (2 art., 43 p.)

SCHERING (E.). — *Extension du théorème fondamental de Gauss sur les surfaces à courbure continue.*

Expression des angles d'un triangle rectiligne dont les côtés ont

---

(*) London : published by the Society, at their apartments, Somerset House. — Il paraît annuellement un volume in-4°, en langue anglaise.

(**) *Nouvelles de la Société royale des Sciences et de l'Université de Georges-Auguste.* — Gœttingue, librairie Dieterich.

Paraît deux fois par mois, dans le format in-12. Sciences mathématiques, physiques et naturelles; Philologie, Histoire. Programmes de l'Université. — En allemand.

même longueur que ceux d'un triangle géodésique tracé sur la surface courbe.

Klinkerfues (W.). — *Sur les applications de l'équation différentielle* $\frac{d^2 y}{dt^2} = \alpha^2 \frac{d^2 y}{dx^2}$ *à l'acoustique et à l'optique, en faisant varier les conditions aux limites.* (10 p.)

Année 1869.

Neumann. — *Sur une extension du théorème de calcul intégral sur lequel est fondée la théorie de la décomposition en fractions simples.*

Neumann (C.). — *Sur la décharge oscillante d'une table de Franklin.* (10 p.)

Enneper (A.). — *Remarques sur le mouvement d'un point sur une surface.* (7 p.)

Enneper (A.). — *De la surface développable formée par les plans tangents le long d'une courbe donnée sur une surface.* (10 p.)

Klein (F.). — *Sur la théorie des complexes de lignes du premier et et du second degré.* (1 p.)

Nöther (M.). — *Sur la théorie des fonctions algébriques de plusieurs variables complexes.* (6 p.)

Stern (A.). — *Sur un théorème de Gauss (relatif à la théorie des nombres).*

Quincke (G.). — *Des phénomènes de capillarité sur la surface commune à deux fluides.* (22 p.)

Listing (J.-B.). — *Sur une nouvelle espèce de vision stéréoscopique.* (25 p., 3 pl.)

Enneper (A.). — *Sur les loxodromies des surfaces coniques.* (17 p.)

Clebsch (A.). — *Sur la déformation des surfaces algébriques.*

Brioschi (Fr.). — *Des substitutions de la forme*

$$\theta(r) \equiv \varepsilon\left(r^{n-2} + ar^{\frac{n-3}{2}}\right),$$

pour un nombre n premier de lettres. (9 p.)

MEMOIRS OF THE ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY (*).

T. XXXVI; 1867.

LASSELL (W.). — *Observations de planètes et de nébuleuses à Malte.* (32 p.)

— *Observations diverses faites à Malte avec l'équatorial de 4 pieds.* (19 p.)

— *Catalogue de nébuleuses nouvelles, découvertes à Malte avec l'équatorial de 4 pieds, en* 1863-1865. (23 p., 10 pl.)

NACHRICHTEN VON DER K. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN UND DER GEORG-AUGUSTS-UNIVERSITÄT. — GÖTTINGEN, Verlag der Dieterichschen Buchhandlung (**).

Année 1868.

ENNEPER (A.). — *Sur un théorème de géométrie.* (7 p.)

Sur la courbe limite de l'ombre projetée par une surface de révolution sur un plan perpendiculaire à l'axe.

ENNEPER (A.). — *Remarques sur l'intersection de deux surfaces.* (9 p.)

HELMHOLTZ (H.). — *Sur les faits qui servent de base à la géométrie* (29 p.)

NEUMANN (C.). — *Résultats d'une étude sur les principes de l'électrodynamique* (12 p.)

ENNEPER (A.). — *Recherches de géométrie analytique.*

Suite d'articles publiés dans les volumes précédents. (2 art., 43 p.)

SCHERING (E.). — *Extension du théorème fondamental de Gauss sur les surfaces à courbure continue.*

Expression des angles d'un triangle rectiligne dont les côtés ont

(*) London : published by the Society, at their apartments, Somerset House. — Il paraît annuellement un volume in-4°, en langue anglaise.

(**) *Nouvelles de la Société royale des Sciences et de l'Université de Georges-Auguste.* — Gœttingue, librairie Dieterich.

Paraît deux fois par mois, dans le format in-12. Sciences mathématiques, physiques et naturelles; Philologie, Histoire. Programmes de l'Université. — En allemand.

même longueur que ceux d'un triangle géodésique tracé sur la surface courbe.

KLINKERFUES (W.). — *Sur les applications de l'équation différentielle $\frac{d^2y}{dt^2} = \alpha^2 \frac{d^2y}{dx^2}$ à l'acoustique et à l'optique, en faisant varier les conditions aux limites.* (10 p.)

Année 1869.

NEUMANN. — *Sur une extension du théorème de calcul intégral sur lequel est fondée la théorie de la décomposition en fractions simples.*

NEUMANN (C.). — *Sur la décharge oscillante d'une table de Franklin.* (10 p.)

ENNEPER (A.). — *Remarques sur le mouvement d'un point sur une surface.* (7 p.)

ENNEPER (A.). — *De la surface développable formée par les plans tangents le long d'une courbe donnée sur une surface.* (10 p.)

KLEIN (F.). — *Sur la théorie des complexes de lignes du premier et et du second degré.* (1 p.)

NÖTHER (M.). — *Sur la théorie des fonctions algébriques de plusieurs variables complexes.* (6 p.)

STERN (A.). — *Sur un théorème de Gauss (relatif à la théorie des nombres).*

QUINCKE (G.). — *Des phénomènes de capillarité sur la surface commune à deux fluides.* (22 p.)

LISTING (J.-B.). — *Sur une nouvelle espèce de vision stéréoscopique.* (25 p., 3 pl.)

ENNEPER (A.). — *Sur les loxodromies des surfaces coniques.* (17 p.)

CLEBSCH (A.). — *Sur la déformation des surfaces algébriques.*

BRIOSCHI (FR.). — *Des substitutions de la forme*

$$\theta(r) \equiv \varepsilon \left(r^{n-2} + ar^{\frac{n-3}{2}} \right),$$

pour un nombre n premier de lettres. (9 p.)

BULLETIN DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE SAINT-PÉTERSBOURG (*).

T. XIII; 1868.

SOMOF (J.). — *Note sur l'attraction exercée par une couche matérielle très-mince sur un point de sa surface.* (5 col.; fr.)

Nouvelle démonstration de ce théorème de Laplace, que les attractions sur un point M de l'une des surfaces de la couche, exercées, en raison inverse du carré de la distance, par tous les éléments auxquels on peut mener de M des droites qui ne rencontrent aucune des deux surfaces, ont une résultante normale à la surface en M, et égale à la densité de la couche multipliée par la circonférence d'un cercle dont le rayon est égal à l'épaisseur de cette couche.

BOUNIAKOWSKY (M.). — *Sur quelques formules qui résultent de la combinaison des résidus quadratiques et non-quadratiques des nombres premiers.* (8 col.; fr.)

L'auteur établit diverses formules exprimant des propriétés de la fonction $E(x)$, qui représente l'entier maximum contenu dans le nombre x.

SAWITSCH (A.). — *Observations des planètes Saturne et Neptune en 1867 à l'Observatoire académique de Saint-Pétersbourg.* (1 col.; fr.)

STRUVE (O.). — *Observation spectrale d'une aurore boréale.* (2 col.; all.)

MINDING (F.). — *Sur la loi de formation des dénominateurs et des numérateurs dans la réduction des fractions continues en fractions ordinaires.* (4 col.; all.)

L'auteur rattache ses recherches à celles de Gauss sur les systèmes de lentilles, ainsi qu'aux travaux antérieurs d'Euler.

LINSSER (C.). — *Éphéméride pour la recherche de la Comète périodique de Winnecke (1858, II), à son retour en 1869.* (2 col.; all.)

(*) Il paraît chaque année un volume de 36 feuilles gr. in-4, à 2 colonnes, en 5 fascicules. Prix : pour la Russie, 3 rbl. arg.; pour l'étranger, 3 thlrs. de Prusse. — En français et en allemand.

Somof (J.). — *Note sur la solution, donnée par Abel, d'un problème de Mécanique.* (4 col.; fr.)

(Voyez *Journal de Crelle*, t. I. — *Œuvres d'Abel*, t. I, p. 27-30). — « Trouver la courbe décrite par un corps pesant, connaissant le « temps employé par le corps à descendre d'une certaine hauteur, « en fonction de cette hauteur. » — Abel a généralisé le problème, et l'a résolu au moyen des propriétés des intégrales eulériennes. En le restreignant à son énoncé primitif, M. Somof a évité l'emploi des intégrales eulériennes, et a ramené la solution à une transformation très-simple des variables dans une intégrale double.

Minding (F.). — *Sur un problème du calcul des probabilités, qui se présente dans l'observation des étoiles filantes.* (6 col.; all.)

Parmi toutes les étoiles filantes qui tombent, dans un temps donné, sur la Terre, en traversant le champ visuel d'un observateur, combien y en aura-t-il de visibles dans une lunette placée dans une direction déterminée quelconque?

T. XIV; 1869.

Lenz (R.). — *Influence de la température sur la conductibilité de certains métaux pour la chaleur.* (5 col.; all.)

Comparaison des pouvoirs conducteurs pour la chaleur et pour l'électricité. Ces deux pouvoirs varient proportionnellement.

Savitch (M.). — *Observations faites à l'Observatoire astronomique de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg.* (2 col.; fr.)

Passage de Mercure sur le Soleil du 5 novembre 1868. — Oppositions de Neptune et de Jupiter en 1868.

Rosén (P.-G.). — *Études faites à l'aide d'un astro-photomètre de M. Zöllner.* (28 col.; all.)

Description de l'instrument. Plan et résultats des observations. Erreurs probables. Différence d'éclat pour des étoiles de grandeurs consécutives. Diagramme comparatif des résultats obtenus par Zöllner et Rosén, pour les intensités correspondantes aux couleurs.

Gyldén (H.). — *Sur une méthode pour représenter les perturbations d'une comète par des expressions rapidement convergentes.* (37 col.; all.)

Hansen, dans son Mémoire couronné par l'Académie des Sciences

de Paris, a fait faire un pas considérable à la théorie des perturbations cométaires, au moyen de son *principe de partition,* qui consiste à exprimer les perturbations de la comète dans les différentes parties de son orbite par des systèmes de variables différents. La distance de la comète à la planète perturbatrice se compose d'une partie constante (c'est-à-dire indépendante de l'*anomalie partielle* de la comète), et d'une partie variable, d'autant plus petite, par rapport à la partie constante, et développable suivant une série d'autant plus convergente, que l'intervalle auquel correspond la forme du développement est moindre. Mais cette partie *constante* est une fonction de la position de la planète perturbatrice, dont le développement est peu convergent dans le cas où les deux astres sont très-voisins, si l'on prend pour argument l'anomalie moyenne de la planète. On peut augmenter la convergence en appliquant à l'orbite de la planète le principe de partition. Mais il est souvent possible d'éviter cette application, en considérant l'anomalie moyenne de la planète comme l'amplitude elliptique d'une nouvelle variable. L'auteur applique sa méthode à l'exemple, traité par Hansen, des perturbations de la comète d'Encke par Jupiter.

Struve (O.). — *Réapparition de la Comète de Winnecke, et découverte de quelques nouvelles nébuleuses.* (4 col.; all.)

Lindelöf (L.). — *Propriétés des polyèdres qui, sous une étendue superficielle donnée, enferment le plus grand volume.* (13 col.; fr.)

Steiner a démontré (*Journal de Crelle,* t. XXIV) que le polyèdre maximum est circonscrit à une sphère tangente à chacune des faces en son centre de gravité. Il ajoute qu'il reste encore à résoudre, concernant les résultats qu'il a obtenus, plusieurs questions importantes, parmi lesquelles se trouve celle de savoir si la propriété indiquée ci-dessus convient généralement à tous les polyèdres convexes. M. Lindelöf examine cette question, et y répond par l'affirmative.

KONGLIGA Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. — *Ny följd* (*).

T. V; 1863-1864.

Lindmann (C.-F.). — *Sur les fonctions transcendantes Z′* (a) *et G*(a)

(*) *Actes de l'Académie royale des Sciences de Suède.* Nouvelle série. — Stockholm.

avec l'extension de leurs valeurs au cas des valeurs impaires de a. (18 p.)

DILLNER (G.). — *Groupe de formules concernant les fonctions elliptiques de première espèce.* (19 p.)

Application du *Calcul géométrique* de l'auteur à la discussion de l'intégrale de première espèce. En désignant, d'après Argand et Cauchy, par R_p la *quantité géométrique* $Re^{p\sqrt{-1}}$, l'intégration de la formule différentielle

$$dR_p = \frac{d\rho_\varphi}{1+(\rho_\varphi)^2}$$

conduit à des relations d'où l'on déduit très-simplement la discussion géométrique du problème du pendule simple.

HOLMGREN (HJ.). — *Sur la transformation des intégrales multiples.* (40 p.)

§ 1. Notations. Signe de substitution de Sarrus et de Lindelöf. — §§ 2 et 3. Changement de l'ordre des intégrations dans les intégrales multiples. — § 4. Introduction de nouvelles variables dans les intégrales définies. — §§ 5 et 6. Cas simples de la formule

$$\left[\prod_{i=0}^{i=n-1}\int_{f_i}^{F_i(x_1,x_2,\ldots,x_i)} dx_{i+1}\right] F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$
$$= \Big|_{u=f_0}^{u=F_0}\left[\prod_{i=1}^{i=n-1}\int_{f_i}^{F_i(u,x_1,x_2,\ldots,x_i)} dx_{i+1}\right]$$
$$\times \int_{F_{n-1}^{-1}(x_n,x_2,\ldots,x_{n-1})}^{u} F(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_1.$$

LINDMANN (C.-F.). — *Détermination des dérivées supérieures de quelques fonctions, et de diverses intégrales définies qui en dépendent.* (29 p.)

Détermination des dérivées d'ordre quelconque des fonctions $x^n e^{\frac{a}{x}}$, $x^r e^{ax^2}$, $e^{a\sqrt{x}}$, $\frac{\log(a+bx)}{x^n}$, $\frac{\log(a+bx)}{\alpha^2+\beta^2x^2}$, $\frac{x\log(a+bx)}{\alpha^2+\beta^2x^2}$, $(a^2+b^2x^2)^n$, $x(a^2+b^2x^2)^n$, $\text{arc cot}\frac{\beta x}{\alpha}\log(a^2+b^2x^2)$, $e^{a^2x^2+bx}$,

---

P.-A. Norstedt et Fils. Publiés chaque année par demi-volumes in-4. Les Mémoires sont paginés séparément. En langue suédoise.

$e^{a^2x^2}\frac{\cos}{\sin}\alpha x$. — Calcul de plusieurs intégrales déduites des résultats précédents et des valeurs données par les Tables de Bierens de Haan.

Holmgren (Hj.). — *Sur le Calcul différentiel à indices quelconques.* (83 p.)

L'auteur part de la définition

$$D^{\mu}_{x,x_0} f(x)$$
$$= \frac{1}{\Gamma(m-\mu)} D^m (x-x_0)^{m-\mu} \int_0^1 (1-u)^{m-\mu-1} f[x_0+(x-x_0)u]\, du,$$

x, x_0 étant, ainsi que μ, des grandeurs réelles ou complexes quelconques, et m le nombre entier positif (ou nul) immédiatement plus grand que la partie réelle de μ. Ces recherches se rattachent au Mémoire précédemment indiqué sur les intégrales multiples.

T. VI; 1865-1866.

Malmsten (C.-J.). — *Sur les intégrales définies entre des limites imaginaires.* (18 p.)

Après avoir fixé, dans son *Résumé des Leçons sur le Calcul infinitésimal* (*) (21[e] Leçon), la signification d'une intégrale définie entre des limites réelles, Cauchy l'a étendue, deux ans plus tard, dans son célèbre *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires*. M. Malmsten établit les théorèmes suivants, relatifs à ces dernières intégrales :

Théorème I. Si l'on a diverses quantités complexes $A_n + B_n i$, dont les parties réelles soient de même signe, et que le module de $a+bi$ soit une *moyenne* entre ceux des quantités $\alpha_n + \beta_n i$, on a

$$\Sigma(A_n + B_n i)(\alpha_n + \beta_n i) = (a+bi)\Sigma(A_n + B_n i).$$

Théorème II. $p\,dx + q\,dy$ étant une différentielle exacte,

$$\lim \Sigma [p(x_n, y_n)dx_n + q(x_n, y_n)dy_n]$$
$$= \int_{x_0}^{X} p(x, Y)dx + \int_{y_0}^{Y} q(x_0, y)\,dy.$$

(*) Cet Ouvrage de Cauchy, si important pour l'histoire de la Science, est maintenant presque introuvable. Il serait bien à souhaiter qu'on en fît une nouvelle édition.

Théorème III. $f(z)$ étant une fonction synectique de $z = x + yi$, $\int_{z_1}^{z} f(z)\,dz$ est une quantité indépendante du chemin parcouru.

Théorème IV. On a

$$\int_{z_1}^{z_0} f(z)\,dz = -\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz.$$

Théorème V. Si $f(z)$ est une fonction synectique de z, et

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz,$$

$F(z)$ sera une fonction synectique, ayant pour dérivée $f(z)$.

ÖFVERSIGT af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. — *Stockholm. P.-A. Norstedt och söner* (*).

T. XXII, 1865.

Dahlander (G.-R.). — *Sur l'effet mécanique produit par la vapeur d'eau saturée pendant son expansion.* (10 p., 1 pl.)

Möller (A.). — *Éléments et éphéméride de la comète de Faye.* (11 p.)

L'auteur trouve, pour les éléments de la quatrième apparition,

1865, oct. 4,0, T. m. Berlin.

$\mu = 478'',64582$	$\varpi = 49^\circ 56' 54'',56$
$M = 342^\circ 18' 32'',41$	$\Omega = 209.41.52\ ,91$
$\varphi = 33.53.\ 8\ ,57$	$i = 11.22.\ 7\ ,44.$

Edlund (E.). — *Détermination quantitative des phénomènes de chaleur qui se produisent dans le changement de volume des métaux, et de l'équivalent mécanique de la chaleur, indépendamment du travail intérieur du métal.* (31 p.)

Daug (H.-T.). — *Sur les cubatures approximatives.* (5 p.)

L'auteur ne s'occupe que des volumes terminés à une surface quelconque et ayant pour base un rectangle. Imaginons qu'on ait divisé

(*) *Compte rendu des travaux de l'Académie royale des Sciences.* Stockholm, P.-A. Norstedt. et fils.

Un volume par an, en 10 livraisons in-8, en langue suédoise. Prix du volume : 6 Rdr.

ce rectangle en rectangles égaux par deux systèmes de parallèles aux côtés. On n'emploiera que les ordonnées de la surface élevées aux sommets et aux centres de ces rectangles.

Soient S_1 la somme des ordonnées élevées aux sommets du rectangle qui sert de base au volume; S_2 la somme des ordonnées aux points de division situés sur le périmètre du rectangle; S_4 la somme des ordonnées aux points de division situés à l'intérieur de la base; S_8 la somme des ordonnées aux centres des rectangles partiels; 2δ, 2ε les dimensions de l'un des rectangles partiels. On a approximativement

$$V = \frac{\delta.\varepsilon}{3}(1.S_1 + 2.S_2 + 4.S_4 + 8.S_8).$$

Holmgren (K.-A.). — *Sur la théorie de la formation des ondes sonores dans les tuyaux.* (17 p.)

Björling (C.-F.-E.). — *Sur quelques propriétés des séries de Fourier et de leurs coefficients.* (6 p.)

Théorème. — La série $F(t) = \mathop{S}\limits_{n=1}^{n=\infty} v_n \sin nt$ peut être différentiée, lorsque l'égalité précédente subsiste non-seulement entre les limites o et π, mais encore aux limites elles-mêmes. Au contraire, pour que la série $F(t) = \frac{1}{2}u_0 + \mathop{S}\limits_{n=1}^{n=\infty} u_n \cos nt$ puisse être différentiée, il suffit que $F(t)$ ait une valeur finie pour $t = 0$ et $t = \pi$; en supposant toujours que $F(t)$ ne devienne infini pour aucune valeur de t comprise entre les mêmes limites.

Åstrand (J.-J.). — *Méthode simple d'approximation pour les déterminations du temps et de la longitude.* (15 p.)

Cette méthode n'exige point l'emploi des Tables de logarithmes.

T. XXIII; 1866.

Edlund (Er.). — *Démonstration expérimentale de la dilatation produite par le courant électrique dans les corps solides, indépendamment de la chaleur développée.* (27 p.)

Björling (E.-G.). — *Sur les formules d'addition pour les fonctions elliptiques.* (4 p.)

Jacobi (*Sur la rotation des corps,* Journ. de Crelle; t. XXXIX, p. 324), déduit les diverses formules d'addition de la formule

$$\cos \operatorname{am}(\alpha+\beta) = \cos \operatorname{am}\alpha \cos \operatorname{am}\beta - \sin \operatorname{am}\alpha \sin \operatorname{am}\beta\, \Delta \operatorname{am}(\alpha+\beta).$$

On peut les déduire plus simplement d'une autre manière, que l'auteur indique brièvement.

T. XXIV; 1867.

THEORELL (A.-G.). — *Quelques conséquences du théorème du Cauchy sur les différences des fonctions continues.* (4 p.)

On a les formules

$$\Delta^n f(x) = \Delta x^n f^{(n)}(x + n\theta\Delta x),$$
$$\Delta^n f(x,y) = d^n f(x + n\theta\Delta x, \quad y + n\theta\Delta y).$$

PETTERSON (C.-A.). — *Déterminations astronomiques de positions dans le district de Norrbotten, en* 1859-62. (9 p.)

DAHLANDER (G.-R.). — *Sur la détermination de l'axe central et de l'axe de rotation dans le mouvement d'un corps.* (4 p.)

Construction géométrique.

T. XXV; 1868.

DAHLANDER (G.-R.). — *Théorie géométrique de l'accélération dans le déplacement d'une figure dans son plan.* (16 p., 1 pl.)

L'auteur, partant des travaux de M. Chasles (*Comptes rendus*, t. LI et LII), étudie la relation qui existe entre trois positions d'une figure, et ses résultats contiennent, comme cas particulier, la théorie de l'accélération. Il expose ensuite plusieurs théorèmes auxquels ces recherches l'ont conduit.

BJÖRLING (C.-F.-EM.). — *Sur les conditions de réalité des racines des équations algébriques.* (10 p.)

Ces conditions sont fondées sur les relations qui existent entre les racines d'une équation et celles de sa dérivée.

NOVA ACTA REGIÆ SOCIETATIS SCIENTIARUM UPSALIENSIS. — *Upsaliæ, W. Schultz* (*).

IIIe Série, t. VI; 1866-1868.

WACKERBARTH (A-D.). — *Théorie provisoire de Léda.* (24 p.; angl.)

Les perturbations sont calculées par la méthode de Laplace.

(*) Paraît par demi-volumes in-4, tous les deux ans. Mémoires paginés séparément, en diverses langues.

HOPPE (R.). — *Sur les sommes des séries divergentes.* (12 p.; fr.).

Recherche de la fonction $\varphi(n)$, telle que $\lim. \frac{\Sigma u_n}{\varphi(n)} = 1$ pour n infini.

HOPPE (R.). — *Surfaces également illuminées.* (4 p.; fr.)

La surface uniformément éclairée par des rayons partis d'un point est représentée par l'ensemble des équations

$$r = \sqrt{\frac{\sin 2\mu}{c}},$$

$$\lambda = \text{arc tang}(\text{tang}\eta \sin\vartheta) + \varphi'(\sin\eta\cos\vartheta)$$

$$\mu = \text{arc tang}\frac{\text{tang}\vartheta}{\cos\eta} + \sin\eta\cos\vartheta . \varphi'(\sin\eta\cos\vartheta) - \varphi(\sin\eta\cos\vartheta),$$

r, ϑ, λ étant le rayon vecteur, la latitude et la longitude, η et μ des variables auxiliaires, et φ une fonction arbitraire.

ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK (*).

Bd. LI, Heft 1; 1869.

GRETSCHEL (H.). — *Démonstration élémentaire de la formule de la durée de l'oscillation d'un pendule simple.* (6 p.; all.)

L'auteur arrive à l'expression rigoureuse en remplaçant les intégrations par des sommations de séries.

EXNER (K.). — *Sur la forme des petits éléments de surface.* (3 p.; all.)

Un élément de surface est engendré par le mouvement continu d'un arc de cercle infiniment petit glissant sur un autre arc de cercle infiniment petit, de manière que leurs deux plans soient toujours perpendiculaires entre eux, et que le centre du premier reste toujours dans le plan du second.

SPIEKER (TH.). — *Sur un cercle remarquable, décrit autour du centre de gravité du périmètre d'un triangle rectiligne, et analogue au cercle des neuf points.* (5 p.; all.).

MOST (R.). — *Sur le centre de gravité du contour des figures planes et solides les plus simples.* (5 p.; all.)

(*) Voir *Bulletin*, p. 100.

SONDERHOF (A.). — *Corrections géodésiques des angles horizontaux observés sur le sphéroïde.* (26 p.; all.)

FASBENDER. — *Les angles que les côtés du triangle forment avec leurs lignes de gravité respectives.* (3 p.; fr.)

VERSLUYS (J.). — *Applications nouvelles des déterminants à la Géométrie* (2[e] art.). (23 p.; fr.)

Discussion de l'équation générale du second degré en coordonnées tangentielles, et de la courbe du second degré intersection d'une surface et d'un plan.

UNFERDINGER (FR.). — *Sur l'expression du rayon de courbure en coordonnées polaires, et sur les courbes dont l'équation est* $r^k = a^k \sin k\theta$. (21 p.; all.)

GRASSMANN (H.). — *Résolution élémentaire de l'équation générale du quatrième degré.* (3 p.; all.)

DOSTOR (G.). — *Propriété de la bissectrice d'un angle dans le triangle. — Ellipse et hyperbole : relation entre les angles des deux rayons vecteurs d'un point avec l'axe focal. — Inclinaison du rayon vecteur sur l'axe de la parabole. — Propriétés du triangle rectangle. — Généralisation d'un théorème d'Euler (ou de Fermat) sur le cercle, et son extension à l'ellipse. — Propriétés du triangle sphérique rectangle.* (17 p.; fr.)

LITTROW (C. VON). — *Sur l'infériorité des Anciens dans les sciences physiques.* (13 p.; all.)

Discours prononcé à l'occasion de son installation comme recteur de l'Université de Vienne.

DILLNER (Göran), adjunkt i matematik vid Upsala Akademi. — GRUNDDRAGEN AF DEN GEOMETRISKA KALKYLEN. (*Tidskrift för matematik och Fysik*, 1868-1870, Upsala) (*).

L'*unité*, au point de vue arithmétique, étant une quantité de *grandeur* arbitraire, on peut la faire varier, et les nombres qui représentent les diverses grandeurs concrètes varieront en même temps.

(*) *Éléments du Calcul géométrique;* par le D[r] G. DILLNER, Professeur adjoint de

Le changement d'unité donne lieu aux opérations de la multiplication et de la division.

Au lieu de chercher la grandeur absolue d'une quantité, on peut avoir pour but sa détermination dans une série illimitée dans les deux sens, telle que la détermination d'un point sur une droite indéfinie. Cette question se ramène à une détermination de grandeur, si l'on prend pour inconnue la distance du point cherché à une origine fixée arbitrairement sur la droite. Mais ici la grandeur de la distance n'est qu'une quantité auxiliaire, qui ne suffirait pas pour l'expression complète du résultat, si l'on n'y ajoutait l'indication du sens dans lequel elle doit être portée à partir de l'origine.

Au lieu donc de considérer séparément les deux déterminations de grandeur et de sens, il est plus simple de les comprendre dans une même détermination, et de substituer aux opérations arithmétiques d'addition et de soustraction, qui rappelaient uniquement les idées d'augmentation et de diminution, des opérations algébriques plus générales, comprenant les premières comme cas particuliers, et désignées, pour cette raison, par les mêmes noms, savoir : l'*addition algébrique,* consistant dans le transport de l'extrémité de la distance dans un certain sens convenu, et la *soustraction algébrique*, consistant dans le transport de la même extrémité dans le sens opposé. Ces deux opérations peuvent être considérées comme correspondantes au *changement d'origine.*

En concevant maintenant la soustraction à ce point de vue *plus général*, cette opération sera *toujours possible*, et la notion des quantités négatives n'offrira plus aucune difficulté.

Si l'on considère l'unité comme étant elle-même susceptible de signe, le *changement d'unité* donnera lieu à la multiplication et à la

---

Mathématiques à l'Académie d'Upsala. (Extrait du *Journal de Mathématiques et de Physique,* années 1868-1870. Huit articles, 91 p.)

Voir *Bulletin*, p. 177 et 179.

M. Dillner avait déjà publié en 1860 un Mémoire sur le même sujet, intitulé : *Geometrisk kalkyl, eller geometriska qvantiteters räknelagar*, af G. Dillner. (Aftryckt ur *Upsala Kongl. Vetenskaps-Societets Årskrift*); Upsala, G.-A. Leffler, 1860. [*Calcul géométrique*, ou *Règles du calcul des quantités géométriques*. (Extrait de l'*Annuaire de la Société Royale des Sciences d'Upsala.*) Gr. in-8, 96 p.]. L'auteur y a étendu ses recherches à la représentation des points dans l'espace à trois dimensions.

La série d'articles dont nous analysons la première partie est une exposition détaillée de la même théorie, pour le cas de deux dimensions.

mination d'une quantité faisant partie d'une série double, a peut représenter par un point d'un plan. Ici, outre la une origine arbitraire, il faut encore avoir, non plus une ication pour choisir entre deux sens opposés, mais une se-ndeur déterminant la direction dans laquelle la distance ortée.

nt un nouveau pas dans la généralisation des notations et ons, on est conduit à incorporer dans un même symbole toutes les données qui déterminent un point du plan, et es noms d'addition et de soustraction au transport d'un le plan, ou, ce qui revient au même, au *changement d'ori-* que l'on conserve les directions fondamentales d'où l'on s angles. Le symbole binaire qui caractérise ainsi une le la double série s'appelle *quantité géométrique* (Cauchy) *é complexe* (Gauss) (*).

sidérant l'*unité* comme une quantité géométrique, ayant leur et une direction, le *changement d'unité* conduit de la a plus simple et la plus naturelle à la définition de la mul- et de la division des quantités géométriques. De là on lévation aux puissances, et à l'extraction des racines. Cette opération, grâce à la nouvelle généralisation de sa défini- eut plus offrir maintenant d'impossibilité, et la dénomina-*ginaire* ne peut plus être prise dans son sens primitif, puis-pplique à des quantités parfaitement réelles.

---

mière idée de la substitution des quantités géométriques aux quantités es *impossibles* remonte à Wallis (1693), qui, partant de la proportion

férents théorèmes :

$$\text{Pour } \gamma = 0, \quad a^2 - b^2 = \text{OB.OB}', \quad [\text{Eucl., II, 5}];$$

$$\text{Pour } \gamma = \frac{\pi}{2}, \quad a^2 + b^2 = \text{OB.OB}', \quad [\text{Eucl., I, 47}];$$

$$\text{Pour } \gamma = \frac{\pi}{4}, \quad a^4 + b^4 = c^4, \quad \text{où} \quad c^2 = \text{OB.OB}';$$

.........., ...

M. Dillner termine par des exemples de constructions tirées d résolution d'équations entre des quantités géométriques.

Pour encourager l'étude de ces élégantes méthodes, qui finir sans doute par devenir classiques, M. Dillner propose pour suje prix annuel que décerne la rédaction du *Tidskrift*, la composi d'un Recueil de problèmes géométriques résolus au moyen des éq tions du premier et du second degré et de celles qui s'y ramènent (

J. Hoüel.

MÉLANGES.

ACADÉMIE DES SCIENCES.

CONCOURS DE L'ANNÉE 1869.

Séance publique du Lundi 11 *Juillet* 1870,

Présidée par M. Claude BERNARD, Président pour l'année 1869.

PRIX DÉCERNÉS POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

GRAND PRIX DE MATHÉMATIQUES.

(Commissaires : MM. Bertrand, Chasles, Liouville, Bonnet, Serret rapporteur.)

Rapport sur le Concours de l'année 1869.

L'Académie avait proposé, pour sujet de grand prix de Mat matiques à décerner en 1860, la question suivante :

« *Perfectionner en quelque point essentiel la théorie du mouvem* » *trois corps qui s'attirent mutuellement, suivant la loi de la nat*

(*) L'auteur du meilleur Mémoire recevra le second volume du *Traité de Calcul* *férentiel et de Calcul intégral* de M. Bertrand. Les Mémoires devront être à M. Dillner avant le 1er janvier 1871.

un angle θ, l'équation deviendra de la forme

$$x + y_\theta = g + h_\theta + \rho_\sigma,$$

d'où l'on tire, en égalant les composantes rectangulaires des deux membres,

$$x - g + (y - h)\cos\theta = \rho\cos\sigma,$$
$$(y - h)\sin\theta = \rho\sin\sigma.$$

L'élimination de la variable ρ donne l'équation en x et y.

Si l'on supposait σ variable et ρ constant, on aurait, par l'élimination de σ, l'équation du cercle de rayon ρ.

Un cercle de rayon ρ roulant sans glisser sur l'axe des x, soit $\rho\sigma$ l'abscisse du point de contact; le centre sera exprimé par $\rho\sigma + \rho_{\frac{\pi}{2}}$, et le point décrivant de la cycloïde aura pour expression, relativement à ce centre, $\rho_{-\frac{\pi}{2}-\sigma}$. Donc l'équation de la cycloïde sera

$$r_\rho = \rho\sigma + \rho_{\frac{\pi}{2}} + \rho_{-\frac{\pi}{2}-\sigma},$$

d'où

$$x = \rho\,(\sigma - \sin\sigma), \quad y = \rho(1 - \cos\sigma).$$

Après ces indications, l'auteur revient sur l'emploi de la méthode dans la résolution des problèmes de géométrie élémentaire.

Un triangle OAB est déterminé de forme par le quotient *géométrique* $\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}$. La proportion OA : OB = O′A′ : O′B′ exprime la similitude des triangles OAB, O′A′B′. La proportion OA : OB = OB : OC indique que OB est moyenne proportionnelle entre OA et OC et bissectrice de l'angle AOC.

La construction des identités algébriques où entrent des quantités géométriques fournit un moyen fécond pour établir analytiquement un nombre illimité de propositions de géométrie.

Ainsi l'identité

$$a^2 - (b_\gamma)^2 = (a + b_\gamma)(a - b_\gamma)$$

donne, en prenant les modules de part et d'autre,

$$\sqrt{a^4 + b^4 - 2a^2b^2\cos 2\gamma} = \text{mod.}\,(a + b_\gamma) \times \text{mod.}\,(a - b_\gamma).$$

Si OA = a est la ligne menée du sommet O d'un triangle au milieu A de la base BB′ = $2b$, et que γ soit l'angle OAB, le second membre sera égal à OB × OB′. En donnant à γ diverses valeurs, on aura dif-

plus notables à une théorie qui intéresse à la fois, à un haut degré, l'Analyse mathématique et l'Astronomie.

En résumé la Commission décide qu'il n'y a pas lieu de décerner le prix, et elle propose à l'Académie de remettre la question au Concours pour 1872.

L'Académie adopte les Conclusions de ce Rapport.

GRAND PRIX DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

Question proposée en 1864 *pour* 1866, *puis remise au concours, après modification, pour* 1869.

(Commissaires : MM. Faye, Liouville, Laugier, Le Verrier, Delaunay rapporteur.)

Rapport sur le Concours de l'année 1869.

L'Académie avait mis au concours, pour 1869, la question suivante :

« *Discuter complétement les anciennes observations d'éclipses qui nous* » *ont été transmises par l'histoire, en vue d'en déduire la valeur de* » *l'accélération séculaire du moyen mouvement de la Lune, sans se* » *préoccuper d'aucune valeur théorique de cette accélération séculaire;* » *montrer clairement à quelles conséquences ces éclipses peuvent con-* » *duire relativement à l'accélération dont il s'agit, soit en lui assignant* » *forcément une valeur précise, soit au contraire en la laissant indéter-* » *minée entre certaines limites.* »

Deux pièces sont parvenues au Secrétariat de l'Institut; aucune d'elles n'a paru mériter le prix.

La Commission, vu l'importance de la question proposée, demande à l'Académie de la mettre de nouveau au concours pour l'année 1873.

L'Académie adopte cette proposition.

PRIX D'ASTRONOMIE (FONDATION LALANDE).

(Commissaires : MM. Delaunay, Faye, Mathieu, Liouville, Laugier rapporteur.)

Rapport sur le Concours de l'année 1869.

L'existence d'un grand nombre de petites planètes entre Mars et Jupiter est sans contredit un des faits les plus remarquables dont la science soit redevable aux astronomes du XIXe siècle.

Les découvertes successives des astéroïdes exercent sur les progrès

de l'Astronomie une double influence : elles agrandissent le domaine de nos connaissances uranographiques, et elles augmentent d'année en année le nombre et l'habileté des astronomes calculateurs. Aussi l'Académie, à plusieurs reprises, a-t-elle encouragé un genre de recherches si utile; nous lui rappellerons avec plaisir les noms bien connus de MM. Hencke de Driessen, Hind, de Gasparis, Luther, Goldschmidt, Chacornac, etc., qui tous ont obtenu plusieurs fois la médaille de Lalande.

Parmi les astronomes qui, dans ces dernières années, ont enrichi la nombreuse famille des petites planètes, la Commission signale M. James Watson, directeur de l'observatoire d'Ann-Arbor (États-Unis). Cet habile astronome a découvert les neuf astéroïdes nos 79, 93, 94, 100, 101, 103, 104, 105 et 106, dont les *huit* dernières dans le court intervalle d'une année.

En conséquence, la Commission propose à l'Académie de décerner, pour l'année 1869, le prix d'Astronomie fondé par Lalande à M. James Watson.

L'Académie adopte la proposition de la Commission.

PRIX FONDÉ PAR Mme LA MARQUISE DE LAPLACE.

Une Ordonnance royale ayant autorisé l'Académie des Sciences à accepter la donation, qui lui a été faite par Mme la Marquise de Laplace, d'une rente pour la fondation à perpétuité d'un prix consistant dans la collection complète des Ouvrages de Laplace, prix qui devra être décerné chaque année au premier élève sortant de l'École Polytechnique,

Le Président remet les cinq volumes de la *Mécanique céleste*, l'*Exposition du Système du Monde* et le *Traité des Probabilités* à M. François-Henri Voisin, né le 3 décembre 1848, à Pagny-la-Blanche-Côte (Meuse), sorti le premier en 1869 de l'École Polytechnique et entré à l'École impériale des Mines.

PRIX DAMOISEAU.

(Commissaires : MM. Laugier, Mathieu, Delaunay, Le Verrier, Faye rapporteur.)

L'Académie avait proposé, pour le prix Damoiseau, la question suivante :

« *Revoir la théorie des satellites de Jupiter; discuter les observations*

» *et en déduire les constantes qu'elle renferme, et particulièrement celle* » *qui fournit la détermination directe de la vitesse de la lumière; enfin* » *construire des Tables particulières pour chaque satellite.* »

L'Académie n'ayant reçu jusqu'à présent aucune pièce sur cette question, votre Commission a l'honneur de vous proposer de la remettre au concours et d'étendre jusqu'en 1872 la limite de rigueur. Voici les motifs de cette proposition. La question de 1869 rentre complétement dans l'esprit de la fondation Damoiseau; elle est toute d'actualité, car les Tables de Delambre, continuées par Damoiseau, dont se servent tous les calculateurs d'éphémérides, ne s'étendent que jusqu'à 1860; enfin le grand problème de la vitesse de la lumière a pris, dans ces derniers temps, une importance nouvelle, grâce à de récents travaux théoriques et pratiques du plus haut intérêt. Il est donc à désirer que la solution qu'en fournit l'observation des éclipses des satellites de Jupiter soit soumise à une révision attentive sur l'ensemble des documents qui se sont accumulés depuis les travaux de Delambre, et dont on n'a encore tiré aucun parti.

Nous prions l'Académie, vu l'importance de la question, d'élever à *cinq mille francs* la valeur du prix à décerner en 1872 au nom de notre savant et regretté confrère. La somme de cinq mille francs sera constituée au moyen des arrérages disponibles de la fondation Damoiseau. Dans le cas où ces arrérages ne suffiraient pas pour former la totalité des cinq mille francs, l'Académie la compléterait en prenant sur d'autres fonds disponibles.

Les conclusions de ce Rapport sont adoptées.
(*Voir* aux Prix proposés.)

PRIX PONCELET (FONDÉ PAR Mme VEUVE PONCELET).

(Commissaires : MM. Liouville, Morin, Bertrand, Serret, Combes rapporteur.)

Rapport sur le Concours de l'année 1869.

Aux termes de l'acte de donation, le prix Poncelet est destiné à l'auteur de l'Ouvrage qui aura le plus contribué aux progrès des Sciences mathématiques pures ou appliquées, publié dans les dix années qui auront précédé le jugement de l'Académie.

La Commission propose à l'Académie de décerner ce prix, pour l'année 1869, au Dr J. Robert Mayer, Correspondant de l'Académie

à Heilbronn, pour l'ensemble de ses Mémoires sur la Théorie mécanique de la chaleur, dont le premier remonte à l'année 1842, et que l'auteur a réunis, en 1867, en un volume imprimé à Stuttgart sous le titre : *Die Mechanik der Wärme*.

L'Académie adopte la proposition de la Commission.

PRIX PROPOSÉS POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

Prix à décerner en 1870.

GRAND PRIX DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

Question proposée pour 1855, *remplacée par une autre pour* 1861, *remise à* 1863, *puis à* 1865, *et enfin à* 1867 ; *nouvelle question proposée pour* 1870 : *reproduction du programme de l'année précédente.*

La question mise au Concours pour 1867 n'ayant été le sujet que d'un seul Mémoire qui n'a pas été jugé digne du prix, la Commission a proposé de retirer cette question du Concours et de la remplacer par la suivante :

« *Rechercher expérimentalement les modifications qu'éprouve la lumière dans son mode de propagation et ses propriétés, par suite du mouvement de la source lumineuse et du mouvement de l'observateur.* »

L'Académie a adopté la proposition de la Commission.

Le prix consiste en une médaille d'or de la valeur de *trois mille francs*.

Les Mémoires ont dû être remis au Secrétariat de l'Institut avant le 1er juin 1870.

PRIX D'ASTRONOMIE (FONDATION LALANDE).

La médaille fondée par M. de Lalande, pour être accordée annuellement à la personne qui, en France ou ailleurs (les Membres de l'Institut exceptés), aura fait l'observation la plus intéressante, le Mémoire ou le travail le plus utile au progrès de l'Astronomie, sera décernée dans la prochaine séance publique de 1870.

Ce prix consistera en une médaille d'or de la valeur de *cinq cent quarante-deux francs*.

Le terme de ce Concours est fixé au 1er juin de chaque année.

PRIX FONDÉ PAR Mme LA MARQUISE DE LAPLACE.

Une Ordonnance royale a autorisé l'Académie des Sciences à accepter la donation, qui lui a été faite par Mme la Marquise de Laplace, d'une rente pour la fondation à perpétuité d'un prix consistant dans la collection complète des Ouvrages de Laplace.

Ce prix sera décerné, chaque année, au premier élève sortant de l'École Polytechnique.

PRIX DU LEGS DALMONT.

Par son testament, en date du 5 novembre 1863, feu M. Dalmont a mis à la charge de ses légataires universels de payer, tous les trois ans, à l'Académie des Sciences, une somme de *trois mille francs*, pour être remise à celui de MM. les Ingénieurs des Ponts et Chaussées en activité de service qui lui aura présenté, à son choix, le meilleur travail ressortissant à l'une des Sections de cette Académie.

Ce prix triennal de *trois mille francs* sera décerné pendant la période de trente années, afin d'épuiser les *trente mille francs* légués à l'Académie et d'exciter MM. les Ingénieurs à suivre l'exemple de leurs savants devanciers, Fresnel, Navier, Coriolis, Cauchy, de Prony et Girard, et comme eux obtenir le fauteuil académique.

Un Décret impérial, en date du 6 mai 1865, a autorisé l'Académie à accepter ce legs.

En conséquence, l'Académie annonce qu'elle décernera, pour la seconde fois, le prix fondé par M. Dalmont, dans sa séance publique de 1870.

PRIX PONCELET.

Par Décret en date du 22 août 1868, l'Académie a été autorisée à accepter la donation qui lui a été faite au nom du général Poncelet, par Mme veuve Poncelet, pour la fondation d'un prix annuel destiné à récompenser l'Ouvrage le plus utile aux progrès des Sciences mathématiques pures ou appliquées, publié dans le cours des dix années qui auront précédé le jugement de l'Académie.

Le général Poncelet, plein d'affection pour ses Confrères et de dévouement aux progrès de la science, désirait que son nom fût associé d'une manière durable aux travaux de l'Académie et aux

encouragements par lesquels elle excite l'émulation des savants. Mme veuve Poncelet, en fondant ce prix, s'est rendue l'interprête fidèle des sentiments et des volontés de l'illustre géomètre.

Le prix consistera en une médaille d'or de la valeur de *deux mille francs*.

Les Mémoires ont dû être déposés au Secrétariat de l'Institut avant le 1er juin 1870.

Prix à décerner en 1871.

GRAND PRIX DE MATHÉMATIQUES.

(Commissaires : MM. Serret, Liouville, Chasles, Hermite
Ossian Bonnet rapporteur.)

Question substituée à celle proposée pour 1867 : *reproduction du programme de l'année précédente.*

La question proposée pour 1867 était énoncée en ces termes.

« *Apporter un progrès notable dans la théorie des surfaces algébriques.* »

Un seul Mémoire avait été envoyé au Concours, et la Commission a jugé qu'il n'y avait pas lieu à décerner le prix. Sur sa proposition, l'Académie a retiré la question du Concours et l'a remplacée par la suivante :

« *Faire l'étude des équations relatives à la détermination des modules*
» *singuliers, pour lesquels la formule de transformation dans la théorie*
» *des fonctions elliptiques conduit à la multiplication complexe.* »

Le prix, qui consistera en une médaille d'or de *trois mille francs*, sera décerné dans la séance publique de l'année 1871. Les pièces de Concours devront être déposées au Secrétariat de l'Institut avant le 1er juin de la même année.

Prix à décerner en 1872.

GRAND PRIX DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

(Commissaires : MM. Liouville, Delaunay, Chasles, Serret,
Fizeau rapporteur.)

L'Académie propose pour 1872 la question suivante :

« *Étudier l'élasticité des corps cristallisés au double point de vue*
» *expérimental et théorique.* »

Le prix consistera en une médaille de la valeur de *trois mille francs*. Les Mémoires devront être parvenus au Secrétariat de l'Institut avant le 1er juin 1872.

GRAND PRIX DE MATHÉMATIQUES.

Question proposée pour 1869, *maintenue au concours pour* 1872 : *reproduction du programme précédent.*

La question proposée est la suivante :

« *Perfectionner en quelque point essentiel la théorie du mouvement* » *de trois corps qui s'attirent mutuellement, suivant la loi de la nature,* » *soit en ajoutant quelque intégrale nouvelle à celles déjà connues, soit* » *en réduisant d'une manière quelconque les difficultés que présente la* » *solution complète du problème.* »

Le prix consistera en une médaille de la valeur de *trois mille francs*. Les Mémoires devront être parvenus au Secrétariat avant le 1er juin 1872.

PRIX BORDIN.

(Commissaires : MM. Serret, Liouville, Becquerel, Combes, Delaunay rapporteur.)

Le prix sera décerné au travail, analytique ou expérimental, qui aura le plus contribué à établir la *théorie des raies du spectre*.

Le prix consistera en une médaille d'or de la valeur de *trois mille francs*.

Les Ouvrages (imprimés ou manuscrits) adressés pour le Concours devront être déposés *francs de port*, au Secrétariat de l'Institut avant le 1er juin 1872, *terme de rigueur*. Les Ouvrages écrits en langue étrangère devront être accompagnés d'une traduction en français ou en latin.

PRIX DAMOISEAU.

Question proposée en 1866 *pour* 1869, *remise de nouveau au concours pour l'année* 1872 : *reproduction du programme des deux années précédentes.*

Un Décret impérial a autorisé l'Académie des Sciences à accepter la donation qui lui a été faite par Madame la Baronne de Damoiseau, d'une somme de *vingt mille francs*, « dont le revenu est destiné à » former le montant d'un prix annuel qui recevra la dénomination » de *prix Damoiseau*.

» Ce prix, quand l'Académie le jugera utile au progrès de la » science, pourra être converti en prix triennal sur une question » proposée. »

La question proposée pour l'année 1869 était la suivante :

« *Revoir la théorie des satellites de Jupiter; discuter les observations* » *et en déduire les constantes qu'elle renferme, et particulièrement celle* » *qui fournit une détermination directe de la vitesse de la lumière;* » *enfin, construire des Tables particulières pour chaque satellite.* »

Aucune pièce sur cette question n'étant parvenue au Secrétariat, l'Académie, sur la proposition de la Commission, décide, d'une part, que la question sera maintenue au concours, et, d'autre part, que le prix qui sera décerné, s'il y a lieu, en 1872, sera porté à la valeur de *cinq mille francs*.

En conséquence, l'Académie décernera, dans la séance publique de l'année 1872, ce prix de *cinq mille francs* au travail qui répondra le mieux au programme ci-dessus.

Les Mémoires seront reçus jusqu'au 1er juin 1872, *terme de rigueur*.

Prix à décerner en 1873.

GRAND PRIX DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

Question proposée en 1864 *pour* 1866, *remise au concours après modification pour* 1869 *et prorogée jusqu'en* 1873.

La question proposée est la suivante :

« *Discuter complétement les anciennes observations d'éclipses qui nous* » *ont été transmises par l'histoire, en vue d'en déduire la valeur de* » *l'accélération séculaire du moyen mouvement de la Lune, sans se* » *préoccuper d'aucune valeur théorique de cette accélération séculaire;* » *montrer clairement à quelles conséquences ces éclipses peuvent conduire* » *relativement à l'accélération dont il s'agit, soit en lui assignant forcé-* » *ment une valeur précise, soit au contraire en la laissant indéterminée* » *entre certaines limites.* »

Le prix consistera en une médaille d'or de la valeur de *trois mille francs*.

Les Mémoires devront être parvenus au Secrétariat avant le 1er juin 1873, *terme de rigueur*.

CONDITIONS COMMUNES A TOUS LES CONCOURS.

Les concurrents, pour tous les prix, sont prévenus que l'Académie ne rendra aucun des Ouvrages envoyés aux Concours; les auteurs auront la liberté d'en faire prendre des copies au Secrétariat de l'Institut.

Par une mesure générale prise en 1865, l'Académie a décidé que la clôture des Concours pour tous les prix qu'elle propose aurait lieu à la même époque de l'année, et le terme a été fixé au *premier juin*.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Ueber das Zurückbleiben der Alten in den Naturwissenschaften. Rectorsrede, gehalten von *Carl von Littrow.* — Wien, C. Gerold's Sohn, 1869.

Neumann (C.). — Ueber die Principien der Galilei-Newton'schen Theorie. Antrittsvorlesung. Leipzig; Teubner. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Unferdinger (F.). — Ueber das Dirichlet'sche Paradoxon bei unendlichen Reihen. Lex-8. Wien, Gerold. 12 Ngr.

Valentiner (G.). — Determinatio orbitæ cometæ V anni 1863. Gr. in-4. Berlin, Calvary. 14 Ngr.

Valentiner (W.). — Beiträge zur kürzesten und zweckmässigsten Behandlung geographischer Ortsbestimmungen. Mit Hülfstafeln. Leipzig, W. Engelmann, 1869.

Vega (G. von.). — Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. 53. Auflage. 14. Abdruck der neuen 40. stereotyp-Ausgabe bearbeitet von C. Bremiker. Gr. in-8. 1 $\frac{1}{4}$ Thlr.

Verbesserungen zu den Declinationen des « Verzeichnisses von 9412 Aequatoreal-Sternen zwischen + 3° und — 3° Declination. » (V. Supplementband zu den Annalen der Münchener Sternwarte.)

Weissenborn (H.). — Beiträge zur Lehre von der Transformation der Gleichungen. Programm des Realgymnasiums zu Eisenach. 34 S., gr. 8°. (Berlin, Calvary.) 16 Ngr.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

FORTI (Dott. A.), professore titolare di Matematiche al R. Liceo Galilei, e di Matematiche e Meccanica alle Scuole Tecniche comunali di Pisa, ecc. — TAVOLE DEI LOGARITMI DE' NUMERI E DELLE FUNZIONI CIRCOLARI ED IPERBOLICHE; *precedute dalla storia e teoria delle iperboliche, da applicazioni e da altre tavole di uso frequente.* — Torino, Firenze e Milano, G.-B. Paravia e Comp., 1870. 2 vol. in-16 (270-576 p.). Prix : 8 fr.

L'ouvrage que nous annonçons est une seconde édition, considérablement augmentée, du volume publié par le même auteur dans les *Annali delle Università toscane* (*). Ce volume ne contenait que la Table des logarithmes des fonctions circulaires et hyperboliques, avec cinq décimales seulement. C'était le premier essai qui eût été fait hors d'Allemagne pour propager l'usage pratique de ces combinaisons d'exponentielles réelles connues depuis plus d'un siècle (**) sous le nom général de *fonctions hyperboliques,* et que l'on a distinguées par des noms particuliers rappelant leur analogie avec les fonctions circulaires formées suivant les mêmes lois au moyen d'exponentielles imaginaires.

L'introduction de ces fonctions, ou, si l'on veut, de ces notations dans l'analyse offre l'immense avantage de conserver la même forme à des résultats qui ne diffèrent entre eux que par la réalité ou l'imaginarité de certaines quantités, et de permettre de traiter uniformément les divers cas que présente une même formule, au lieu de distinguer entre les valeurs circulaires et les valeurs logarithmiques. La similitude qui existe, à quelques changements de signes près, entre les formules relatives aux fonctions circulaires et aux fonctions hyperboliques fournit le moyen d'effectuer à l'aide de celles-ci les mêmes transformations qu'avec les premières, et d'opérer ainsi des simplifications importantes dans les calculs.

Les premiers auteurs de Tables de fonctions hyperboliques, Lam-

(*) T. VI, 1863. Pisa. In-4°.

(**) *Voir* le *Cours de Mathématiques* de l'abbé SAURI. Paris, 1774.

bert (*), Gudermann (**), Gronau (***) ont ramené ces Tables à celles des fonctions circulaires, en profitant de la propriété qu'ont les fonctions hyperboliques d'avoir les mêmes valeurs, mais dans un autre ordre, que les fonctions circulaires d'un certain angle τ, que Lambert a proposé d'appeler l'*angle transcendant* de l'argument hyperbolique, et qui est lié à cet argument ω par les formules

$$\tau = 2 \operatorname{arc tang} e^{\omega} - \frac{\pi}{4}, \quad \sin\tau = \operatorname{tangh}\omega, \quad \operatorname{séc}\tau = \cosh\omega, \quad \operatorname{tang}\tau = \sinh\omega.$$

Dès lors, il suffit, pour obtenir une Table complète des fonctions hyperboliques, d'accoler à l'argument τ d'une Table trigonométrique ordinaire la valeur correspondante de la fonction

$$\omega = \log \operatorname{nat} \operatorname{tang}\left(\frac{\tau}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

dont τ est l'angle transcendant.

Ce mode de construction des Tables est non-seulement le plus simple à réaliser, mais encore, suivant notre conviction intime, c'est de beaucoup le plus commode pour la pratique des calculs numériques. M. Gronau, au lieu de l'argument ω lui-même, ou du logarithme *naturel* de $\operatorname{tang}\left(\frac{\tau}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$, a eu l'heureuse idée d'introduire le produit de ω par le module des logarithmes décimaux, c'est-à-dire le logarithme *vulgaire* de $\operatorname{tang}\left(\frac{\tau}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$; de sorte que la colonne additionnelle peut être tirée de la Table trigonométrique elle-même; et, de plus, cette disposition facilite extrêmement le calcul des fonctions hyperboliques pour de grandes valeurs de l'argument, c'est-à-dire dans le voisinage de $\tau = \frac{\pi}{2}$.

Dans la seconde édition de son ouvrage comme dans la première, M. Forti a préféré suivre une autre voie, celle que lui avait tracée son illustre maître, Mossotti; il a pris pour point de départ une définition géométrique qu'il regarde comme plus simple et plus

(*) *Zusätze zu den logarithmischen und trigonometrischen Tabellen*. Berlin, 1770. In-12.

(**) *Theorie der Potenzial- oder Cyklisch-hyperbolischen Functionen*. Berlin, 1833. In-4°.

(***) *Tafeln für sämmtliche trigonometrische Functionen der cyklischen und hyperbolischen Sektoren*. Danzig, 1863. Grand in-8°.

naturelle que celle qui correspond à la conception analytique de Lambert. Considérons une hyperbole équilatère de demi-axe transverse = 1 et un cercle concentrique ayant ce demi-axe pour rayon. Un rayon faisant avec l'axe un angle φ, déterminera avec le cercle et avec l'hyperbole deux secteurs dont les aires seront $\frac{1}{2}\varphi$ et $\frac{1}{2}\omega$. Au lieu de l'angle φ, on peut donc considérer l'argument des fonctions circulaires qui représentent les coordonnées du cercle comme exprimant l'aire du *double secteur circulaire*. Par analogie, on considérera les coordonnées du point où l'hyperbole est rencontrée par le même rayon vecteur comme des fonctions du *double secteur hyperbolique* ω, et l'on trouvera aisément que les valeurs de l'abscisse et de l'ordonnée sont exprimées par les formules

$$\cosh\omega = \frac{e^{\omega}+e^{-\omega}}{2}, \quad \sinh\omega = \frac{e^{\omega}-e^{-\omega}}{2}.$$

Les *doubles secteurs*, circulaire et hyperbolique, φ et ω sont liés par la relation

$$\text{tangh}\,\omega = \text{tang}\,\varphi,$$

d'où l'on tire

$$\omega = \frac{1}{2}\log\text{tang}\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right), \quad \varphi = \text{arc tang}\,e^{2\omega} - \frac{\pi}{4},$$

$$\cosh\omega = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}, \quad \sinh\omega = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

ω varie de o à ∞, en même temps que φ varie de o à $\frac{\pi}{4}$. Ces relations sont, comme on le voit, moins simples que celles qui se rapportent à l'angle τ de Lambert.

Les nouvelles Tables que M. Forti a construites d'après ce système diffèrent des anciennes en ce qu'elles contiennent sept décimales au lieu de cinq, et aussi par quelques détails de disposition. Chaque ensemble de deux pages en regard comprend, à gauche, la Table trigonométrique proprement dite, disposée à la manière ordinaire; à droite, la Table des fonctions hyperboliques. Cette dernière se compose de cinq colonnes, dont les deux premières donnent, pour chaque valeur de $\varphi < 45°$, le *double secteur hyperbolique* correspondant ω et son logarithme; les deux colonnes suivantes contiennent les logarithmes du sinus hyperbolique et du cosinus hyperbolique

de ω; la cinquième, enfin, renferme les valeurs de l'*angle transcendant* τ avec l'approximation nécessaire pour en calculer les fonctions trigonométriques avec cinq décimales.

Pour rendre l'interpolation toujours possible, l'auteur a dû diminuer les intervalles de l'argument φ vers les deux extrémités de la Table. Ainsi pour les valeurs de φ, de $0^\circ 0'$ à $0^\circ 12'$ et de $44^\circ 55'$ à $45^\circ 0'$, la Table procède de seconde en seconde; de 0° à 5° et de $40^\circ 0'$ à $44^\circ 55'$, de 10 en 10 secondes; dans le reste du demi-quadrant, de minute en minute. Cela n'empêche pas le calcul des fonctions sinh et cosh d'être assez pénible pour les valeurs très-grandes de ω, tout au contraire de ce qui a lieu dans le système de M. Gronau.

Malgré ces inconvénients et quelques autres que nous pourrions signaler, mais à la plupart desquels un calculateur exercé peut remédier, du moins en partie, les Tables hyperboliques de M. Forti n'en sont pas moins précieuses, comme étant les plus étendues que l'on possède jusqu'à ce jour.

Outre cette partie principale, sur laquelle nous nous sommes étendu avec plus de détails, l'ouvrage de M. Forti comprend d'autres parties dont nous allons indiquer le contenu.

Le premier volume se divise en cinq Sections, dont la première (p. 1-32) présente un historique très-complet de la théorie des fonctions hyperboliques, de leurs principales applications et de leur réduction en Tables.

La deuxième Section (p. 33-52) contient les formules théoriques dont l'auteur s'est servi pour la construction de ses Tables.

Dans la troisième Section, M. Forti expose d'abord (p. 53-74) les principes de la Gnomonique. Il donne ensuite (p. 75-194) une série d'exemples très-bien choisis de l'application des fonctions circulaires et hyperboliques à un grand nombre de questions relatives à la géographie, à l'astronomie, à la physique mathématique, ainsi qu'à l'algèbre, à la trigonométrie, à la théorie des fonctions elliptiques.

La quatrième Section renferme les Tables des logarithmes d'addition et de soustraction à cinq décimales, précédées d'une Introduction qui en explique l'usage.

Enfin, la cinquième Section se compose de diverses Tables usuelles: parallaxe du soleil, réfractions atmosphériques, sinus des multiples de l'arc de 3 degrés, poids spécifiques, nombres de vibrations pour

les divers tons, vitesse du son, chaleurs spécifiques, force élastique de la vapeur d'eau, indices de refraction

Outre les grandes Tables de fonctions circulaires et hyperboliques dont nous avons parlé en commençant, le second volume renferme une Table des logarithmes vulgaires des 10800 premiers nombres avec sept décimales.

On voit par cette analyse combien le Recueil de M. Forti est riche en précieux renseignements, que l'on trouverait difficilement ailleurs rassemblés sous une forme plus commode. Ajoutons que l'exécution typographique est très-satisfaisante, bien qu'il soit à regretter que l'auteur n'ait pas adopté le format in-8°, qui aurait diminué l'épaisseur un peu gênante du second volume, tout en permettant d'employer un caractère moins fin et moins fatigant pour la vue.

J. Hoüel.

JOURNAL de l'École Polytechnique, publié par le Conseil d'instruction de cet établissement. Quarante-troisième Cahier, t. XXVI, in-4°, 1870. Paris, Gauthier-Villars. Prix : 10 francs (*).

Rolland (E.). — *Mémoire sur l'établissement des régulateurs de la vitesse, solution rigoureuse du problème de l'isochronisme par les régulateurs à boules conjuguées, sans emploi de ressorts, ni de contre-poids variables; influence du moment d'inertie sur les oscillations à longue période.*

Voici le préambule de cet important travail :

« Convaincu par une longue expérience de l'insuffisance des règles données jusqu'ici aux constructeurs pour assurer la transmission régulière du travail dans les machines, je me suis livré, sur la question si délicate de la réglementation de leur vitesse, à des études approfondies dont je me propose d'exposer successivement les résultats. Mais en attendant qu'il me soit possible de le faire avec les développements convenables, j'ai pensé devoir en extraire une partie essentielle et particulièrement intéressante pour les applications pratiques. Tel est le but du présent Mémoire.

« On admet, en général, que la sensibilité d'un régulateur est caractérisée par la quantité à laquelle on donne le nom d'*écart propor-*

(*) Le *Journal de l'École Polytechnique* paraît à intervalles indéterminés.

tionnel de la vitesse, quantité égale à une fraction dont le numérateur est la différence des vitesses extrêmes sous l'action desquelles l'appareil peut rester en équilibre, et dont le dénominateur est le double de la vitesse de règle, ou, plus exactement, la somme des vitesses extrêmes.

» En cherchant la valeur analytique de cet *écart proportionnel* pour un dispositif quelconque de la famille des régulateurs, on trouve qu'elle est la somme de deux quantités, dont la première est indépendante des résistances passives du système et dont la seconde est, au contraire, proportionnelle à leur résultante.

» Les résistances passives agissent toujours en sens inverse du mouvement; cette seconde quantité ne peut jamais être annulée: il est possible seulement de la rendre suffisamment petite. Mais il n'en est plus de même pour la première, et rien ne s'oppose à ce qu'elle soit égale à zéro, en disposant convenablement les diverses parties du mécanisme.

» Les régulateurs dans lesquels cette annulation a été réalisée sont ceux auxquels nous donnerons, avec Léon Foucault, la qualification d'*isochrones*. Ils sont doués, sous la rapport de la sensibilité, de qualités analogues à celles d'une balance dont le centre de gravité coïnciderait avec celui de rotation, et, par ce motif, leur réalisation a été le but des efforts d'un grand nombre d'inventeurs (*). »

Haton de la Goupillière (J.-N.). — *Recherches sur les centres de gravité.*

« Ce travail est consacré à l'étude du centre de gravité dans des conditions nouvelles. Il comprend deux parties distinctes. Dans la première, je me propose la détermination du centre dans des cas qui échapperaient complétement aux anciennes méthodes par la complication inabordable des intégrations. L'artifice fondamental consiste dans l'emploi des variables d'Euler pour représenter les courbes au moyen d'une équation entre la longueur de l'arc et l'angle de contingence. On arrive ainsi à traiter avec facilité un grand nombre de

(*) M. Delaunay, dans un Rapport sur ce Mémoire présenté à l'Académie, a conclu de la manière suivante, le 23 mars 1868 :

« En résumé, le Mémoire de M. Rolland renferme une excellente étude de la question des régulateurs isochrones et fait connaître plusieurs solutions nouvelles, à la fois nettes et simples, de cette intéressante question. Nous proposons à l'Académie d'ordonner l'insertion de ce Mémoire dans le *Recueil des Savants étrangers.* »

La seconde partie comprend des recherches barocentriques in-
s, dans lesquelles il s'agit de déterminer la figure elle-même,
ne ou surface, d'après des propriétés imposées à l'avance à son
e de gravité; non des propriétés de maximum comme celles
l'on a déjà résolues par le calcul des variations, mais des
ions entre les coordonnées terminales du corps et celles de son
e de gravité. »

uRICE LEVY. — *Mémoire sur les coordonnées curvilignes orthogo-
et en particulier sur celles qui comprennent une famille quelconque
rfaces du second degré.*

uteur débute par la démonstration géométrique d'une condition
saire et suffisante pour qu'une famille de surfaces puisse faire
e d'un système triplement orthogonal. On sait, en effet (c'est
ouquet qui a le premier attiré l'attention sur ce point), qu'une
le de surfaces définie par l'équation $\alpha = \varphi(x, y, z)$ n'est pas
sairement une des trois familles d'un système triplement ortho-
l. M. Bouquet a mis ce fait en évidence en montrant que les
ces particulières dont l'équation est

$$\alpha = X + Y + Z,$$

nt partie d'un système orthogonal que si X, Y, Z satisfont à cer-
s conditions (*). M. Darboux, dans un travail inséré au tome III
nales de l'École Normale supérieure, avait montré que, pour que
rfaces $\alpha = \varphi(x, y, z)$ fassent partie d'un système orthogonal, il
t il *suffit* que α satisfasse à une équation aux dérivées partielles
oisième ordre. Quand cette condition est remplie, les deux

Déjà, il est vrai, en 1862, M. Bonnet avait réalisé le progrès le plus important et ramené la solution du problème à l'intégration d'une équation aux différences partielles du troisième ordre. Il avait ainsi indiqué nettement et précisé l'ordre de difficulté de la question, mais sa méthode exigeait encore l'intégration de plusieurs équations simultanées du second ordre auxquelles doit satisfaire une fonction de trois variables.

M. Levy examine successivement les familles de surfaces moulures, de surfaces de révolution, de cônes, de cylindres, etc.

Après avoir étudié tous ces systèmes particuliers, M. Levy donne le théorème suivant :

« Pour qu'une famille de surfaces puisse faire partie d'un système triplement orthogonal, il est nécessaire que la ligne des ombilics de cette famille soit une trajectoire orthogonale des surfaces qui la composent. »

M. Levy recherche ensuite les systèmes orthogonaux formés de surfaces du second degré, et il montre que, dans ce cas, le théorème précédent donne une condition non-seulement nécessaire, mais suffisante. Le travail se termine par diverses applications et une généralisation de la méthode employée.

Tissot (A.). — *Sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes.*

Ce Mémoire très-élégant a pour objet l'intégration des transcendantes de la forme $e^x \frac{f(x)}{\sqrt[n]{X}}$.

« Dans les six premiers paragraphes, on suppose que $f(x)$ et X sont des fonctions entières, et l'on donne la forme que doit affecter l'intégrale lorsqu'elle existe sous forme finie, c'est-à-dire lorsqu'il est possible de l'exprimer à l'aide des fonctions algébriques, exponentielles, logarithmiques, auxquelles il est inutile de joindre les fonctions circulaires directes ou inverses, puisque ces dernières ne sont autre chose que des logarithmes ou des exponentielles d'imaginaires. Cette forme une fois trouvée, il suffit, pour obtenir la valeur de l'intégrale et appliquer à un polynôme de degré connu la méthode des coefficients indéterminés. Le mode d'analyse dont nous avons fait usage pour traiter cette première question a été emprunté à un Mé-

moire de M. Liouville sur les intégrales dont la valeur est algébrique (*).

Dans le cinquième paragraphe, on démontre que, si l'intégrale proposée existe sous forme finie, elle s'annule quand on la prend entre deux limites respectivement égales à $-\infty$ et à l'une des racines de l'équation $X = 0$.

Dans le sixième, on considère le cas où $f(x)$ serait une fonction rationnelle non entière et celui où l'expression proposée ne contiendrait plus de radical.

Dans les trois suivants, on donne un autre procédé pour reconnaître si la valeur de l'intégrale $\int e^x \frac{f(x)dx}{\sqrt[n]{X}}$ existe sous forme finie, et pour trouver alors sa valeur. Ce procédé repose sur l'emploi de formules qui permettent de la décomposer en deux parties, dont l'une est une fonction connue de X, et dont l'autre est une intégrale qui n'existe jamais sous forme finie, de sorte que l'on a simplement à constater si la dérivée de cette dernière est ou non identiquement nulle.

Enfin, il importait de démontrer que les conditions données comme nécessaires dans le cinquième paragraphe pour l'existence de l'intégrale sous forme finie sont aussi suffisantes. C'est à quoi l'on parvient, en remarquant que les diverses transcendantes que l'on produirait en faisant varier le degré de $f(x)$ dans $\int e^x \frac{f(x)}{\sqrt[n]{X}}dx$ dépendent linéairement d'un certain nombre d'entre elles, et en formant les équations différentielles linéaires dont ces dernières permettent de trouver les solutions générales. Pour obtenir ces équations différentielles, nous n'avons eu qu'à imiter un procédé déjà employé par M. Hermite à propos des intégrales abéliennes (**).

La démonstration exige aussi que l'on établisse, entre certaines intégrales définies, une relation analogue à celle que fournit le théorème de Legendre sur les intégrales elliptiques de première et de seconde espèce à modules complémentaires; mais, sur ce sujet, nous pouvons renvoyer à une Note que nous avons publiée ultérieurement (***). »

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, XXII[e] Cahier.

(**) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1[er] semestre 1844.

(***) *Journal de M. Liouville*, 2[e] série, t. XVII.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

ACTA Societatis scientiarum Fennicæ. — *Helsingforsiæ* (*).
T. VII, 1863.

Lindelöf (L.). — *Théorie des surfaces de révolution à courbure moyenne constante.* (28 p.; 11 pl.; fr.)

Ce Mémoire a pour objet la théorie mathématique des surfaces qui se présentent dans les belles expériences de M. Plateau sur les figures d'équilibre des masses fluides soustraites à l'action de la pesanteur. Ces surfaces jouissent de la propriété que la somme de leurs courbures principales en chaque point est constante. M. Lindelöf a étudié le cas particulier où ces surfaces sont de révolution.

Krueger (A.). — *Sur la parallaxe de l'étoile* LL 21258. (10 p.; all.)

Elle est $= 0'',260 \pm 0'',020$.

Krueger (A.). — *Sur la parallaxe de l'étoile* n° 17415,6 *d'Œltzen.* (8 p.; all.)

On trouve $0'',243 \pm 0'',0223$.

T. VIII, 1867.

Krueger (A.). — *L'amas d'étoiles h de Persée. Observations faites à l'héliomètre de Bonn, avec leur calcul.* (30 p., 11 pl.; all.)

Argelander (F.-W.-A.). — *Catalogue des aurores boréales observées aux Observatoires d'Åbo et de Helsingfors pendant les années* 1823-1837. (50 p.; all.)

Krueger (A.). — *Recherches sur l'orbite de la planète Thémis, avec une nouvelle détermination de l'attraction de Jupiter.* (38 p.; all.)

Les perturbations de Thémis sont calculées par la méthode des quadratures mécaniques. Le calcul montre que la masse de Jupiter $\frac{1}{1047,879}$, adoptée par Bessel, doit être augmentée de 0,000068 de sa valeur.

Lindelöf (L.). — *Sur les maxima et minima d'une fonction des*

(*) Publié à des époques indéterminées, par volumes in-4. En diverses langues.

rayons vecteurs menés d'un point mobile à plusieurs centres fixes. (15 p.; fr.)

Application à la somme des rayons, à la somme de leurs carrés, à leur produit.

LINDELÖF (L.). — *Remarques sur les différentes manières d'établir la formule*

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = \frac{d^2z}{dy\,dx}.$$

(7 p.; fr.)

L'auteur critique les démonstrations de ce principe données par MM. Schlömilch et Bertrand dans leurs Ouvrages sur le calcul différentiel. La démonstration de M. Schlömilch (*) suppose que, dans l'équation

$$\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = f'_x(x+\theta h, y),$$

θ est indépendant de y, ce qui n'est pas généralement exact. Quant au principe sur lequel repose la démonstration de M. Bertrand, savoir : que, si $F(x, \alpha)$ est infiniment petit avec α, quel que soit x, il en sera de même de $D_x F(x, \alpha)$, cette proposition, qui se vérifie sur toutes les fonctions continues que l'on rencontre, nous semble être une hypothèse que l'on doit admettre au même titre que l'on admet, pour toute fonction continue d'une seule variable, l'existence d'une dérivée; c'est-à-dire que l'on exclut d'avance les fonctions discontinues ou oscillantes qui ne jouiraient pas de cette propriété. Sans cela, la démonstration de M. Lindelöf pourrait être sujette à des objections analogues à celles qu'il fait à la démonstration de M. Bertrand (**).

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK. — Leipzig. T. XV, 1870. Ier Cahier.

KÖTTERITZSCH (TH.). — *Sur la résolution d'un système d'un nombre infini d'équations linéaires.* (15 p.)

On ramène d'abord le système à un autre dont le déterminant se réduit à son terme principal.

(*) *Compendium der höheren Analysis.* 2. Aufl., Bd. I. S. 69.

(**) Voir le *Calcul différentiel* de M. Serret où se trouve une démonstration communiquée à l'auteur par M. O. Bonnet.

Boltzmann (L.). — *Sur l'action électrodynamique réciproque des parties d'un courant électrique de forme variable.* (17 p., 1 pl.)

Les déterminations de Weber concernant l'intensité de l'action mutuelle des éléments de courant ont été faites sur des solénoïdes, c'est-à-dire sur des courants que l'on peut considérer comme fermés. L'auteur a opéré sur des courants dont les éléments pouvaient être, d'après lui, regardés comme appartenant à un courant non fermé. Dans ses expériences, il a pris soin d'éviter les inconvénients provenant de la résistance qu'oppose la viscosité du mercure que l'on prend pour établir les communications. Comparaison des formules avec les résultats de l'expérience.

Hochheim (Ad.). — *Sur les lieux géométriques des points remarquables d'un triangle.* (8 p., 1 pl.)

Un triangle de base constante a son sommet mobile sur une section conique. Trouver les lieux géométriques de l'intersection des hauteurs, du centre du cercle inscrit, du centre de gravité, etc.

Matthiessen (L.). — *La règle de fausse position chez les Hindous et les Arabes du moyen âge, et application remarquable de cette règle à la résolution directe des équations littérales du deuxième et du troisième degré.* (7 p.)

Enneper (A.). — *Relations entre deux séries infinies.* (9 p.)

Enneper (A.). — *Remarques sur une équation différentielle du second ordre.* (8 p.)

Étude sur les équations différentielles données par Legendre, pour les intégrales elliptiques de première et de seconde espèce, différentiées par rapport au module. En appliquant à l'intégration de ces équations la méthode de la variation des constantes arbitraires, on en tire des relations remarquables entre certaines intégrales définies.

Reye (Th.). — *Propriété remarquable de l'hélice.*

Si l'on mène les plans osculateurs aux points où l'hélice est rencontrée par un plan π, tous ces plans rencontrent π en un même point P. Et si le plan π tourne autour d'une droite, le point P décrira une autre droite.

II[e] Cahier. Mai 1870.

Holzmüller (G.). — *Sur l'application de la méthode de Jacobi et*

d'Hamilton au cas de l'attraction suivant la loi électrodynamique de Weber. (23 p.)

Dans ses *Leçons sur la dynamique* (*), Jacobi borne l'application de la méthode d'Hamilton aux problèmes dans lesquels le mouvement ne dépend que de la configuration des points, et non de leurs vitesses. Cette méthode peut cependant, comme Riemann l'a remarqué, s'appliquer également à beaucoup de questions dans lesquelles les vitesses entrent dans les formules.

On sait que d'après le théorème d'Hamilton, les équations finies du mouvement peuvent être mises sous la forme

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\mathrm{T} + \mathrm{U})\, dt = 0,$$

T étant la demi-force vive du système, U la fonction des forces, dépendant seulement des coordonnées et du temps, mais non des vitesses, et la variation δ ne portant pas sur les limites de l'intégrale. Il s'agit de savoir si ce théorème est encore applicable à des cas où la fonction U contiendrait dans son expression les vitesses, et en particulier au cas du mouvement d'un point attiré suivant la loi de Weber vers un centre fixe. L'auteur démontre que cette application est possible, et il intègre l'équation aux dérivées partielles du premier ordre à laquelle se ramène la solution du problème.

WITTWER. — *Études sur la physique moléculaire* (2ᵉ suite). (25 p.).
Recherches sur les propriétés de l'éther.

HEGER (R.). — *Nouvelles coordonnées homogènes du plan.* (4 p.)
Le plan variable qui coupe les arêtes.

$$A_0A_3, \quad A_1A_3, \quad A_2A_3,$$

du tétraèdre fondamental $AA_1A_2A_3$ dans les rapports respectifs

$$\mu_0 : \mu_3, \quad \mu_1 : \mu_3, \quad \mu_2 : \mu_3$$

peut être représenté par ces rapports, et par le symbole $(\mu_0 : \mu_1 : \mu_2 : \mu_3)$. On peut attribuer à chaque plan un système déterminé de valeurs des quantités $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ elles-mêmes, et non plus seulement de leurs rapports, en assujettissant tous les groupes de quantités μ à une

(*) *Vorlesungen über Dynamik von* C.-G.-J. JACOBI, *nebst fünf hinterlassenen Abhandlungen herausgegeben von* A. CLEBSCH. Berlin. Reimer 1866. 1 vol. in-4°.

même équation arbitraire, que l'on supposera linéaire, pour plus simplicité, et que l'on choisira de manière que la transformation d coordonnées rectangles en coordonnées homogènes se fasse le pl simplement possible. Les nouvelles coordonnées proposées par l'a teur sont les rapports des distances du plan aux sommets du tétraèd et au centre de la sphère inscrite; elles sont positives pour les so mets du tétraèdre situés du même côté que le centre par rapport plan, négatives pour les autres.

ENNEPER (A.). — *Réduction d'une intégrale multiple.* (3 p.)

Soit $\Sigma a^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$, et de même pour les expressi analogues, et

$$P = \int\int\cdots\int \frac{dx_1\, dx_2 \ldots dx_n}{(1 + \Sigma a^2 - 2\Sigma ax)(1 + \Sigma b^2 - 2\Sigma bx)},$$
$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqq 1.$$

On ramène cette intégrale à la suivante :

$$P = \int_0^\pi \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \frac{\sin^n\theta_1 \sin^{n-1}\theta_2 \ldots \sin\theta_n}{MN} d\theta_1 d\theta_2 \ldots d\theta_n,$$

M et N étant de la forme

$$M = 1 + \Sigma a^2 - 2(a\cos\theta_1 + a'\sin\theta_1\cos\theta_2), \text{etc.}$$

Voyez, pour le cas de $n = 2$, le travail de M. Hermite (*Annal scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. II, p. 49, 1865.)

SCHLÖMILCH (O.). — *Sur les courbes rectifiables.* (1 p.)

En choisissant les fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ de manière que l'expressi $T = \int\sqrt{2\varphi'(t)\psi'(t)}\,dt$ soit intégrable, l'arc de la courbe dont l coordonnées sont

$$x - A = \varphi(t) + T, \quad y - B = \psi(t) + T$$

aura pour expression

$$s - C = \varphi(t) + \psi(t) + T.$$

SCHUBERT (H.) — *Détermination géométrique de l'ordre de la surf fondamentale* (Kernfläche) *de Hesse* (*), *correspondante à une surf d'ordre quelconque.* (4 p.)

(*) Les géomètres paraissent s'accorder à appeler cette surface la *Hessienne*, et ce n que justice.

Eckardt (F.-E.) — *Théorèmes sur l'épicycloïde et l'hypocycloïde.*

Schlömilch (O.) — *Sur le paradoxe de Dirichlet dans les séries infinies.* (1 p.)

Changement de la valeur limite d'une série non absolument convergente, dont on change l'ordre des termes (*).

ARCHIV der Mathematik und Physik. Herausgegeben von J.-A. Grunert. Greifswald.

T. LI, 3e Cahier, 1869.

Grunert (J.-A.). — *Équation générale des sections coniques et en particulier du cercle, en coordonnées trilinéaires.* (19 p.; all.)

Grunert (J.-A.). — *Discussion générale de l'équation des lignes du second degré.* (50 p.; all.)

Résumé des formules relatives à ces courbes, rapportées à des coordonnées obliques.

Grunert (J.-A.). — *Discussion générale de l'équation du second degré*

$$Ap_0^2 + Bp_1^2 + Cp_2^2 + Dp_0p_1 + Ep_1p_2 + Fp_2p_0 = 0,$$

en coordonnées trilinéaires ou trimétriques. (28 p.; all.)

Unferdinger (Fr.). — *Théorie du tétraèdre donné par ses six arêtes.* (14 p.; all.)

Lagrange a donné, dans son *Mémoire sur les pyramides* (**), le volume du tétraèdre en fonction de ses six arêtes. Carnot a exprimé le même volume au moyen de deux arêtes opposées, de leur plus courte distance et de l'angle qu'elles font entre elles. Crelle y a ajouté l'expression du rayon de la sphère circonscrite. M. Unferdinger s'est proposé de compléter ces recherches par la détermination des autres éléments du tétraèdre. Il est ainsi parvenu à des résultats qui ne sont pas sans importance pour l'étude des propriétés de la pyramide triangulaire et du parallélépipède.

Nippert (P.). — *Solution de quelques problèmes.* (6 p.; all.)

(*) Relatif à une réclamation de M. Unferdinger.

(**) *Œuvres de Lagrange*, t. III, p. 661.

Ligowski. — *Sur la réduction des distances lunaires au moyen des logarithmes à quatre décimales, et sans l'emploi de tables auxiliaires.* (7 p.; all.)

Les formules employées généralement pour cette réduction ont ce défaut capital, que la détermination de quantités très-petites dépend du calcul de quantités relativement considérables, ce qui rend les opérations plus pénibles et moins sûres. Les formules de M. Ligowski, qui sont d'un emploi très-commode, peuvent donc rendre un grand service aux marins, en les dispensant de l'usage des grandes tables logarithmiques, qui leur sont si inutiles dans leurs calculs ordinaires.

Dostor (G.). — *Exercices sur le binôme de Newton.* (2 p.; fr.)

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN (*).

T. LXXV (suite), nos 1797-1800.

Hall (Asaph). — *Notes supplémentaires sur les observations de magnétisme et de position faites par l'expédition américaine en Sibérie pour l'observation de l'éclipse du 7 août* 1869. (5 col.; angl.)

Prey (A.). — *Éléments et éphéméride de la planète* (43) *Ariadne.*

Dembowski. — *Lettre au rédacteur.* Mesures micrométriques des étoiles doubles principales. (3 cartes, 15 col.; fr.)

Argelander (Fr.). — *Sur la dépendance entre les déclinaisons et les grandeurs des étoiles.* (7 col.; all.)

Considérations sur l'erreur personnelle.

Deike (C.). — *Eléments et éphéméride de Thisbé pour l'opposition de* 1870.

T. LXXVI, nos 1801-1824; 1870.

Spörer. — *Observations des taches solaires.* (14 col.; all.)

Distribution héliographique pendant les xie, xiie et xiiie périodes de rotation de 1869. Remarques sur la position excentrique du noyau d'après Wilson.

(*) Voir *Bulletin*, p. 87.

Gould (B.-A.). — *Lettre au Rédacteur*. (4 col.; angl.)

Comparaison des positions du nouveau Catalogue de Poulkova avec celles du Catalogue de Gould, intitulé « Standard Places of Fundamental Stars ».

Schulhof (L.). — *Éléments et éphéméride de la planète* (108) *Hécube*. (6 col.; all.)

Klinkerfues (W.) — *Recherches sur le mouvement de la Terre et du Soleil dans l'éther*. (6 col.; all.)

Maywald. — *Orbite et éphéméride de* (97) *Clotho*.

Riefler (J.). — *Sur le prisme des passages*. (3 col.; all.)

Description et figure de l'instrument.

Oppolzer (Th.). — *Sur la latitude de l'Observatoire de Josefstadt*.

Dembowski. — *Observations d'étoiles doubles* (suite). (5 art., 56 col.; fr.)

Schubert (E.). — *Éléments de Thalie, leurs perturbations par Jupiter, et Table pour la solution du problème de Kepler*. (10 col.)

Winnecke (A.). — *Observations, éléments et éphéméride de la comète I*, 1870, *avec des remarques sur la position géographique de Karlsruhe*. (2 col.; all.)

Stark (J.-E.). — *Éléments de la planète* (100) *Hécate*.

Marth (A.). — *L'éclipse de Lune du* 12 *juillet* 1870. (4 col.; angl.)

Seydler (A.). — *Sur l'orbite de* (106) *Dioné*.

Veltmann (W.). — *Sur la propagation de la lumière dans les milieux en mouvement*. (14 col.; all.)

Peters (C.-A.-F.). — *Sur les observations exécutées en* 1869 *à Altona et à Berlin avec un pendule à réversion construit par Lohmeier*.

BULLETINS de l'Académie royale des Sciences de Belgique. Bruxelles, chez Hayez (*).

(*) Paraissant chaque mois par fascicules, formant annuellement deux volumes in-8°.

T. XXVII, janvier-juin 1869.

Catalan (E.). — *Sur les roulettes et les podaires.*

La somme des courbures de la roulette et de la podaire, en deux points correspondants, est égale à l'inverse de la distance comprise entre le point décrivant de la roulette et le point où la courbe roulante touche la droite fixe.

Catalan (E.). — *Sur l'addition des fonctions elliptiques de première espèce.* (6 p.)

Nouvelle interprétation géométrique de l'intégrale algébrique complète de l'équation d'addition des intégrales de première espèce.

T. XXVII, juillet-décembre 1869.

Gilbert (Ph.). — *Sur quelques propriétés des surfaces apsidales ou conjuguées.* (23 p.)

Étant donnés un point S et une surface O, l'auteur appelle *ligne d'attraction* une ligne formée par les intersections successives des sections normales à la surface, dont les plans passent par le point O. Si, dans le plan de la section, on fait tourner d'un angle droit le rayon vecteur OM de la surface S, le lieu des extrémités M' de a nouvelle position sera une surface S', dite surface *apsidale* (Salmon) ou *conjuguée* (Catalan).

Après avoir établi les propriétés de ces surfaces, l'auteur en fait l'application à l'ellipsoïde et à la surface des ondes.

Folie (F.). — *Note sur quelques théorèmes généraux de géométrie supérieure.* (15 p.)

Démonstration purement analytique des principaux théorèmes développés par M. Chasles dans son *Traité des sections coniques.*

FORHANDLINGER ved de Skandinaviske Naturforskeres tiende Möde i Christiania, fra den 4[de] til den 10[de] Juli 1868. — Christiania, hos Feilberg og Landmark; 1869 (*).

Steen (Ad.). — *Sur l'intégration des équations différentielles linéaires au moyen des intégrales définies.* (32 p.)

(*) *Actes du dixième Congrès des Naturalistes scandinaves,* tenu à Christiania du 4 au 10 juillet 1868. — 1 vol. gr. in-8°. Prix : 1 Spdlr. En danois et en suédois.

L'intégration des équations différentielles au moyen des intégrales définies se fait ordinairement par des méthodes indirectes ou purement empiriques, soit en sommant une série infinie qui donne le développement de l'intégrale, soit en partant d'une forme arbitraire d'intégrale définie, et déterminant les constantes et les limites de cette intégrale de manière à satisfaire à l'équation différentielle, soit en cherchant les équations différentielles auxquelles peuvent satisfaire des intégrales définies données. L'auteur de ce Mémoire a pour objet de découvrir des méthodes plus directes et plus rationnelles pour l'intégration au moyen des intégrales définies. Il étudie l'équation linéaire

$$(a_0 x + b_0) y^{(n)} + (a_1 x + b_1) y^{(n-1)} + \ldots + (a_n x + b_n) y = 0,$$

dont il traite plusieurs cas particuliers, et à laquelle il ramène, par des changements de variables, d'autres équations, telles que

$$y''' + A(ax + b) y'' + B(ax + b)^2 y' + C(ax + b)^3 y = 0,$$
$$x^{2n} y^{(n)} + p x^{2n-1} y^{(n-1)} - a^n y = 0,$$
$$x^4 y'' + (ax^3 + bx^2) y' + (cx + d) y = 0.$$

ZEUTHEN (H.-G.). — *Sur un nouveau système de coordonnées dans l'espace.* (16 p.)

GULDBERG (A.-S.). — *Sur la formation de nouveaux algorithmes dans le calcul infinitésimal.* (12 p.)

M. W. Schell a publié, dans les *Archives de Grunert* (t. XXV, p. 1, 1855), un Mémoire intitulé : *Grundzüge einer neuen Methode der höheren Analysis*, où il expose un procédé de calcul infinitésimal dans lequel les différences infiniment petites sont remplacées par des rapports infiniment peu différents de l'unité. Cette méthode permet de traiter un grand nombre de problèmes résolus jusqu'ici par le calcul différentiel et par le calcul intégral.

M. Guldberg donne un aperçu de cette méthode et de ses applications; il établit l'identité de ses résultats avec ceux du calcul différentiel ordinaire, et il arrive à cette conclusion, sur laquelle, dit-il, on ne saurait trop insister, que ce n'est pas le calcul mécanique qui nous fournit les moyens de résoudre les problèmes, mais bien l'idée directrice sur laquelle il est fondé. Ainsi, c'est le principe infinitésimal et non la forme de l'algorithme qui décide du succès de la mé-

thode, quoique telle ou telle forme puisse être plus ou moins appropriée à certaines recherches particulières.

Petersen (J.). — *Sur les corps flottants.* (17 p.)

Ce Mémoire traite de l'équilibre des corps flottants et de sa stabilité. L'auteur discute les démonstrations données par Bouguer et par M. Duhamel, et les regarde comme insuffisantes. Ses résultats s'accordent pour la plupart avec ceux qu'a obtenus M. Dupin dans ses *Applications de Géométrie et de Mécanique.*

Bjerknes (C.-A.). — *Sur le mouvement simultané de plusieurs corps sphériques dans un fluide incompressible.* (52 p.)

Un système de sphères se meut dans un fluide parfait, incompressible et homogène, s'étendant à l'infini, sans qu'aucun autre corps, fixe ou mobile, s'y rencontre en dehors du système. Pour des distances croissantes, la pression tend d'une manière continue vers une limite constante, indépendante de la direction. D'ailleurs aucune force extérieure n'agit sur l'intérieur du fluide, bien qu'une telle force puisse agir sur les corps que le fluide contient. Le mouvement permanent du fluide est lié à un potentiel des vitesses.

A ces conditions, il faut encore ajouter celle-ci, que la pression-limite, à une distance infinie, soit assez grande pour que les mouvements puissent s'effectuer sans interrompre la continuité du fluide.

Bien que cela ne soit pas essentiel pour ce qui doit suivre, remarquons en passant que la pression-limite peut être diminuée, et même, pour des mouvements suffisamment petits, être supposée nulle, si l'on attribue au fluide des propriétés plus générales à un certain point de vue. On peut ainsi supposer le fluide doué d'une certaine cohésion qui s'oppose à la séparation des parties dans les directions normales, sans qu'il soit nécessaire d'introduire l'action d'une pression extérieure sur la masse fluide. Les choses se passeraient comme s'il existait une pression ou une succion extérieure, pourvu que, dans le cas de la succion, celle-ci ne dépassât pas une certaine valeur maximum constante. Dans un tel fluide, pourvu que les mouvements soient assez petits, on évite la formation d'espaces vides, et en même temps, à cause de l'incompressibilité, le volume ne change pas. Il n'en pourra pas moins, dans l'intérieur du fluide, se produire des changements de forme et régner la plus grande mobilité possible; les particules peuvent glisser les unes sur les autres sans résistance. de

même que deux plaques de verre, unies par une couche d'eau, si l'on fait abstraction de la grandeur du frottement, très-faible relativement à celle de l'adhésion, peuvent glisser l'une sur l'autre par l'action du moindre effort, quoiqu'elles résistent à une action normale qui tendrait à les rapprocher ou à les séparer. Un tel fluide, au point de vue mathématique, peut se traiter absolument comme le fluide incompressible et parfait que l'on considère ordinairement; mais il présente cet avantage, que la pression négative, ou succion, sera rendue possible, et, comme conséquence, que des mouvements, qui autrement ne sauraient avoir lieu sans interruption de la continuité, pourront s'effectuer, du moins en augmentant d'une manière ou d'une autre la pression.

Le problème du mouvement d'un tel système de corps se ramène au problème des pressions totales sur les diverses sphères dont il se compose, et celui-ci sera résoluble lorsque le potentiel des vitesses sera connu. Ce problème peut se résoudre exactement, quand le système se réduit à deux sphères dont les centres se meuvent suivant une même ligne fixe. L'auteur traite ensuite le problème général, où le nombre des sphères et leur mode de mouvement sont quelconques, dans l'hypothèse où les sixièmes puissances des rapports des rayons aux distances des centres sont négligeables.

L'auteur commence par traiter avec détail le cas d'une seule sphère de volume variable ou constant. Il parvient ensuite à une série de résultats approximatifs, sous la condition que les distances soient suffisamment grandes.

SYLOW. — *Remarques sur le caractère de résolubilité d'une équation algébrique au moyen de radicaux, lorsqu'elle est irréductible, et que son degré est un nombre premier.* (8 p.)

GULDBERG (C.-M.). — *Sur les équations de l'état des corps.* (13 p.)

L'auteur traite de l'état moléculaire des corps au point de vue de la théorie mécanique de la chaleur.

HOLTEN. — *Sur la théorie des machines électromagnétiques.* (5 p.)

Cette Note a pour but de compléter la théorie donnée par Koosen dans les *Annales de Poggendorff*, t. LXXXVII.

GIORNALE DI MATEMATICHE. T. VII, fasc. 2. Mai-juin 1870 (*).

BATTAGLINI (G.). — *Sur les formes ternaires quadratiques* [suite et fin]. (28 p.)

Étant données deux couples de quadriques conjointes qui déterminent dans le continu deux séries d'éléments de première classe et de premier ordre, ces couples *définissent* deux séries de quadriques ayant toutes quatre éléments communs. Pour chacune de ces séries, l'auteur détermine : 1° les trois quadriques douées d'un élément double; 2° les couples des éléments conjugués harmoniques, et 3° la triade conjuguée par rapport à toutes les quadriques de la série. Ensuite l'auteur considère les séries équiharmoniques formées par les éléments harmoniques, par rapport aux quadriques de la série, des divers éléments du système, et il détermine la quadrique des *neuf éléments*, c'est-à-dire la quadrique formée par les éléments, de première classe ou de premier ordre, d'un même élément de premier ordre ou de première classe, par rapport aux diverses quadriques de la série.

Cela étant établi, des propriétés des formes binaires cubiques, appliquées à la cubique binaire qui exprime le discriminant d'une quadrique de la série, l'auteur déduit la signification des invariants du système de deux quadriques, tant des invariants fondamentaux que des autres qui en sont formés. Puis, au moyen de l'hessien et du covariant cubique du discriminant en question, il détermine les deux quadriques *équiharmoniques* et les trois quadriques *harmoniques* de la série. Enfin, après avoir indiqué d'autres significations des invariants fondamentaux du système, en les déduisant principalement de la considération des *séries multiples* de quadriques *harmoniques* par rapport à une autre quadrique, l'auteur trouve la condition pour que, étant données quatre quadriques de la série, il puisse exister une triade d'éléments *inscrite* dans l'une et *circonscrite* aux autres.

Passant ensuite à la considération des quadriques conjointes aux quadriques de la série, l'auteur parvient au contrevariant qui détermine les quatre éléments communs aux deux quadriques qui la définissent, et il établit en conséquence la signification de leur covariant ou contrevariant fondamental. Après cela, l'auteur détermine : 1° par le système de deux quadriques conjointes, les quadriques *harmoniques*

(*) Voir *Bulletin*, p. 219.

conjointes (polaires réciproques) de l'une par rapport à l'autre, et les quadriques conjointes du covariant et du contrevariant fondamental; 2° il trouve le covariant et le contrevariant fondamental du système formé par une des deux quadriques proposées combinée avec leur covariant ou contrevariant fondamental; et, étant donné un covariant ou contrevariant quadratique quelconque du système de deux quadriques, il montre 3° comment on peut trouver sa forme conjointe et l'expression générale de son discriminant.

Après avoir trouvé les expressions générales des invariants simultanés, du covariant et du contrevariant fondamental du système de deux quadriques quelconques de la série, l'auteur en fait l'application aux deux quadriques équiharmoniques de la série, et trouve ainsi le covariant ou contrevariant dit *quadrique des quatorze éléments*. Les deux quadriques équiharmoniques avec la quadrique des quatorze éléments forment un système jouissant de propriétés très-remarquables, dont les principales se trouvent dans le Mémoire indiqué.

Enfin, en entreprenant la recherche des covariants et des contrevariants du système de deux quadriques, et de degré supérieur au second, l'auteur trouve ceux qui déterminent respectivement, dans la série définie des quadriques proposées : 1° le groupe des trois quadriques douées d'un élément double; 2° le groupe des deux quadriques équiharmoniques, et 3° celui des trois quadriques harmoniques. En outre, l'auteur trouve les groupes des contrevariants fondamentaux dans les systèmes qui s'obtiennent en combinant une des deux quadriques proposées : 1° avec les trois quadriques à élément double de la série; 2° avec les deux quadriques équiharmoniques, ou 3° avec les trois quadriques harmoniques; et enfin les groupes des contrevariants fondamentaux dans les systèmes formés par les trois quadriques à élément double, ou par les trois quadriques harmoniques de la série, combinées entre elles deux à deux.

JANNI (G.). — ***Méthode pour calculer, par des approximations successives certaines, les racines réelles des équations algébriques.*** (4 p.)

Si a et b sont deux limites entre lesquelles est comprise la racine x_0 de l'équation $f(x) = 0$, et que l'on désigne par $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ la somme de tous les termes positifs et celle de tous les termes négatifs de $f'(x)$, les nouvelles limites de la racine x_0 seront, d'après l'auteur,

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{\varphi(b) - \psi(a)}, \quad b_1 = b + \frac{f(b)}{\varphi(b) - \psi(a)},$$

ou bien, suivant les circonstances,

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{\psi(b) - \varphi(a)}, \quad b_1 = b + \frac{f(b)}{\psi(b) - \varphi(a)}.$$

PANTANELLI (D.). — *Dessin axonométrique.* (1 p.)

Détermination graphique et analytique des coefficients de réduction de l'unité des axes coordonnés, au moyen des côtés du triangle trace du plan de projection sur les plans coordonnés.

VITO (E.). — *Démonstration d'un théorème de la théorie des nombres.* (4 p.)

Le théorème en question est de M. *Serret*, et exprime que, si la somme de deux carrés premiers entre eux est divisible par un nombre, ce nombre est aussi la somme de deux carrés.

TOGNOLI (O.). — *Sur une extension de propriétés concernant les courbes algébriques planes d'ordre quelconque, aux surfaces algébriques de degré quelconque.* (27 p.)

L'auteur s'est proposé d'étendre aux surfaces algébriques les propriétés des courbes qui ont un pôle harmonique et une droite harmonique, exposées par M. *Güssfeldt* dans les *Mathematische Annalen*. Le travail se divise en deux Parties, dont la première contient la démonstration de propriétés relatives à un groupe spécial de surfaces, et la seconde, celle de propriétés appartenant à des surfaces algébriques générales. Les articles dont se compose la première Partie sont : 1° détermination du nombre des conditions qui doivent être vérifiées pour qu'une surface admette un pôle harmonique et un plan harmonique ; 2° polaires successives du pôle ; 3° propriétés des lignes d'intersection de deux surfaces qui ont un pôle harmonique et un plan harmonique communs ; 4° plans tangents et singularités ; 5° premières polaires par rapport aux points du plan harmonique ; 6° plans diamétraux et diamètres ; points et droites conjugués dans le plan harmonique.

La seconde Partie, dont la suite paraîtra dans le prochain fascicule, contient jusqu'ici les articles suivants : 1° polaires internes des surfaces en général ; 2° faisceaux et réseaux de polaires internes ; 3° enveloppe des plans tangents des surfaces d'un réseau ou d'un faisceau dont les points de contact sont situés dans un plan donné ; 4° pampolaire d'un faisceau et d'une droite de surface.

L'auteur emploie dans son travail les méthodes symboliques de calcul introduites par *Clebsch* avec tant d'avantage dans l'Analyse.

VIERTELJAHRSSCHRIFT DER ASTRONOMISCHEN GESELLSCHAFT, herausgegeben von den Schriftführern der Gesellschaft : A. AUWERS in Berlin und A. WINNECKE in Karlsruhe. — Leipzig, Verlag von W. Engelmann (*).

Ve année, Ier Cahier, janvier 1870. (Prix : 15 Ngr.)

NYRÉN (Magnus). — *Essai de détermination de la constante de la précession au moyen des étoiles de faible éclat.* — Upsala, 1869, in-8, 43 p. En suédois (**). — Analyse par M. d'Arrest.

Ce Mémoire, présenté le 22 mai 1869 à l'Université d'Upsala, pour l'obtention du grade de docteur, traite d'une question importante, qui a été indiquée à l'auteur par M. Gyldén. Il s'agit de savoir si l'observation des petites étoiles, au-dessous de la 8e grandeur, donne pour la constante de la précession une valeur identique à celle qu'on a déduite jusqu'à présent de l'observation des étoiles plus brillantes.

Pour les ascensions droites d'environ 5300 étoiles de la zone située entre + 15 degrés et — 15 degrés de déclinaison, les Catalogues de Weisse (***) et de Schjellerup (****) qui ont servi de base au travail de M. Nyrén, présentent, d'après les valeurs de la précession adoptées par ces astronomes, des différences sensibles que l'on avait déjà signalées en partie et qui n'avaient pas échappé à Schjellerup lui-même. M. Nyrén a comparé les positions d'environ 700 étoiles communes aux deux Catalogues, et de plus il a consulté l'*Armagh*

(*) *Bulletin trimestriel de la Société astronomique*, publié par les Secrétaires de la Société, MM. A. AUWERS, à Berlin, et A. WINNECKE, à Karlsruhe. Leipzig, chez Engelmann.

Paraît chaque trimestre par Cahier in-8°. En langue allemande. Prix variable.

Ce *Bulletin* se compose de deux parties, dont l'une est consacrée aux affaires de la Société, l'autre à des notices bibliographiques, dont nous donnerons un court résumé.

(**) L'auteur en a publié aussi une édition française.

(***) *Positiones mediæ stellarum in zonis Regiomontanis, etc.* Petropoli, 1846, in-4°.

(****) *Genäherte Oerter der Fixsterne, von welchen in den Astronomischen Nachrichten, Band* 1-66, *selbständige Beobachtungen angeführt sind, für die Epoche* 1855 *hergeleitet und nach den geraden Aufsteigungen geordnet* (*Publication der Astronomischen Gesellschaft*); 1867, in-4°. Prix : 25 Ngr.

Catalogue pour toutes les étoiles que celui-ci a de communes avec Bradley.

Il en a déduit ce résultat, que la différence Schjellerup — Weisse est constamment négative. Les valeurs moyennes de cette différence pour les Æ de 6 en 6 heures se sont trouvées égales à 1",4; 2",4; 2",5; 1",8, et la moyenne générale Schj. — W. = — 2",02. En faisant entrer dans la discussion de ces résultats les déterminations de l'équinoxe par Bessel et Wolfers, l'auteur réduit cette différence à — 1",423. C'est sur ce nombre que repose la détermination de la précession, qui serait, d'après cela, fixée à 50",188, au lieu des valeurs 50",223 (Bessel) et 50",237 (O. Struve), déduites la première de l'observation des étoiles de 5e à 6e grandeur, la seconde de celle des étoiles de 4e à 5e grandeur.

Pour confirmer ce résultat si inattendu, M. Nyrén a encore comparé le Catalogue de Schjellerup avec les observations faites à Washington (1861-62), et avec les positions données par Bradley et par Robinson pour les 184 étoiles qui leur sont communes avec Schjellerup.

Malgré les doutes qui peuvent planer sur les conclusions de l'auteur, conduisant à des modifications aussi considérables dans la valeur de la précession, le grand nombre d'étoiles qu'il a prises en considération dans ses calculs et le soin avec lequel il a discuté toutes les circonstances de ce problème délicat réclament impérieusement l'attention sérieuse des astronomes. Pour expliquer ces résultats, il faut : ou admettre une erreur constante en Æ de la part de Schjellerup, dont Argelander augmente, en effet, les nombres de 0^s,097; ou supposer que les étoiles les plus brillantes, et vraisemblablement les plus voisines de nous, sont entraînées par un mouvement d'ensemble, auquel les plus faibles d'éclat ne participent pas. M. d'Arrest ne juge pas cette dernière explication admissible; on ne trouve, du moins, aucune trace d'un pareil mouvement dans les observations des petites étoiles faites avec exactitude depuis les époques anciennes. Peut-être y aurait-il une troisième explication possible dans l'influence qu'exercerait sur la constante de la précession un changement introduit dans la détermination admise jusqu'à présent pour l'équinoxe de 1755.

OXMANTOWN (Lord) (actuellement Lord ROSSE). — *Compte rendu*

des observations de la grande nébuleuse d'Orion. (*Philosoph. Trans. of the R. Soc. of London,* vol. CLVIII, Part II, 1868.) — Analyse, par M. O. Struve.

Ce Mémoire est accompagné de belles planches en taille-douce, représentant la nébuleuse d'Orion. Les dessins qui se rapportent à la période de 1860 à 1864 ont été exécutés par M. Hunter, aide de lord Rosse à cette époque, au moyen d'observations faites tour à tour avec le télescope de 3 pieds et avec celui de 6 pieds de l'Observatoire de Parsonstown. Il est difficile de se prononcer sur l'exactitude de ces dessins, quand on n'a pas eu à sa disposition un instrument d'une puissance d'illumination comparable à celle des réflecteurs de lord Rosse, auxquels, suivant M. O. Struve, le grand réfracteur de Poulkova lui-même est de beaucoup inférieur sous ce rapport. Cependant M. Struve inclinerait à croire, avec sir John Herschel, que les contours des dessins sont trop nettement arrêtés.

Dans le texte explicatif qui accompagne les planches, l'auteur donne, dans le premier Chapitre, un Catalogue de 92 étoiles situées dans la Nébuleuse. Mais, en comparant ce Catalogue à celui de G.-P. Bond, publié postérieurement au travail de lord Rosse (*Annals of the Harvard College Observatory,* vol. V), il est facile de voir que les indications de l'astronome de Parsonstown n'ont pas de bien hautes prétentions à la rigueur, les résultats ayant été presque tous obtenus par des estimations à simple vue. Les déterminations d'éclat des diverses étoiles sont données aussi avec une grande latitude d'approximation.

Le second Chapitre traite des limites jusqu'où l'on peut constater la présence de la matière nébuleuse. Le troisième Chapitre insiste sur la dépendance étroite existant entre les étoiles et les nébulosités qui les entourent, et que ces étoiles semblent absorber graduellement. L'auteur donne, dans le Chapitre IV, des indications intéressantes sur les changements de forme et d'éclat de certaines parties de la Nébuleuse.

Il est question, dans le Chapitre suivant, de la résolubilité de la Nébuleuse, et il ne semble pas que l'on ait été très-loin dans cette voie. Enfin les deux derniers Chapitres rendent compte des observations spectroscopiques faites avec le réflecteur de 3 pieds, et qui n'ajoutent aucun fait nouveau aux travaux de Huggins et de Secchi. Lord Rosse se propose de reprendre ses recherches avec le télescope

de 6 pieds, auquel il doit adapter un mouvement d'horlogerie. On a lieu d'attendre des résultats importants d'observations faites à l'aide d'un instrument d'un aussi grand pouvoir éclairant.

ROSÉN. — *Recherches et mesures exécutées avec un astrophotomètre de Zöllner.* (*Bulletin de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg*, 1869). — Analyse, par M. Engelmann.

Le but de ce Mémoire est la détermination, au moyen d'un certain nombre d'étoiles peu brillantes, du coefficient photométrique qui exprime les rapports d'éclat des étoiles de deux grandeurs consécutives. Les observations ont été faites à Poulkova, au moyen de l'astrophotomètre de Zöllner, adapté à une lunette de Steinheil, de 126 millimètres d'ouverture, de 1507 millimètres de foyer, et d'un grossissement de 52 fois. Les détails de la construction de l'instrument se trouvent dans les écrits de l'inventeur (*). Le principe fondamental du procédé consiste dans la production d'étoiles artificielles, à peu près semblables d'aspect aux étoiles naturelles, et dans l'emploi de milieux polarisés et d'une plaque de quartz pour faire varier l'éclat et la couleur des étoiles artificielles. Celles-ci se voient par réflexion dans le plan focal de la lunette, sur le même arrière-plan que l'image de l'étoile naturelle, à une distance et dans une direction que l'on peut faire varier à volonté. En imprimant une rotation aux deux prismes de Nicol et à la plaque de quartz, on peut rendre les étoiles artificielles identiques en éclat et en couleur avec les étoiles naturelles, et les angles de rotation, qui se lisent sur deux cercles divisés, indiquent l'un l'intensité, l'autre la couleur. Les éclats relatifs de deux étoiles, mesurés par cette méthode, sont entre eux comme les carrés des sinus des angles observés.

M. Rosén a trouvé que l'éclat d'une étoile peut être représenté par la formule

$$L = \alpha - \beta m,$$

L étant le logarithme de l'intensité lumineuse de l'étoile donnée, m son ordre de grandeur, α et β des constantes, dont la première représente le logarithme de l'intensité lumineuse d'une étoile de grandeur zéro, et l'autre le logarithme du rapport d'éclat de deux étoiles de grandeurs consécutives. En calculant les résultats des appréciations

(*) *Grundzüge einer allgemeinen Photometrie der Himmels*; Berlin, 1861. — *Photometrische Untersuchungen*; Leipzig, 1865.

de divers observateurs et des siennes propres, M. Rosén trouve pour β des valeurs comprises entre 0,363 et 0,456.

Gibbs (W.). — *Sur la construction d'une carte normale du Spectre solaire.* (*Silliman's Journal*, vol. XLIII, n° 127, p. 1-10).

En 1864, M. W. Huggins a publié à Londres un Mémoire étendu sur les raies spectrales des divers éléments. Il a étudié environ 1000 raies, et déterminé leurs positions, d'après une échelle arbitraire. M. Gibbs s'est proposé de réduire ces mesures en longueurs d'ondulations, dans le dessein de chercher s'il n'existerait pas quelque loi qui réglât la distribution des raies caractéristiques de chaque élément.

Pour cela, il a commencé par identifier 45 raies de l'échelle de Huggins avec celles dont les longueurs d'ondulation ont été déjà déterminées par Ångström et par Ditscheiner. Il les a partagées en neuf groupes, pour chacun desquels il a construit une formule d'interpolation, par la méthode de Cauchy, qu'il recommande comme la plus commode et la plus expéditive. Trois de ces neuf groupes ont pu être représentés par des formules du second degré; pour les six autres, les formules se sont élevées au troisième degré. Par ce moyen, M. Gibbs a pu déterminer les longueurs d'ondulation correspondantes à toutes les raies, et en construire des Tables, qu'il a ensuite comparées avec les résultats obtenus par divers physiciens.

Ångström (A.-J.). — *Recherches sur le spectre solaire.* (Upsala et Berlin, 1869.) — (En français.)

Ces recherches se rattachent au même but que celles de M. Gibbs. L'auteur a construit une échelle des raies du spectre, où il indique non plus, comme on le faisait auparavant, les indices de réfraction, mais les longueurs d'ondulation. L'importance de cette nouvelle disposition, à laquelle il a donné le nom de *spectre normal*, est facile à reconnaître ; il suffit de remarquer que les indices de réfraction dépendent de la nature du prisme employé, et varient par conséquent avec cet instrument. Le nombre des raies pour lesquelles il a ainsi déterminé les longueurs d'ondulation s'élève à près de 1000, et ces longueurs sont indiquées en dix-millioniènes de millimètre, avec une décimale en plus.

A l'étude du *spectre normal du Soleil* M. Ångström a joint celle des spectres de l'aurore boréale et de la lumière zodiacale. Il a observé, pendant l'hiver de 1867-68, le spectre de l'arc lumineux qui

limite le segment obscur de l'aurore boréale. La lumière s'est trouvée presque complétement homogène et composée d'une seule raie brillante, voisine du groupe du calcium et correspondante à une longueur d'onde égale à 5567. Outre cette raie, on aperçoit de très-faibles traces de trois autres bandes lumineuses, qui s'étendent jusqu'à la raie F de l'hydrogène, mais qui ne se montrent que par intervalles, au moment où l'arc lumineux éprouve des ondulations qui changent sa forme. On peut donc regarder la lumière de l'aurore boréale comme réellement monochromatique. Un fait remarquable, c'est que la raie brillante du spectre de l'aurore boréale ne coïncide avec aucune des raies observées jusqu'à présent dans les spectres des gaz, mais qu'elle est identique avec le spectre de la lumière zodiacale, que l'auteur a observée en mars 1867 dans des circonstances d'éclat exceptionnelles à des latitudes aussi élevées que celle d'Upsala. On trouve même des traces de cette raie dans la faible lumière émise par le ciel pendant les belles nuits étoilées.

Maclear (Sir Thomas). — *Vérification et extension de l'arc de méridien de Lacaille au cap de Bonne-Espérance.* Publié par ordre des lords commissaires de l'Amirauté. 1866, t. I; 600 p., 24 pl.; t. II, 440 pages. — (En anglais.)

Nous n'essayerons pas de donner une analyse de cet Ouvrage, d'une si haute importance pour la Géodesie, et auquel M. Winnecke a consacré un compte rendu de 46 pages. Nous dirons seulement quelques mots sur le but de ce travail de douze années, exécuté avec le soin et l'habileté que l'on pouvait attendre de son savant auteur.

M. Maclear, lorsqu'il entreprit ses opérations, en 1836, s'était d'abord proposé pour objet de vérifier les mesures de Lacaille (1751-52). Ces mesures semblaient entraîner cette conclusion, contraire à la théorie, que la courbure de l'hémisphère austral était moindre que celle de l'hémisphère boréal; et la confiance que devaient inspirer les méthodes et l'exactitude habituelle de Lacaille ne permettaient pas de rejeter ses résultats sans preuve.

Déjà, en 1820, le capitaine Everest, ayant examiné les stations extrêmes de Lacaille, était d'avis que l'action des montagnes voisines de ces stations sur la direction du fil à plomb suffisait pour expliquer les anomalies en question.

Pendant le cours de ses travaux, M. Maclear se décida à ne pas s'en tenir à une simple vérification et à prolonger l'arc mesuré. Il a

fait usage, entre autres instruments, du célèbre secteur zénithal de Bradley, mis à sa disposition par l'Observatoire de Greenwich, et dont l'Ouvrage actuel contient une description minutieuse, due à M. Airy.

L'ensemble des opérations comprend un arc d'environ $4\frac{1}{2}$ degrés. Les résultats obtenus confirment l'opinion d'Everest sur les déviations de la verticale produite, dans les observations de Lacaille, par les attractions locales.

TIDSKRIFT FÖR MATEMATIK OCH FYSIK (*).

IIIe année, Cahiers II-VI; mars-décembre 1870.

HULTMANN (F.-W.). — *Histoire de l'Arithmétique en Suède.* (47 p.)

Suite d'articles insérés dans les tomes précédents. Le présent article est consacré à la biographie et aux travaux de Georg Stjernhjelm (**) (1598-1672), mathématicien, antiquaire, juriste, et qui est regardé comme le législateur de la poésie suédoise.

C'est lui qui a introduit le premier en Suède l'usage des fractions décimales, découvertes quarante ans auparavant par Simon Stevin. Il appliqua la division décimale aux diverses unités de mesures suédoises, dont il détermina exactement les valeurs et les rapports numériques, tels qu'ils ont été conservés jusqu'à l'époque actuelle.

On lui doit encore des traités d'algèbre et de trigonométrie, composés d'après les idées de Stévin et de Viète, et où il a fait usage pour la première fois, en Suède, des signes + et —. Quoiqu'il ait dû connaître personnellement Descartes à la cour de la reine Christine, il ne semble pas cependant avoir étudié les méthodes de ce géomètre.

Les nombreux ouvrages de Stjernhjelm, à l'exception de deux traités sur les poids et mesures, sont restés manuscrits, et sont conservés dans les bibliothèques de Stockholm et d'Upsala.

DILLNER (G.). — *Éléments du Calcul géométrique.* (10 p.)

Suite d'articles précédents (***). Résolution des équations de degré supérieur.

(*) Voir *Bulletin*, p. 177.

(**) Avant d'être anobli par le roi Gustave-Adolphe (1631), il se nommait *Göran Lilje*.

(***) Voir *Bulletin*, p. 249.

ALMQUIST (P.-W.). — *Démonstration des séries pour* sin x *et* cos x.

FALK (M.). — *Sur les lignes de courbure des surfaces développables.* (4 p.)

BJÖRLING senior (E.-G.). — *Sur les polyèdres réguliers.* (19 p.)
Exposition élémentaire et complète de la théorie des cinq corps réguliers.

DILLNER (G.). — *Éléments du calcul géométrique* (suite). (17 p.)
Calcul des indices de Cauchy. Application à la théorie des équations. Nombre des racines dans un contour donné.

BOIJE. — *Trouver le volume d'un solide de révolution, lorsque la courbe génératrice est rapportée à des coordonnées polaires.* (3 p.)

FALK (M.). — *Caractère de convergence d'une fraction continue à termes alternativement positifs et négatifs.* (5 p.)

WACKERBARTH (A.-F.-D.). — *Sur la Grande Pyramide de Gizeh.* (20 p.)
Cet article, où sont exposés les résultats des dernières mesures de la Grande Pyramide prises par le Corps topographique anglais sous la direction du colonel sir Henry James, contient une critique très-spirituelle des théories de M. Piazzi Smyth, qui avait pris cette pyramide pour une collection d'étalons de poids et mesures, et de constantes géométriques et astronomiques.

HULTMAN (F.-W.). — *Histoire de l'arithmétique en Suède* (suite). *Peder Månsson* (*Petrus Magni*). (9 p.)

HULTMAN (F.-W.). — *Théorie des puissances.* (7 p.)
Exposants fractionnaires, etc.

DILLNER (G.). — *Intégrales définies des fonctions synectiques.* (21 p.)
Exposition des théorèmes de Cauchy relatifs à l'intégration d'une fonction le long d'un contour donné, et au développement d'une fonction d'une variable complexe suivant les puissances entières et positives de cette variable.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

MANNHEIM (A.). — ÉTUDE SUR LE DÉPLACEMENT D'UNE FIGURE DE FORME INVARIABLE. NOUVELLE MÉTHODE DES NORMALES. APPLICATIONS DIVERSES. — *Journal de l'École Polytechnique*, XLIII[e] cahier (*).

On attribue généralement à Ampère l'idée féconde de séparer l'étude du mouvement de celle des forces qui le produisent. Un passage du *Rapport de M. Chasles sur les progrès de la Géométrie* rectifie les idées généralement admises sur ce point. Voici comment s'exprime l'éminent géomètre :

« L'idée d'étudier *les mouvements indépendamment des forces*, qui aurait pu être suscitée depuis fort longtemps par l'objet même de la *Statique*, où l'on traite *de l'équilibre*, c'est-à-dire *des forces, indépendamment des mouvements*, fut émise, il y a trois quarts de siècle, par un jeune capitaine du génie, Carnot, dans son *Essai sur les machines en général*, et reproduite par l'auteur dans sa *Géométrie de position*, puis dans un Rapport à l'Institut. Cependant elle était restée inféconde, ou du moins dans l'oubli, quand Ampère, qui en comprit le caractère, dans son *Essai sur la philosophie des sciences*, regarda l'étude *des mouvements considérés en eux-mêmes* comme devant être le sujet d'une des divisions distinctes de la Mécanique, et associa cette étude à la *Statique*, sous le nom de *Cinématique*. »

Ainsi, pour la millième fois peut-être, c'est à celui qui a trouvé le mot qu'on a attribué l'idée. Quoi qu'il en soit, l'idée de Carnot a déjà porté ses fruits : on connaît maintenant de très-importants théorèmes sur le déplacement d'un corps solide dans l'espace; on doit même penser que la considération du déplacement d'une figure, déjà employée par les anciens, n'a pas dans la science toute la place qu'elle mérite. Heureusement de récents travaux sont venus rappeler et augmenter l'intérêt qui s'attache à ces questions, et prouver que l'étude du déplacement d'une figure invariable peut conduire les géomètres habiles aux résultats les plus dignes d'interêt.

C'est dans le *Bulletin des sciences mathématiques* du baron de Férussac (t. XIV, p. 321-326; 1830) qu'ont paru, croyons-nous, les

(*) Voir *Bulletin*, p. 269.

premiers travaux de M. Chasles sur cette question. C'est dans cette Note que l'auteur donne les propriétés, maintenant bien connues, du centre de rotation. Passant ensuite au déplacement d'une figure dans l'espace, M. Chasles énonce cette proposition fondamentale, que :

Tout déplacement fini d'un corps dans l'espace peut s'effectuer par le mouvement d'une vis dans son écrou.

Cette propriété, à laquelle parvient aussi Poinsot, dans son *Mémoire sur la théorie de la rotation des corps* (*) était ignorée, mais n'était pas nouvelle; c'était, à proprement parler, un théorème retrouvé. Dans une *Notice historique* sur le déplacement d'une figure de forme invariable (**), M. Chasles indique le titre d'un ouvrage italien : *Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi* (Florence, 1763), dû à *Giulio Mozzi,* et dans lequel se trouve énoncée la proposition relative au déplacement hélicoïdal. Mais c'est dans un Mémoire de 1843, inséré aux *Comptes rendus* (***), que M. Chasles a donné les propriétés les plus importantes, celles qui sont relatives aux foyers et aux caractéristiques des plans. Définissons d'abord ces éléments géométriques.

Si, dans un déplacement du corps solide, on considère les plans normaux aux trajectoires des points d'un plan, ces plans normaux passent tous par un point fixe du plan. Ce point fixe s'appelle le *foyer du plan.* C'est le seul point dans le plan dont la trajectoire soit normale au plan.

La *caractéristique* du plan est une droite définie par la propriété suivante. Elle est le lieu des points dont les trajectoires sont tangentes au plan, mais elle n'est pas tangente aux trajectoires de tous ses points. Un seul de ses points, le pied de la perpendiculaire abaissée du foyer sur la caractéristique, jouit de cette propriété; sa trajectoire est tangente à la *caractéristique.*

Tous les plans passant par une droite D ont leurs foyers sur une droite Δ, et réciproquement, le lieu des foyers des plans passant par Δ est la droite D. Ces deux droites D, Δ sont appelées *droites conjuguées* ou *axes de rotation conjugués.*

Les propriétés des droites conjuguées sont très-nombreuses, elles

(*) *Journal de Liouville,* t. XVI, p. 9; 1851.

(**) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. LII, p. 487-501.

(***) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. XVI, p. 1420-1432.

ont été étudiées par M. Chasles. Deux des plus utiles et des plus importantes sont les suivantes :

Toute droite qui s'appuie sur deux droites conjuguées est normale aux trajectoires de tous ses points ;

On peut effectuer le déplacement infiniment petit de la figure par deux rotations successives autour de deux axes conjugués ;

Deux couples de droites conjuguées sont quatre génératrices d'un même système d'un hyperboloïde à une nappe, etc., etc.

Ces propriétés sont celles dont M. Mannheim a fait surtout usage dans son Mémoire ; aussi les avons-nous remises de préférence sous les yeux de nos lecteurs.

Enfin M. Chasles a publié en 1861 (*) un *Mémoire* sur les propriétés relatives au déplacement fini quelconque, dans l'espace, d'une figure de forme invariable. C'est à la fin de ce Mémoire qu'est placée une *Notice historique sur la question du déplacement d'une figure de forme invariable,* qui nous dispense d'entrer dans un examen historique plus complet de la question du déplacement d'un corps solide.

Le travail de M. Mannheim fait suite aux Mémoires précédents ; mais l'auteur a surtout traité un problème négligé par presque tous les géomètres qui ont écrit sur la question. Son but n'a pas été de donner seulement des propriétés nouvelles du déplacement d'un corps solide. M. Mannheim considérant, non plus un corps solide, mais une figure assujettie, dans son déplacement, à des conditions très-diverses, s'est proposé de donner une méthode pour construire les normales aux trajectoires, de même que M. Chasles avait déduit, de l'étude du mouvement dans le plan, un moyen nouveau et important de construire, par la géométrie, les tangentes à un grand nombre de courbes remarquables.

Dans la résolution de ce problème, une première difficulté se présentait, qui pouvait rendre la solution très-longue et très-pénible. Les conditions auxquelles on peut assujettir une figure dans son déplacement sont très-variées : comment les considérer toutes et ramener la solution à un principe uniforme ? C'est une difficulté que M. Mannheim écarte d'abord d'une manière très-ingénieuse. Voici

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences :* t. LI, p. 855-863, 905-914 ; t. LII, p. 77-85, 189-197 et 487-501.

les principales conditions descriptives qu'on rencontre dans les problèmes :

1° Un point *a* de la figure mobile est assujetti à rester sur une surface fixe A, ou, inversement, une surface B de la figure mobile doit toujours passer par un point *b*;

2° Une courbe C de la figure mobile est assujettie à toucher une surface S, ou inversement;

3° Une courbe C doit rencontrer une courbe fixe M;

4° Une surface S est assujettie à toucher une surface S′.

Il faut cinq conditions de cette nature pour définir et diriger le déplacement d'un corps solide. M. Mannheim substitue à chacune de ces conditions simples une condition unique : *un point doit rester sur une surface*, et, dès lors, le seul problème à traiter est le suivant :

Cinq points d'une figure de forme invariable sont assujettis à se déplacer sur cinq surfaces données. — Construire à un instant quelconque : 1° le plan normal à la trajectoire d'un point quelconque de la figure mobile; 2° la normale en un point arbitraire de la surface engendrée par une courbe quelconque; 3° la ligne suivant laquelle une surface entraînée touche son enveloppe; 4° l'axe du déplacement de la figure mobile; 5° le pas réduit des hélices infiniment petites décrites.

A cet effet, soient A, B, C, E, K les surfaces données, et soient *a*, *b*, *c*, *e*, *k* les cinq points de la figure mobile assujettis à rester sur les cinq surfaces. Si l'on construit les deux droites qui s'appuient sur quatre des normales en quatre des points *a*, *b*, *c*, *e*, *k*, ces deux droites seront des *droites conjuguées*. On pourra ainsi obtenir, avec les cinq combinaisons quatre à quatre des normales, cinq couples de droites conjuguées.

Cela posé, soit *i* le point dont on demande le plan normal. De ce point menons une droite rencontrant deux droites conjuguées : cette droite est normale à la trajectoire de tous ses points, et en particulier à celle du point *i*; elle fait donc partie du plan normal cherché; en considérant les quatre autres couples de droites conjuguées, on déterminera le plan normal par cinq droites, correspondant aux cinq couples de droites conjuguées; on retrouve ainsi un théorème dû à M. Sylvester (*).

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1861, t. LII, p. 742.

Après la résolution de ce premier problème, le savant professeur à l'École Polytechnique aborde une question d'une tout autre nature, mais non moins intéressante. Supposons que le corps solide soit assujetti dans son déplacement à quatre conditions seulement. Alors il pourra recevoir une infinité de déplacements dans des sens différents, compatibles avec ces conditions. Les points seront assujettis à rester, non plus sur une courbe, mais sur une surface. Il y a donc lieu de se proposer le problème suivant :

Quatre points d'une figure de forme invariable sont assujettis à se déplacer sur quatre surfaces données. — Construire à un instant quelconque : 1° la normale à la surface sur laquelle se déplace nécessairement, en général, un point de la figure mobile; 2° les points où une surface entraînée touche le lieu de ses intersections successives.

La solution est donnée par le théorème suivant :

Lorsqu'une figure de forme invariable se déplace en restant assujettie à quatre conditions, à un instant quelconque, les normales issues de tous les points de la figure aux surfaces trajectoires de ces points rencontrent deux mêmes droites.

A ce théorème, M. Mannheim ajoute beaucoup d'autres propriétés, que le défaut d'espace nous empêche seul de signaler.

Le Mémoire contient, après ces propositions générales, une série d'applications au déplacement d'une droite, d'un dièdre, d'un trièdre et d'une surface, applications dont nous allons dire quelques mots.

Dans l'étude sur les surfaces réglées et le déplacement d'une droite sont abordés plusieurs problèmes, parmi lesquels nous citerons le suivant :

Recherche de la normale en un point d'une surface gauche, engendrée par une droite assujettie à des conditions multiples.

Une droite G *se déplace en restant surosculatrice d'une surface donnée* A ; *construire en un point quelconque de cette droite la normale à la surface* G *qu'elle engendre, et le plan normal en un point de la courbe de contact de* G *et de* A.

Ce Mémoire se termine par une étude sur les conditions multiples, auxquelles on peut assujettir un corps solide, et sur l'hélicoïde réglé. Cette étude très-simple d'une surface remarquable a déjà pris place dans l'enseignement de l'École Polytechnique.

Nous ne devons pas terminer ce trop court article, sans signaler un très-important Rapport que M. Chasles a consacré au Mémoire de M. Mannheim. A la suite de ce Rapport (*), l'Académie a ordonné l'insertion du Mémoire précédent dans le tome XX du *Recueil des Savants étrangers*. G. D.

KLINKERFUES (Dr W.), Professor, Director der Königl. Sternwarte zu Göttingen. — THEORETISCHE ASTRONOMIE. *Erste Abtheilung.* — Braunschweig; Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn, 1871.

Après l'apparition récente des ouvrages de Watson et d'Oppolzer (**) sur l'astronomie théorique, nous avons aujourd'hui à signaler un nouveau travail sur le même sujet, ce qui montre jusqu'à quel point se faisait sentir le manque d'un livre qui résumât sous une forme commode les nombreux travaux épars dont la science astronomique s'est enrichie dans ces dix dernières années au point de vue théorique, et qui rendit ces travaux accessibles à un plus grand nombre de lecteurs. Comme le traité d'Oppolzer, celui que nous avons sous les yeux n'est pas encore un ouvrage complet, mais seulement le premier des deux volumes, dont l'ensemble doit comprendre tout ce qui peut servir à la détermination des orbites des corps qui se meuvent suivant des sections coniques autour d'un centre commun d'attraction. Le volume qui vient de paraître se compose de quatre sections :

I. Calcul des éphémérides, les orbites étant connues;

II. Calcul d'une orbite circulaire au moyen de deux observations;

III. Calcul d'une orbite de comète au moyen de trois observations;

IV. Calcul d'une orbite elliptique (de planète) au moyen de trois observations.

Le second volume contiendra, outre la suite de la section IV, les cinq sections suivantes :

V. Calcul d'une orbite elliptique au moyen de quatre observations;

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXVI, p. 591.

(**) Voir *Bulletin*, p. 201.

VI. Calcul d'une orbite au moyen d'un plus grand nombre d'observations, d'après la méthode des moindres carrés;

VII. Calcul des orbites des étoiles doubles;

VIII. Calcul des orbites des météorites;

IX. Tables et vérifications.

L'ouvrage est rédigé par leçons, forme très-avantageuse pour l'usage du livre dans l'enseignement et pour l'étude personnelle. Nous espérons voir s'accomplir le vœu exprimé par l'auteur, que son livre engage un plus grand nombre de personnes à se livrer à l'astronomie théorique, et un traité écrit avec la clarté qui distingue celui-ci ne contribuera pas peu à cet heureux résultat.

(Extrait des *Astronomische Nachrichten*, t. LXXVII, n° 1830.)

HESSE (OTTO), ordentl. Professor an dem K. Polytechnicum zu München. — DIE DETERMINANTEN, ELEMENTAR BEHANDELT. — Leipzig; Druck und Verlag von B.-G. Teubner, 1871 (*).

Cet opuscule a été composé par l'auteur à l'occasion d'un arrêté ministériel du 5 octobre 1870, prescrivant l'étude des déterminants dans les six colléges scientifiques (*Real-Gymnasien*) du royaume de Bavière.

Le premier chapitre, intitulé *Équations linéaires*, signale d'abord les inconvénients de la méthode ancienne de résolution de ces équations par éliminations successives. En premier lieu, on ne parvient à connaître la composition des deux termes de la valeur de chaque inconnue qu'après avoir effectué complétement de longs et pénibles calculs. Ensuite cette méthode ne donne pas immédiatement les résultats sous la forme la plus simple, les deux termes de la fraction se présentant affectés d'un facteur commun, dont le degré croît rapidement avec le nombre des équations et des inconnues. Enfin cette méthode a le défaut de ne pas permettre de traiter symétriquement les équations.

On écarte ce dernier inconvénient par la méthode des multiplicateurs indéterminés, employée déjà par Bézout au siècle dernier, et par laquelle on élimine toutes les inconnues à la fois, excepté une

(*) HESSE (O.) — *Traité élémentaire des Déterminants.* — Leipzig, B.-G. Teubner. Brochure in-8°, 46 pages. Prix : $\frac{1}{3}$ thaler.

seule, en ramenant le problème à la résolution d'un nombre d'équations moindre d'une unité.

L'auteur expose les liaisons qui existent entre deux systèmes d'équations linéaires dans lesquels les lignes verticales des coefficients de l'un seraient les lignes horizontales des coefficients de l'autre.

Il donne ensuite les expressions des numérateurs et du dénominateur commun des valeurs des inconnues sous forme de produits symboliques.

Le second chapitre traite des *Fonctions alternées*, dont le type est le produit formé avec toutes les différences deux à deux de $n+1$ éléments. La considération de ce produit, qui, pris dans le sens symbolique, par le changement des exposants en indices, représente précisément les termes des valeurs des inconnues dans la résolution de $n+1$ équations linéaires, fait connaître déjà les propriétés essentielles des *déterminants*, dont l'étude fait l'objet du troisième et dernier chapitre.

Dans ce chapitre, l'auteur expose les propriétés connues, au point de vue purement théorique, et sans indiquer d'applications. La notation qu'il emploie est celle de Jacobi, qui consiste à placer les deux indices de chaque élément l'un en bas, l'autre en haut de la lettre, ce qui nous paraît préférable, sous plusieurs rapports, au mode plus généralement adopté, suivant lequel les deux indices sont placés au bas de la lettre.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

SOCIÉTÉ DES SCIENCES NATURELLES DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG. — Luxembourg, chez V. Buck (*).

T. X, 1867-1868.

DE COLNET-D'HUART. — *Leçons sur la théorie mathématique du mouvement de translation et du mouvement de rotation des atomes.* (96 p.; fr.)

Cet important Mémoire se compose de sept Leçons, dont voici le contenu :

I. Équations du mouvement de translation des molécules, en sup-

(*) Publié par volumes in-8°, en français et en allemand.

posant qu'elles s'attirent ou se repoussent proportionnellement à leurs masses et en fonction des distances qui les séparent. — *Premier principe :* Lorsqu'une molécule est déplacée de sa position d'équilibre, elle est repoussée vers celle-ci par une force proportionnelle à ce déplacement.

II. Équations du mouvement de rotation des molécules. — *Théorèmes :* Dans les corps homogènes et d'élasticité constante, la forme des molécules est sphérique. — L'axe instantané de rotation est toujours perpendiculaire à la direction de la propagation des petits mouvements moléculaires. — Les forces qui sollicitent une molécule à se déplacer longitudinalement ne sauraient faire tourner la molécule, tandis que les forces qui sollicitent la molécule à se déplacer transversalement lui impriment en même temps un mouvement de rotation autour de son centre de figure. — Composantes de la rotation autour des axes des x et des y. — Direction de l'axe instantané de rotation quand la lumière est polarisée en ligne droite. — La vitesse de rotation des ondes surpasse de beaucoup la vitesse des vibrations. — Les axes instantanés des molécules voisines sont sensiblement parallèles.

III. Équations qui régissent le mouvement de la chaleur dans les corps cristallins et dans les corps homogènes et d'élasticité constante. — La température d'un corps pondérable est mesurée par la vitesse de rotation de ses molécules. — *Deuxième principe :* Les molécules se repoussent proportionnellement à leur vitesse de rotation, et cette force répulsive est dirigée perpendiculairement à l'axe instantané. — Équation de Fourier pour le mouvement de la chaleur dans les corps homogènes. — Équation du mouvement de la chaleur dans une plaque. — Action du mouvement de rotation sur le déplacement longitudinal. — Équations des petits mouvements moléculaires.

IV. Action mécanique de la chaleur. — État stationnaire des molécules. — Pression sur la surface d'un corps. Traction. — Lois de Mariotte et de Gay-Lussac. — Chaleur spécifique. — Travail utile. Travail intermoléculaire.

V. L'équivalent mécanique d'une calorie. — Courbes isothermes et isodynames des gaz permanents. Courbe adiabatique. — Équation fondamentale de la théorie mécanique de la chaleur. — Théorème général.

VI. Propagation des sons. La vitesse de propagation des ondes sonores est accélérée par le travail qui résulte des condensations et

des dilatations des couches d'air. Formule de Laplace. — Lorsqu'un corps s'échauffe ou se refroidit, cet échauffement ou ce refroidissement est toujours accompagné de vibrations longitudinales; mais ces vibrations ne sont pas sonores. — Problème du refroidissement d'un mur avec dilatation.

VII. Les atomes pondérables des corps diaphanes vibrent lumineusement. — Dispersion de la lumière et des rayons obscurs. Diathermansie.

THE TRANSACTIONS OF THE ROYAL IRISH ACADEMY. — Dublin; published by the Academy (*).

T. XXIII, 1856-1859.

HAUGHTON (S.). — *Discussion des observations de marées faites sous la direction de l'Académie royale d'Irlande en 1850-1851.* (106 p.)

MALLET (R.). — *Sur les conditions physiques exigées dans la construction de l'artillerie et sur quelques causes, inexpliquées jusqu'ici, de la destruction des canons par le service.* (296 p.)

RENNY (H.-L.). — *Sur une nouvelle formule barométrique pour la mesure de la hauteur des montagnes, dans laquelle l'état hygrométrique de l'atmosphère est considéré systématiquement.* (12 p.)

Cette formule est la suivante :

$$H = K(1+\zeta\cos 2\psi)\left(1+\frac{2h+H}{r}\right)\left(1+l\,\frac{t+t'}{2}\right)$$
$$\times \log.\text{vulg.}\,\frac{\beta\left(1+\frac{2H}{r}\right)-\frac{3}{8}\sqrt{ff'}}{\beta'[1+m(T-T')]-\frac{3}{8}\sqrt{ff'}},$$

K, ζ, l, m étant des constantes, ψ la latitude; h, h' les hauteurs des stations au-dessus du niveau de la mer; r le rayon terrestre; $H = h'-h$ la différence de niveau des stations; t, t' les températures de l'air (en degrés centigrades); β, β' les pressions barométriques observées; T, T' les températures du mercure; f, f' les forces élastiques de la vapeur d'eau aux deux stations.

DOWNING (S.). — *Sur le desséchement du lac de Harlem.* (12 p.)

(*) Paraît par livraisons gr. in-4° en langue anglaise.

SALMON (G.). — *Sur le degré d'une surface réciproque d'une surface donnée.* (28 p.)

L'auteur a montré, dans le *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* (t. II, p. 65, et t. IV, p. 187), comment on calcule le degré d'une surface réciproque ayant une ligne double ordinaire; il reste à indiquer quel sera ce degré quand la surface a encore une ligne *cuspidale*, c'est-à-dire une ligne double en chaque point de laquelle les deux plans tangents coïncident. Vient ensuite l'examen de la nature et du nombre des plans tangents singuliers d'une surface, qui donnent lieu à des points et à des lignes multiples dans la surface réciproque, et l'on fait voir ainsi comment il se fait que le degré de la réciproque coïncide avec le degré de la surface primitive, ce qui conduit à des théorèmes analogues aux théorèmes bien connus de Plücker sur les courbes. Enfin, l'auteur applique sa théorie au cas des surfaces développables, et montre comment il se fait que le degré de la réciproque de la surface développable se réduit à zéro.

FORSTER (R.). — *Sur la formation moléculaire des cristaux.* (12 p.)

LLOYD (H.). — *Détermination de la mesure absolue de l'intensité du magnétisme terrestre, au moyen de la boussole d'inclinaison.* (11 p.)

RENNY (H.-L.). — *Sur les constantes des formules barométriques qui tiennent compte exactement de l'état hygrométrique de l'atmosphère.* (46 p.)

Après une nouvelle discussion, l'auteur donne à sa formule, indiquée dans son précédent Mémoire, la forme définitive suivante :

$$H = 18409^{m},9(1+0{,}002695\cos 2\psi)\left(1+\frac{2h+H}{r}\right)\left(1+0{,}003665\,\frac{t+t'}{2}\right) \times \log\frac{B-\delta}{B'-\delta} \pm \text{correction horaire},$$

B, B' étant les pressions observées, corrigées de la densité du mercure, et δ désignant la quantité $\frac{3}{8}\sqrt{ff'}$.

T. XXIV, 1860-1870.

LLOYD (H.). — *Sur la lumière réfléchie et transmise par les plaques minces.* (13 p.)

L'auteur traite la question dans le cas général de la lumière polarisée dans un plan quelconque.

DONOVAN (M.). — *Sur un cadran solaire mobile, pouvant indiquer le temps solaire apparent à une petite fraction de minute près.* (13 p.)

STONEY (J.). — *Sur des anneaux aperçus dans des échantillons fibreux de spath calcaire.* (6 p.)

STONEY (J.). — *Sur la propagation des ondes.* (8 p.)

LLOYD (H.). — *Sur les courants terrestres, et leur liaison avec la variation diurne de l'aiguille magnétique horizontale.* (27 p., 2 pl.)

STONEY (B.). — *Sur la flexion relative des poutres treillissées et des sommiers plats.* (5 p.)

HAUGHTON (S.). — *Sur les marées semi-diurnes des côtes d'Irlande.* (10 art., 115 p., 10 pl.)

HENNESSY (H.). — *Sur la distribution de la température dans la région inférieure de l'atmosphère terrestre.* (58 p.)

CASEY (J.). — *Sur les quartiques bicirculaires.* (113 p.)

Si l'on prend l'équation la plus générale du second degré en α, β, γ,

$$(a, b, c, f, g, h)(\alpha, \beta, \gamma)^2 = 0,$$

où α, β, γ désignent des cercles au lieu de droites, on obtient la forme la plus générale de l'équation d'une quartique bicirculaire. Ces courbes jouissent de propriétés remarquables, que l'auteur a étudiées par une méthode analogue à celle que l'on emploie pour les coniques. Ses recherches contiennent une discussion approfondie des ovales de Descartes, qui rentrent, comme cas particulier, dans la classe des courbes considérées.

BALL (R.-St.). — *Sur les petites oscillations d'un corps solide autour d'un point fixe sous l'action de forces quelconques, et, en particulier, lorsque la pesanteur est la seule force agissante.* (35 p.)

En prenant pour origine le point fixe, et pour axes coordonnés les positions des trois axes principaux d'inertie dans l'état de repos du corps, on suppose le corps légèrement déplacé de sa position d'équilibre, et il s'agit de savoir si les petites oscillations sont possibles et, lorsqu'elles le sont, de discuter leur nature.

Les équations du mouvement dépendent de la résolution d'une équation du troisième degré, dont les racines déterminent la nature

de l'équilibre. Quand l'équilibre est stable, sous l'action de forces quelconques, le mouvement du corps résulte de la composition des vibrations autour de trois axes fixes passant par le point fixe, et chacune des vibrations autour d'un de ces axes s'effectue suivant la loi du pendule ordinaire. C'est ce qui a lieu lorsque les trois racines de l'équation du troisième degré sont réelles, positives et inégales.

L'auteur discute complétement tous les autres cas qui peuvent se présenter et s'occupe, dans chaque cas, de la détermination des *axes normaux*, en désignant par *axe normal* une direction passant par le point fixe, et autour de laquelle le corps oscillera comme autour d'un axe fixe, lorsque l'*axe de déplacement* et l'axe instantané ont cette direction pour position initiale commune.

PROCEEDINGS OF THE ROYAL IRISH ACADEMY. — Dublin; printed by M. H. Gill, printer to the Academy (*).

T. VIII, 1861-1864.

HAUGHTON (S.). — *Sur un moyen graphique pour calculer la dérive d'un navire par la marée dans la Mer d'Irlande.* (4 p.)

HAMILTON (Sir W.-R.). — *Sur une nouvelle méthode générale pour l'inversion d'une fonction linéaire et quaternionale d'un quaternion.*

HAMILTON (Sir W.-R.). — *Sur l'existence d'une équation symétrique et biquadratique, qui est satisfaite par le symbole d'opération linéaire sur les quaternions.*

STONEY (B.-B.). — *Sur la résistance des longs piliers.*

HAMILTON (Sir W.-R.). — *Sur les courbes gauches du troisième degré.*

PURSER (J.). — *Sur l'application des équations du mouvement relatif, de Coriolis, au problème du gyroscope.* (14 p.)

Coriolis a montré que, si les axes coordonnés auxquels est rapporté le mouvement du système ne sont pas fixes, mais ont un mouvement propre dans l'espace, on peut traiter la question, à tous les points de vue, comme si ces axes étaient fixes, pourvu qu'à la force P,

---

(*) *Procès-verbaux de l'Académie royale d'Irlande.* Dublin; M.-H. GILL. Publiés par volumes in-8°, paraissant en quatre fascicules, à des époques variables. En langue anglaise.

qui agit sur chaque molécule, on en ajoute deux autres : l'une P', égale et opposée à celle qui imprimerait à la molécule des accélérations égales à celles d'un point coïncidant à l'instant considéré avec la molécule, mais invariablement lié aux axes mobiles ; l'autre P'', perpendiculaire à la trajectoire relative de la molécule. En partant de ce théorème, l'auteur traite la question dans trois cas principaux : 1° celui où l'axe est assujetti à rester dans un plan ; 2° celui où il est assujetti à décrire un cône de révolution ; 3° celui où il est entièrement libre.

HAMILTON (Sir W.-R.). — *Sur un centre général des forces appliquées.*

HAMILTON (Sir W.-R.). — *Sur les huit génératrices ombilicales imaginaires d'une surface à centre du second degré.*

Les douze ombilics connus d'une telle surface sont situés sur *huit droites imaginaires,* dont l'auteur a déterminé les équations et les propriétés à l'aide de la méthode des quaternions.

T. IX, 1864-1866.

GRAVES (Ch.). — *Sur un théorème relatif aux coefficients binomiaux.*

Si l'on pose $(1+x)^n = \Sigma n_p x^p$, n étant entier et positif, et

$$s_0 = \Sigma n_{3q}, \quad s_1 = \Sigma n_{3q+1}, \quad s_2 = \Sigma n_{3q+2},$$

parmi les trois nombres s_0, s_1, s_2, il y en aura toujours deux qui seront égaux entre eux et qui différeront du troisième d'une unité.

HAMILTON (Sir W.-R.). — *Remarques sur la Note précédente.*

Soit p un nombre entier positif quelconque, r un nombre entier, $s_{n,r}^{(p)}$ la somme de tous les coefficients n_m pour lesquels $m \equiv r \pmod{p}$. On a

$$s_{n,r}^{(p)} = \frac{1}{p} \sum \frac{(1+x)^n}{x^r},$$

la sommation s'étendant aux p racines x de l'équation binôme $x^p - 1 = 0$.

HAMILTON (Sir W.-R.). — *Sur un nouveau système de deux équations générales de courbure.*

Renfermant comme conséquences immédiates une nouvelle forme de l'équation différentielle de l'ensemble des deux lignes de courbure, avec une nouvelle preuve de leur rectangularité générale ; et en outre

une nouvelle équation du second degré pour la détermination simultanée des deux rayons de courbure; le tout établi par la seconde méthode de Gauss pour la discussion générale des propriétés d'une surface, et la seconde équation étant vérifiée par une comparaison des expressions pour la mesure de la courbure.

Graves (Ch.). — *Notice nécrologique sur Sir William-Rowan Hamilton.* (9 p.)

Casey (J.). — *Sur les équations et les propriétés* : 1° *du système des cercles tangents à trois cercles dans un plan*; 2° *du système des sphères tangentes à trois sphères dans l'espace*; 3° *du système des cercles tangents à trois cercles sur une sphère*; 4° *du système des coniques inscrites à une conique, et tangentes à trois coniques inscrites dans un plan.* (26 p.)

T. X, 1867-1870.

Penny (W.-G.). — *Sur le mouvement de rotation des corps célestes.* (32 p.)

L'objet de ce Mémoire est, en premier lieu, de rechercher si les diverses forces perturbatrices qui agissent sur les corps célestes produisent un effet permanent sur leur rotation; et, en second lieu, en supposant qu'un tel effet se produise en général, d'examiner dans quelles circonstances il cessera d'avoir lieu, c'est-à-dire sous quelles conditions ces corps prendraient un mouvement de rotation permanent, sans autres variations que des variations périodiques.

Young (J.-R.). — *Sur les racines imaginaires des équations numériques, avec un examen et une démonstration de la règle de Newton.* (40 p.)

Annali di Matematica pura ed applicata, diretti da F. Brioschi e L. Cremona (presso il R. Istituto Tecnico superiore di Milano), in continuazione degli Annali già pubblicati in Roma dal prof. Tortolini. *Serie II*ª. Milano, tipografia di G. Bernadoni (*).

T. I, juillet 1867 à mai 1868.

Brioschi (F.). — *Sur la théorie des coordonnées curvilignes.* (22 p.; it.)

(*) *Annales de Mathématiques pures et appliquées,* dirigées par MM. Brioschi et Cre-

Dans un très-important Mémoire inséré au *Journal de M. Liouville* (t. V, 2e série, 1860), et intitulé : *Sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes*, M. O. Bonnet a exposé une théorie complète des surfaces non développables, fondée sur la considération des variables qui servent à fixer la position du plan tangent. Seulement, dans ce travail, M. Bonnet avait fait choix d'un système particulier de variables, servant à déterminer la position d'un plan. M. Brioschi étudie la même question sans spécifier quelles sont les variables choisies pour la détermination du plan tangent.

Clebsch et Gordan. — *Sur la représentation typique des formes binaires.* (58 p.; it.)

Betti (E.). — *Sur les fonctions sphériques.* (8 p.; it.)

Christoffel (E.-B.). — *Sur le problème des températures stationnaires et la représentation conforme d'une surface donnée.* (15 p.; it.)

Schlaefli (L.). — *Sur le mouvement d'un pendule, quand la droite passant par le point de suspension et par le centre de gravité est pour ce point le seul axe principal d'inertie qui soit déterminé de position.* (27 p.; it.)

Cayley (A.). — *Démonstration nouvelle du théorème de M. Casey par rapport aux cercles qui touchent trois cercles donnés.* (3 p.; fr.)

Roberts (Michael). — *Note sur les équations du cinquième degré.* (4 p.; fr.)

Wiener (Chr.). — *Sur le mouvement d'une figure plane qui se meut en restant semblable à elle-même et de manière que trois de ses droites passent par trois points fixes.* (7 p.; it.)

---

mona (près l'Institut Technique supérieur de Milan); suite des Annales, publiées ci-devant à Rome, par le professeur Tortolini. 2e *série*. Milan, imprimerie de J. Bernardoni.

Ces *Annales* paraissent à époques indéterminées, par fascicules de dix à douze feuilles in-4°, en italien, en français et en latin. Quatre fascicules forment un volume. Prix : 16 francs.

Nous donnons, sans grand développement, les titres des Mémoires des deux premiers volumes, afin que nos lecteurs connaissent la collection complète. A partir du tome III, nous entrerons dans une analyse plus détaillée.

DINI (U.). — *Sur les surfaces qui ont des lignes de courbure planes.* (9 p.; it.)

HERMITE. — *Sur l'intégrale* $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$. (4 p.; fr.)

BRIOSCHI (F.). — *Du discriminant des formes binaires du sixième degré.* (1 p.; it.)

PLÜCKER (J.). — *Théorie générale des surfaces réglées, leur classification et leur construction.* (10 p.; fr.)

JORDAN (C.). — *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants.* (52 p.; fr.)

BRIOSCHI (F.). — *Solution générale de l'équation du cinquième degré.* (10 p.; it.)

SCHLAEFLI (L.). — *Sur les relations entre diverses intégrales définies qui servent à exprimer la solution générale de l'équation de Riccati.* (11 p.; it.)

SCHLAEFLI (L.). — *Quelques observations sur les fonctions de Laplace.* (7 p.; it.)

CREMONA (L.). — *Représentation d'une classe de surfaces gauches sur un plan et détermination de leurs courbes asymptotiques.* (11 p.; it.)
Il s'agit, dans cet article, des surfaces ayant deux directrices rectilignes.

SCHRAMM (H.). — *Les invariants et les covariants, en qualité de critères pour les racines d'une équation.* (21 p.; fr.)

NEUMANN (C.). — *Application du calcul barycentrique à la courbure des courbes et des surfaces algébriques.* (2 art., 5 p.; it.)

CURTZE (M.). — *Notes diverses sur la série de Lambert et sur la loi des nombres premiers.* (8 p.; fr.)

CODAZZI. — *Sur les coordonnées curvilignes d'une surface et de l'espace.* (24 p.; it.)

GEISER (F.). — *Sur les normales à l'ellipsoïde.* (12 p.; it.)
Le but de cet article est de démontrer *synthétiquement* les théorèmes qui se rapportent aux normales à l'ellipsoïde.

Beltrami (E.). — *Des variables complexes sur une surface quelconque.* (38 p. ; it.)

Gordan (P.). — *Application du* « Mémoire sur la représentation typique des formes binaires » *aux équations modulaires de la transformation du cinquième ordre.* (6 p. ; it.)

Betti (E.). — *Sur la détermination des températures variables d'une plaque limitée.* (7 p. ; it.)

T. II, août 1868 à juin 1869.

Reye (T.). — *Sur les axes des coniques situées sur une surface du second ordre.* (12 p. ; it.)

Roberts (Michael). — *Sur l'application du théorème d'Abel à la comparaison des arcs des lignes de courbure d'un ellipsoïde.* (8 p. ; fr.)

Matthiessen (L.). — *Sur quelques propriétés des intégrales eulériennes de première et de seconde espèce.* (7 p. ; it.)

Dini (U.). — *Sur les produits infinis.* (11 p. ; it.)

Aoust (l'abbé). — *Théorie des coordonnées curvilignes quelconques.* (26 p. ; fr.)

Siebeck (H.). — *Du triangle dont les côtés contiennent des pôles conjugués par rapport à quatre sections coniques.* (26 p. ; lat.)

Booth (J.). — *Sur la rectification de quelques courbes.* (8 p. ; fr.)

Schlaefli (L.). — *Sur une équation aux dérivées partielles du premier ordre.* (8 p. ; it.)

Hermite. — *Sur le développement en série des intégrales elliptiques de première et de seconde espèce.* (2 p. ; fr.)

Cayley (A.). — *Note sur quelques torses sextiques.* (2 p. ; fr.)
M. Cayley appelle *torse* une surface développable.

Codazzi (D.). — *Sur les coordonnées curvilignes d'une surface et de l'espace.* Deuxième Mémoire. (19 p. ; it.)

Neumann. — *Théorie nouvelle des phénomènes électriques.* (9 p. ; lat.)

Reye (T.). — *Sur les courbes gauches de quatrième ordre et de pre-*

mière espèce et sur leurs points d'intersection avec les surfaces du second degré. (5 p.; it.)

HABICH (E.). — *Sur un système particulier de coordonnées. Application aux caustiques planes.* (16 p.; it.)

TRUDI (N.). — *Sur la forme quadratique des facteurs irréductibles d'une équation binôme.* (17 p.; it.)

JORDAN (C.). — *Mémoire sur les groupes de mouvements.* (49 p.; fr.)

GENOCCHI (A.). — *Sur un théorème de Cauchy.* (3 p.; it.)

CAYLEY (A.). — *Addition à la Note sur quelques torses sextiques.* (3 p.; fr.)

REYE (T.). — *Sur les courbes gauches de quatrième ordre et de première espèce.* Suite et fin. (2 p.; it.)

ROBERTS (Michael). — *Sur l'expression la plus simple de certaines fonctions des différences des racines d'une équation du cinquième degré.* (5 p.; fr.)

BELTRAMI (E.). — *Théorie fondamentale des espaces de courbure constante.* (24 p.; it.) (*)

GENOCCHI (A.). — *Sur quelques formes de nombres premiers.* (13 p.; it.)

CODAZZI (D.). — *Sur les coordonnées curvilignes d'une surface et de l'espace.* Troisième Mémoire. (19 p.; it.)

LIPSCHITZ (R.). — *Sur la possibilité d'intégrer complétement un système donné d'équations différentielles ordinaires.* (15 p.; it.)

CASEY (J.). — *Recherche des équations des couples de quadriques inscrites dans une quadrique donnée et tangentes à quatre quadriques inscrites aussi dans le même quadrique.* (15 p.; fr.)

SMITH (H.-S.). — *Observation de Géométrie.* (4 p.; lat.)

JORDAN (C.). — *Mémoire sur les groupes de mouvements.* Suite et fin. (24 p.; fr.)

(*) Voir *Bulletin*, p. 29.

GORDAN (P.). — *Application de quelques résultats contenus dans le Mémoire* « Sur la représentation typique des formes binaires des cinquième et sixième degrés » *aux intégrales hyperelliptiques.* (2 p.; it.)

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, publiés par MM. les Secrétaires perpétuels (*).

T. LXX.

N° 20. Séance du 16 mai 1870.

M. BERTRAND. — *Rapport sur un Mémoire de M. Moutard, relatif à la théorie des équations différentielles partielles du second ordre.*

« Les remarquables travaux qui, dans ces derniers temps, ont fait de la théorie des équations différentielles partielles du premier ordre l'une des plus parfaites du calcul intégral ont exercé peu d'influence sur l'étude des équations du second ordre. La forme même du résultat reste cachée dans ce cas, et la savante analyse d'Ampère, dans son admirable Mémoire de 1814, a été loin d'embrasser l'infinie variété des combinaisons possibles. Les géomètres, en étudiant dans sa théorie l'expression la plus parfaite des méthodes proposées jusqu'ici, doivent chercher à introduire plus de généralité dans la forme des résultats, à obtenir plus de certitude et de précision dans les méthodes qui en font connaître la possibilité.

» C'est à cette dernière partie du problème que se rapporte le Mémoire de M. Moutard. Laissant de côté le plus grand nombre des formes d'intégrales énumérées par Ampère, il s'attache exclusivement à la plus simple de toutes pour rechercher les équations auxquelles elle peut convenir. En nommant x et y les deux variables indépendantes dont dépend la fonction inconnue z, M. Moutard suppose que l'une fonctions arbitraires contenues dans l'intégrale générale contienne x seulement et l'autre y seulement, et que toutes deux figurent avec un nombre fini de leurs dérivées.

» Quelles sont les équations auxquelles convient une intégrale générale de cette forme ?

» Tel est le problème que se propose d'abord M. Moutard. Il est

(*) Voir *Bullet.*, t. [illegible], p. 111

intéressant et utile pour la théorie générale, et l'on doit féliciter l'auteur de l'avoir complétement résolu.

» Après avoir montré, comme Ampère, que l'équation différentielle, dans ce cas, ne doit renfermer que la seule dérivée du second ordre $\frac{d^2 z}{dx\,dy}$, désignée habituellement par s, M. Moutard obtient cinq formes distinctes qui comprennent tous les cas possibles : deux d'entre elles sont immédiatement intégrables, la troisième a été rencontrée et complétement intégrée par M. Liouville, les deux autres enfin appartiennent aux mêmes types et se réduisent aisément l'une à l'autre.

» Toute la difficulté se trouve donc concentrée sur une seule forme, que M. Moutard réduit à

$$\frac{d^2\alpha}{du\,dv} = \frac{dl\mathrm{A}}{du}\frac{d\alpha}{dv} + \mathrm{AB}\alpha,$$

où α représente une fonction inconnue de u et de v, et A et B des fonctions données, qui, bien entendu, pour que l'intégrale ait la forme demandée, doivent elles-mêmes remplir certaines conditions.

» La seconde partie du Mémoire est consacrée à leur étude et à la recherche de l'intégrale dans le cas où elles sont remplies. La voie très-directe suivie par M. Moutard, et imposée en quelque sorte par la manière dont il a abordé le problème, le conduit ici sur un terrain connu. Laplace, en 1773, a donné, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, une méthode qui, par des essais successifs, permet de résoudre la première partie du problème, en formant, suivant une loi régulière, une série d'expressions déduites des coefficients de l'équation donnée. Il faut et il suffit, pour que l'intégration soit possible sous la forme supposée, que l'une de ces expressions soit égale à zéro, et le rang qu'elle occupe dans la série indique le nombre des dérivées de l'une des fonctions arbitraires qui doit figurer dans l'intégrale.

» En suivant jusqu'au bout, avec un plein succès, les conséquences de cette méthode, M. Moutard obtient la forme la plus générale des équations considérées, dans la formation desquelles il introduit autant de fonctions arbitraires distinctes qu'il le désire de chacune des variables x et y.

» La troisième partie du Mémoire est consacrée à l'étude très-

complète et très-intéressante de l'équation

$$\frac{d^2 z}{dx\,dy} = z\varphi(x, y),$$

à laquelle se réduit l'équation plus générale traitée précédemment dans un cas particulier, auquel ne sont pas applicables les résultats précédemment obtenus ; deux équations de condition, en général distinctes, se réduisent alors à une seule, et les conséquences qui s'en déduisent sont entièrement changées.

» M. Moutard, après avoir formé l'équation unique à laquelle doit satisfaire la fonction $\varphi(x, y)$ pour que l'intégrale ait la forme supposée, parvient à l'intégrer avec beaucoup de bonheur et de talent, en la ramenant à l'équation semblable d'ordre inférieur de deux unités, obtenue en supposant que la méthode exige une opération de moins.

» En résumé, nous pensons que le Mémoire de M. Moutard mérite l'approbation de l'Académie, et nous lui proposons d'en décider l'insertion dans le *Recueil des Savants étrangers.* »

Les conclusions de ce Rapport sont adoptées.

M. Mannheim. — *Recherches sur les pinceaux de droites et les normalies, contenant une nouvelle exposition de la théorie de la courbure des surfaces.* (Extrait par l'Auteur.)

Le but du Mémoire est l'étude géométrique des sytèmes de rayons rectilignes, étudiés par Hamilton dans sa *Theory of systems of rays* et dans les *Transactions of the Royal Irish Academy*, ainsi que par M. Kummer dans un Mémoire de 1860, *Journal de Crelle,* t. LVII. Dans les études plus récentes de Plücker, ces systèmes prennent le nom de *congruences*, et ils sont définis par deux relations entre les quatre constantes a, b, p et q qui déterminent une droite, constantes qu'on peut appeler les coordonnées d'une droite, si l'on considère la ligne droite comme un élément de l'espace. M. Mannheim introduit dans cette étude les surfaces gauches formées respectivement par une droite et des droites infiniment voisines. Toutes les propriétés dues à M. Kummer se démontrent alors aisément au moyen d'une figure plane, dans laquelle apparaissent toujours une ligne droite et un cercle.

« Le pinceau formé par les normales infiniment voisines d'une surface est très-intéressant à examiner. »

Une surface élémentaire de ce pinceau, surface que M. Man-

nheim a appelée *normalie*, donne lieu à une figure dans laquelle se trouvent groupés tous les éléments relatifs à la théorie des surfaces.

« On est ainsi amené, non-seulement à une nouvelle exposition de cette théorie, à de nombreux résultats dus à MM. Joachimsthal, Bertrand, Bonnet, Lamarle, Catalan, etc., mais encore à d'autres propriétés qui n'avaient pas encore été signalées dans les études si nombreuses faites à ce sujet. »

N° 21. Séance du 23 mai 1870.

M. D'ABBADIE. — *Note sur une nouvelle division décimale de l'angle et du temps.*

M. d'Abbadie propose, dans cette Note, la division décimale non pas pour le cercle entier, mais pour le quadrant. La *prime* ou première décimale équivaut alors à 9 degrés sexagésimaux. La deuxième décimale a déjà reçu le nom de *grade*. La quatrième ou *quarte* ($1^{\text{iv}} = 32'',4$) sera souvent en usage pour les petites mesures; les termes *quinte* ($0^{q},00001$, ou $1^{\text{v}} = 3'',24$) ou cent millième partie du quadrant, et *sixte* ($0^{q},000001$, ou $1^{\text{vi}} = 0'',324$) seraient plus rarement énoncés.

« La seule objection plausible, dit M. d'Abbadie, qu'on puisse adresser à cette réforme, c'est qu'un système de mesure adopté par la plupart des nations civilisées ne doit pas être changé. On répond que cette objection est inapplicable à tous les calculs de haute astronomie et à ceux de la géodésie, où l'étude des angles n'est point le but, mais bien l'intermédiaire, pour arriver à d'autres résultats, et surtout à la connaissance des dimensions réelles. Il en est de même dans les travaux de la physique. La mécanique céleste n'empruntant à l'observation qu'un nombre restreint de données, sur lesquelles sont fondées d'immenses séries de calculs, la conversion des valeurs d'un système dans l'autre n'est qu'un travail insignifiant, auprès des simplifications considérables que l'adoption de la division décimale du quadrant amènerait dans les calculs auxiliaires. Outre la facilité introduite dans les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de division des angles, on aura l'avantage d'éviter les réductions de degrés et de minutes en secondes, et *vice versa*, qui se présentent à chaque instant quand on fait usage de la division sexagésimale. »

M. JORDAN. — *Théorème sur les fonctions doublement périodiques.*

Soient $F_1, \ldots, F_n$ des fonctions doublement périodiques, n'ayant

chacune qu'un nombre limité d'infinis dans chaque parallélogramme des périodes; $l_1, l_2, \ldots, l_n$ des constantes. Si la fonction $\Phi = l_1 F_1 + \ldots + l_n F_n$ admet la période Ω, l'égalité

$$\Phi + l_1 F_1 + \ldots + l_n F_n$$

se décomposera, en général, en une suite d'égalités telles que

$$\begin{aligned} \Phi &= l_1 F_1 + \ldots + l_p F_p + \text{const.}, \\ l_{p+1} F_{p+1} &+ \ldots + l_q F_q = \text{const.}, \\ l_{q+1} F_{q+1} &+ \ldots + l_r F_r = \text{const.}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

où les fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_p$ ont une période commune multiple de Ω, tandis que les fonctions qui figurent dans chacune des autres égalités ont deux périodes communes (multiples des moindres périodes de chacune d'elles), et, par suite, dépendent algébriquement les unes des autres.

N° 22. Séance du 30 mai 1870.

M. Combescure. — *Sur quelques formes différentielles.*

Dans cette Note, M. Combescure s'occupe de problèmes analogues au problème de l'*application* des surfaces les unes sur les autres, mais en considérant des formes à n indéterminées.

M. F. Lucas. — *Sur une formule d'analyse.*

MÉLANGES.

SUR L'INTÉGRALE $\int_{-1}^{+1} \frac{\sin\alpha\, dx}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$.

PAR M. HERMITE.

Soit

$$f(\alpha) = \int_{-1}^{+1} \frac{\sin\alpha\, dx}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}:$$

il est d'abord aisé de voir que l'on a

$$f(\alpha + \pi) = -f(\alpha);$$

car, en faisant, dans l'expression

$$f(\alpha+\pi)=-\int_{-1}^{+1}\frac{\sin\alpha\,dx}{1+2x\cos\alpha+x^2},$$

la substitution $x=-t$, nous obtiendrons sur le champ

$$f(\alpha+\pi)=-\int_{-1}^{+1}\frac{\sin\alpha\,dt}{1-2t\cos\alpha+t^2}=-f(\alpha).$$

La fonction $f(\alpha)$ est donc périodique, et il suffit, pour en obtenir la valeur générale, de la déterminer en supposant α compris entre zéro et π. Faisant à cet effet

$$x-\cos\alpha=u\sin\alpha,$$

ce qui donnera

$$\frac{\sin\alpha\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\frac{du}{1+u^2},$$

nous écrirons

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\sin\alpha\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\int_0^{\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}}\frac{du}{1+u^2}-\int_0^{\frac{-1-\cos\alpha}{\sin\alpha}}\frac{du}{1+u^2},$$

de sorte que, dans le second membre, les deux intégrales représentent les arcs les plus petits, renfermés entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, ayant respectivement pour tangentes les quantités

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\quad\text{et}\quad\frac{-1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{tang}\frac{\pi+\alpha}{2}.$$

Or, α étant moindre que π par hypothèse, la première intégrale sera par conséquent $\frac{\alpha}{2}$, mais la seconde aura pour valeur l'arc $\frac{\pi+\alpha}{2}$ diminué de π, c'est-à-dire $\frac{\alpha-\pi}{2}$; nous aurons donc

$$f(\alpha)=\int_{-1}^{+1}\frac{\sin\alpha\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\frac{\pi}{2}$$

entre les limites indiquées pour la variable α. Maintenant la relation

$$f(\alpha+\pi)=-f(\alpha)$$

donne cette conséquence, qu'entre les limites π et 2π, $f(\alpha)$ a pour

valeur $-\frac{\pi}{2}$, de sorte que nous nous trouvons amené à l'expression analytique, par une intégrale définie, d'une fonction *discontinue* égale à $+\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$, selon que la variable est renfermée entre $2n\pi$ et $(2n+1)\pi$, ou entre les limites $(2n-1)\pi$ et $2n\pi$, n étant un nombre quelconque.

On voit donc comment on peut être amené, par les considérations les plus élémentaires du calcul intégral à la considération si importante en analyse des fonctions discontinues, et j'ajoute que l'expression en série trigonométrique de cette fonction particulière qui s'est ainsi offerte se tire facilement de l'intégrale définie.

Il suffit, en effet, d'employer ce développement connu, savoir :

$$\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\sin\alpha+x\sin 2\alpha+x^2\sin 3\alpha+\ldots+x^{n-1}\sin n\alpha+\ldots,$$

et d'observer qu'on a

$$\int_{-1}^{+1} x^{n-1}\,dx=0 \quad \text{ou} \quad =\frac{2}{n},$$

suivant que n est pair ou impair, pour parvenir au résultat que donnerait la formule de Fourier, savoir :

$$f(\alpha)=\int_{-1}^{+1}\frac{\sin\alpha\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}=2\left[\sin\alpha+\frac{\sin 3\alpha}{3}+\frac{\sin 5\alpha}{5}+\ldots\right].$$

Il serait même possible d'établir la convergence de la série, en limitant le développement de la fonction $\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$ à ses n premiers termes, et considérant le reste qu'on trouvera sous cette forme, savoir :

$$\begin{aligned}R_n=\sin(n+1)\alpha&\int_{-1}^{+1}\frac{x^n\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}\\ -\sin n\alpha&\int_{-1}^{+1}\frac{x^{n+1}\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2};\end{aligned}$$

mais je ne m'y arrêterai point.

Une autre intégrale définie élémentaire conduit encore à la même

fonction discontinue, c'est celle-ci :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}},$$

dont la valeur est $\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$ ou $-\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$, suivant que la constante a, qui, en valeur absolue, doit être supposée supérieure à l'unité, est positive ou négative. Il en résulte, si l'on fait $a = \frac{1}{\cos\alpha}$, qu'on a

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\sin\alpha\, dx}{(1-x\cos\alpha)\sqrt{1-x^2}} = +\pi \quad \text{ou} \quad -\pi,$$

suivant que $\sin\alpha$ est positif ou négatif; mais cette expression ne diffère pas au fond de celle dont nous venons de nous occuper, elle s'y ramène en effet par la substitution $x = \frac{2z}{1+z^2}$, qui sert en général à l'intégration des radicaux de la forme $\sqrt{1-x^2}$. Sous une forme ou sous l'autre, le passage brusque de $f(\alpha)$ d'une valeur nulle à $+\frac{\pi}{2}$, ou $-\frac{\pi}{2}$, semble moins caché dans l'intégrale que dans la série trigonométrique; car, en supposant α infiniment petit, elles offrent, sous le signe d'intégration, aux infiniment petits près du second ordre, l'une le facteur $\frac{1}{(1-x)^2}$, l'autre le facteur $\frac{1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}$, qui, à la limite supérieure $x=1$, rendent les intégrales infinies; c'est du moins par l'intermédiaire de cette forme, du produit d'une quantité infiniment petite par une quantité infiniment grande, que se trouve réalisé le passage brusque d'une valeur nulle à une valeur finie.

Je remarque enfin qu'on a

$$f'(\alpha) = \int_{-1}^{+1} \frac{\cos\alpha(1+x^2)-2x}{(1-2x\cos\alpha+x^2)^2}\,dx = \int_{-1}^{+1} d\left(\frac{1-x\cos\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}\right),$$

et l'intégrale est nulle, en général, puisque la fonction $\frac{1-x\cos\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$ prend la même valeur aux deux limites; toutefois, pour $\cos\alpha = \pm 1$, elle est infinie, l'expression à intégrer entre les limites $+1$ et -1 étant $\frac{1}{1 \pm x}$.

NOTICE SUR LA VIE ET LES TRAVAUX DE N.-I. LOBATCHEFSKY.

Deuxième article (*).

Nous allons donner la liste des écrits publiés par Lobatchefsky sur diverses branches des sciences mathématiques. Nous indiquerons, pour n'y plus revenir, le contenu de ceux de ces écrits que nous avons à notre disposition, à l'exception de ceux qui se rapportent aux découvertes géométriques de Lobatchefsky, et dont nous nous proposons d'exposer l'ensemble avec plus de développement.

1. **О резонансѣ или взаимномъ колебаніи воздушныхъ столбовъ.** (*Каз. Вѣстникъ*, 1828 г.) — De la résonnance, ou des vibrations réciproques des colonnes gazeuses. (*Courrier de Kazan*, 1828.)

2. О началахъ Геометріи. (*Каз. Вѣстникъ*, 1828 и 1829 г.) — Sur les principes de la Géométrie. (*Courrier de Kazan*, 1828 et 1829.)

Ce Mémoire, qui contient un abrégé des travaux de Lobatchefsky sur la Géométrie, a été réimprimé récemment (67 p. in-4°). Nous aurons l'occasion d'y revenir.

3. **Рѣчь о важнѣйшихъ предметахъ воспитанія, произнесенная 5 іюля 1828 года въ торжественномъ собраніи университета.** (*Каз. Вѣстникъ*, 1832 г.) — Discours sur les matières les plus importantes de l'éducation, prononcé le $\frac{5}{17}$ juillet 1828, dans la séance solennelle de l'Université. (*Courrier de Kazan*, 1832.)

4. Алгебра или вычисленіе конечныхъ. Сочинилъ Н. Лобачевскій. Казань. Въ университетской типографіи. 1834. — Algèbre, ou Calcul des quantités finies. Par N. Lobatchefsky. Kazan. Typographie universitaire. 1834. — 1 volume in 8°, 530 pages.

Ce Traité est le seul ouvrage séparé que Lobatchefsky ait composé. Les préliminaires et les opérations fondamentales de l'Algèbre sont développés, un peu longuement peut-être, dans les cinq premiers Chapitres (p. 8-80). Les deux Chapitres suivants (p. 81-120) sont consacrés aux fractions algébriques et aux fractions décimales. Le Chapitre VIII traite des fractions continues (p. 121-150). Dans le Chapitre IX (p. 151-187), l'auteur expose la résolution des équations déterminées du premier degré à plusieurs inconnues. Il donne,

(*) Voir *Bulletin*, p. 66.

après Cauchy, les expressions symboliques, sous forme de produits, des deux termes de la valeur de chaque inconnue. L'objet du Chapitre X (p. 188-234) est la résolution en nombres entiers des équations indéterminées, avec diverses applications au calendrier, aux formules pascales de Gauss, etc. Chapitre XI (p. 235-284) : Puissances et racines des quantités réelles. Chapitre XII (284-305) : Puissances et racines des quantités imaginaires. Chapitre XIII (p. 305-332) : Des logarithmes. Séries logarithmiques et exponentielles. Chapitre XIV (p. 332-344) : Des fonctions trigonométriques, définies au moyen des exponentielles imaginaires ; leurs développements en séries. Fonctions circulaires inverses. Chapitre XV (p. 345-373) : Calcul direct et inverse des différences. Applications diverses. Chapitre XVI (p. 374-411) : Résolution des équations binômes. Congruences. Division du cercle, d'après Gauss. Chapitre XVII (p. 411-528) : Résolution d'une équation algébrique quelconque. Équations du second degré. Racines commensurables. Équations du troisième et du quatrième degré. Propriétés générales des équations algébriques. Règle de Descartes. Développement des racines en fractions continues par la méthode de Lagrange.

5. Пониженіе степени въ двучленномъ уравненіи, когда показатель безъ единицы дѣлится на 8. (*Ученыя Записки Императорскаго Казанскаго Университета*. 1834 г.) — Abaissement du degré d'une équation binôme, lorsque l'exposant moins l'unité est divisible par 8 (*Mémoires de l'Université impériale de Kazan*, 1834). In-8°, 32 pages.

Ce Mémoire est le premier de la collection des Ученыя Записки. Lobatchefsky rappelle qu'en 1813 il présenta à la Faculté des Sciences physico-mathématiques un travail, resté inédit, où il établissait que la résolution des équations binômes peut se faire entièrement à l'aide d'extractions de racines. Il y donnait l'expression générale de l'abaissement du degré de l'équation, lorsque l'exposant est de la forme $4n+1$. Cette méthode a été reproduite dans le Chapitre XVI de son *Algèbre*. Depuis, en lisant dans le *Journal de Crelle* (t. IX, 1 p. 12, 1832) un Mémoire de Richelot sur la résolution de l'équation $x^{257}=1$, il y a appris que Legendre, dans la troisième édition de sa *Théorie des nombres*, a trouvé la même expression générale, et a dû parvenir à la même solution du problème. Richelot,

dans son Mémoire, ne semble pas espérer que l'abaissement puisse être poussé au-delà de $\frac{1}{4}(n-1)$. Mais le même volume du *Journal de Crelle* contient des travaux de Libri où ce géomètre insiste sur la liaison intime qui existe entre les progrès de l'Analyse et ceux de la Théorie des nombres. Encouragé par ces considérations, malgré les doutes de Richelot, Lobatchefsky a repris ses recherches sur l'expression générale de l'abaissement de l'équation $x^n = 1$, et il est parvenu à pousser cet abaissement jusqu'au degré $\frac{1}{8}(n-1)$, lorsque $n-1$ est divisible par 8. Il en fait l'application aux valeurs de $n = 73, 89, 257$.

6. Объ изчезаніи тригонометрическихъ строкъ. (*Уч. Зап. Каз. ун.* 1834 г. книга II.) — Sur la convergence des séries trigonométriques. (*Mém. de l'Un. de Kazan*, 1834, 2ᵉ cahier.)

7. Условныя уравненія для движенія и положенія главныхъ осей въ твердой системѣ. Équations de condition pour le mouvement et la position des axes principaux dans un système solide. [Envoyé aux *Mémoires scientifiques* (Ученыя Записки) de l'Université de Moscou.]

8. *Géométrie imaginaire*, par N. Lobatchefsky, recteur de l'Université de Kazan. (*Journal de Crelle*, t. XVII, 1837.) — In-4°, 26 p., 1 pl.

9. Воображаемая Геометрія. (*Уч. Зап. Каз. ун.* 1835 г., кн. I.) — Géométrie imaginaire. (*Mém. de l'Un. de Kazan*, 1835, 1ᵉʳ cah.)
Ce Mémoire est une rédaction plus développée du Mémoire précédent, dont le manuscrit avait déjà été envoyé au *Journal de Crelle*, et qui ne fut imprimé que deux ans plus tard. Nous nous en occuperons dans un prochain article.

10. Способъ увѣряться въ изчезаніи безконечныхъ строкъ и приближаться къ значенію функцій отъ весьма большихъ чиселъ. (*Уч. Зап. Каз. ун.* 1835 г., кн. II.) — Méthode pour reconnaître la convergence des séries infinies, et pour obtenir approximativement la valeur des fonctions de très-grands nombres. (*Mém. de l'Un. de Kazan*. 1835, 2ᵉ cah.)

11. Новыя начала Геометріи съ полной теоріей параллельныхъ. (*Уч. Зап. Каз. ун.* 1835 г., кн. III; 1836 г., книги II и III; 1837 г.,

кн. I; 1838 г., кн. I.) — Nouveaux principes de Géométrie, avec une théorie complète des parallèles. (*Mém. de l'Un. de Kazan*, 1835, cah. I; 1836, cah. II et III; 1837, cah. I; 1838, cah. I.) — In-8°, 470 p., 9 pl.

Cette importante suite de Mémoires renferme l'exposition détaillée du système géométrique de Lobatchefsky, avec un Traité complet de Trigonométrie et la Théorie des approximations dans les calculs numériques.

12. Примѣненіе воображаемая Геометріи къ нѣкоторымъ интеграламъ. (*Уч. Зап. Каз. ун.* 1836 г., кн. I.) — Application de la Géométrie imaginaire à qnelques intégrales. (*Mém. de l'Un. de Kazan.* 1836, cah. I.) — In-8°, 164 p.

Ce Mémoire fait suite aux Mémoires 8 et 9.

13. *Sur la probabilité des résultats moyens, tirés des observations répétées*; par M. Lobatchefsky, recteur de l'Université de Kazan. (Envoyé en 1838 au *Journal de Crelle*; inséré en 1842 dans le t. XXIV de ce Journal.) — In-4°, 7 p.

Au moyen des formules de l'Analyse combinatoire, Lobatchefsky détermine les limites des probabilités relatives à un nombre fini d'observations, tandis que Laplace avait exprimé ces mêmes limites par des intégrales, dans la supposition d'un nombre d'observations très-grand.

14. *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Von* Nicolaus Lobatschewsky, *Kaiserl. russ. wirkl. Staatsrathe und ord. Prof. der Mathematik bei der Universität Kasan. Berlin*, 1840. *In der Fincke'schen Buchhandlung.* — Études géométriques sur la Théorie des Parallèles. Par N. Lobatchefsky, conseiller d'État actuel de l'Empire russe, et Professeur ordinaire de Mathématiques à l'Université de Kazan. Berlin, 1840. — In-12, 61 p., 1 pl.

Cette brochure semble être une reproduction d'un Mémoire envoyé en 1840 au *Journal de Crelle*, sous le titre de *Beiträge zu der Theorie der Parallellinien*, et non inséré. C'est un résumé de la partie élémentaire du n° 11.

15. *Ueber die Convergenz der unendlichen Reihen, von Nicol. Lobatschewsky, ord. Prof. der Mathematik an der Universität Kasan.* — Sur la convergence des séries infinies. Par N. Lobatchefsky, etc. — Gr. in-4°, 48 p.

Mémoire envoyé au *Journal de Crelle* en 1840, et non inséré. Imprimé à Kazan en 1841. La convergence des séries est définie par la condition que la somme de p termes, pris à la suite du $r^{ième}$, soit infiniment petite pour r infini, quel que soit p, indépendant de r. Application aux séries les plus importantes, pour des valeurs soit réelles, soit imaginaires, des variables. Développements en séries trigonométriques. Développement des fonctions trigonométriques en produits infinis, et de leurs logarithmes en séries infinies. Calcul des fonctions de très-grands nombres. Détermination de quelques intégrales définies.

16. Полное затмѣніе солнца въ Пензѣ въ 1842 г. 20 іюня. (*Журналъ мин. народн. просв.* 1843 г.) — L'éclipse totale de Soleil à Penza, le $\frac{20 \text{ juin}}{2 \text{ juillet}}$ 1842. (*Journal du Ministère de l'Instruction publique*, 1843.)

17. О значеніи нѣкоторыхъ опредѣленныхъ интеграловъ. (*Уч. Зап. Каз. ун.* 1852 г.) — Sur la valeur de quelques intégrales définies. (*Mém. de l'Un. de Kazan*, 1852.)

18. *Pangéométrie, ou Précis de Géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des Parallèles.* Par N. Lobatchefsky, professeur émérite de l'Université de Kazan, et membre honoraire de l'Université de Moscou. (Сборникъ ученыхъ статей, написанныхъ профессорами Императорскаго Казанскаго Университета, въ память пятидесятилѣтняго его существованія. *Томъ первый.* Казань, 1856. — Recueil de Mémoires scientifiques, écrits par les professeurs de l'Université impériale de Kazan, en commémoration du cinquantième anniversaire de sa fondation. Kazan, 1856.) — Gr. in-8°, 67 p.

C'est le dernier travail de Lobatchefsky, et l'un des plus remarquables par la clarté de la rédaction. Une traduction italienne en a été donnée par M. Battaglini (*Giornale di Matematiche*, t. V, 1867, p. 273-336) (*).

J. H.

(*) Il en a été fait des tirages à part. Prix : 3 fr. 50 c.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

SANNIA (ACHILLE), professore nella R. Scuola di Applicazione per gl' Ingegneri di Napoli, e D'OVIDIO (ENRICO), professore nel R. Liceo Principe Umberto di Napoli. — ELEMENTI DI GEOMETRIA. Seconda edizione, riveduta e corretta. — Napoli, Tipografia di Angelo Trani; 1871 (*).

La publication de cet Ouvrage remarquable comble une lacune regrettable qui existait encore dans la série des ouvrages destinés à l'enseignement élémentaire. L'Italie possédait déjà une traduction des *Éléments de Mathématiques* (**) de M. Baltzer, due aux soins d'un géomètre éminent. Mais l'extrême concision de cet auteur en rend la lecture difficile à ceux qui sont privés du secours d'un maître. D'autre part, les nouveaux règlements de l'Instruction publique en Italie exigent que l'enseignement de la Géométrie soit dirigé d'après les *Éléments d'Euclide*, dont M. Baltzer n'a nullement cherché à suivre la marche. Il fallait donc un Traité qui se rapprochât de celui d'Euclide autant que le permettaient les progrès de la science moderne, et qui en rendît l'étude plus facile, en y ajoutant des compléments indispensables.

Tel a été le but des auteurs du livre que nous signalons à l'attention de nos lecteurs, et nous pensons qu'ils l'ont entièrement atteint. Partout ils ont conservé dans toute sa pureté la rigueur euclidienne, à laquelle la plupart des ouvrages modernes sur le même sujet ne nous ont guère accoutumés. Tout ce qui touche aux principes fondamentaux a été traité avec un soin et des détails qui ne peuvent laisser aucun nuage dans l'esprit des commençants. Sans sortir du cadre élémentaire, les auteurs l'ont complétement rempli, et n'ont négligé d'indiquer aucune des théories qui font la base des parties plus élevées de la Géométrie.

Si nous avons quelques critiques à faire sur la rédaction de cet

(*) A. SANNIA, professeur à l'École royale d'Application pour les ingénieurs de Naples, et H. D'OVIDIO, professeur au Lycée du Prince Humbert de Naples. — *Éléments de Géométrie*. 2e édition revue et corrigée. — Naples, imprimerie de A. Trani; 1871. 1 vol. in-8°, x-571 pages, avec 383 figures dans le texte. Prix : 5 francs.

(**) Voir *Bulletin*, p. 80.

ouvrage, ce sera seulement en nous plaçant au point de vue de l'enseignement. Il nous semble qu'il y aurait eu un immense avantage à renoncer aux divisions artificielles, qui séparent l'étude du cercle de celle des triangles, l'étude de la sphère de celle des angles dièdres et polyèdres. Le rapprochement immédiat de propositions identiques pour le fond et différentes seulement par la forme est doublement utile, en évitant la répétition de démonstrations équivalentes, et en faisant pénétrer plus profondément dans la connaissance des objets qu'on étudie. Les auteurs auraient pu, en cela, rester fidèles à l'exemple d'Euclide, qui, dès sa première proposition, fait usage du cercle.

D'autre part, nous regrettons que le désir de se conformer au programme imposé ait conduit MM. Sannia et d'Ovidio à suivre leur modèle de trop près dans leur théorie des proportions. Bien que nous considérions la lecture de l'admirable cinquième livre d'Euclide comme un des exercices les plus profitables pour habituer l'esprit à la sévère logique, nous croyons cependant que les méthodes modernes, fondées sur le principe des limites, conduisent au même but par une voie beaucoup plus prompte et plus aisée, et peuvent le disputer en rigueur aux méthodes des Anciens.

L'ouvrage est divisé en deux parties, comprenant l'une la Planimétrie, l'autre la Stéréométrie. Chacune de ces parties se compose de quatre livres.

Le premier livre traite de la ligne droite; le second, du cercle; le troisième, des lignes proportionnelles et de la similitude dans le plan; le quatrième, de la mesure des aires et des arcs de cercle; le cinquième, du plan et de la ligne droite, du prisme et de la pyramide; le sixième, du cylindre et du cône de révolution, de la sphère et de la symétrie; le septième, de la similitude dans l'espace; le huitième, de la mesure des volumes et des surfaces des polyèdres et des corps ronds.

Nous terminons cette analyse en faisant des vœux pour que cet excellent livre s'introduise dans nos écoles et contribue à réformer chez nous l'enseignement si défectueux de la Géométrie élémentaire.

J. H.

SPITZ (Dr Carl), Professor am Polytechnikum zu Carlsruhe. — ERSTER CURSUS DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG, nebst einer Sammlung von 1450 Beispielen und Uebungsaufgaben, zum Gebrauche an höheren Lehranstalten und beim Selbststudium. — Leipzig und Heidelberg, C.-F. Winter'sche Verlagshandlung. 1871 (*).

Le plan de ce livre est à peu près celui de tous les Traités modernes. La méthode est celle que l'on désigne sous le nom de *méthode des limites,* et qui ne diffère de la méthode infinitésimale que par l'excessive timidité de la forme. Mais ce qui le rend précieux, c'est le grand nombre d'exercices qu'il renferme à la suite de chaque paragraphe, outre le recueil de problèmes variés qui termine le volume.

La première partie traite du Calcul différentiel et de ses applications à la théorie des courbes planes. La seconde partie contient les éléments du calcul intégral, restreint aux fonctions explicites, avec les séries de Bürmann et de Lagrange, et les applications à la sommation des séries et aux problèmes de quadratures, de rectifications, de cubatures au moyen des intégrales simples. J. H.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

GIORNALE DI MATEMATICHE. 8e année. Juillet-décembre 1870 (**).

TOGNOLI (O.). — *Sur une extension de propriétés relatives à des courbes algébriques planes d'ordre quelconque, aux surfaces algébriques de degré quelconque.* (Suite et fin, 7 p.)

Les articles contenus dans cette partie du Mémoire ont pour titres : 1° De la pampolaire d'un faisceau et d'un réseau de surfaces; 2° Cordes tangentes; 3° Plans tangents en des points conjugués; 4° Points doubles d'un réseau et d'un faisceau de polaires internes.

(*) SPITZ (Dr C.), professeur à l'Institut Polytechnique de Carlsruhe. — *Premières Leçons de Calcul différentiel et intégral, avec un recueil de* 1450 *exemples et exercices,* à l'usage des écoles supérieures et des personnes qui étudient seules. — Leipzig et Heidelberg, Winter, 1871. 1 vol. in-8°, 629 p. Prix : $3\frac{1}{2}$ Thlr.

(**) Voir *Bulletin*, p. 152.

Cassani (P.). — *Sur le triangle conjugué de deux coniques.* (2 p.)

Détermination de ce triangle, en cherchant les points qui ont la même droite polaire par rapport à deux coniques.

Cassani (P.). — *Solution de la question n° 178 des* Nouvelles Annales. (2 p.)

Par un point donné, mener un cercle deux fois tangent à une parabole donnée.

Orlando (D.). — *Démonstration de quelques théorèmes de Géométrie.* (2 p.)

Del Grosso (R.). — *Mémoire sur l'attraction des sphéroïdes.* (Suite et fin, 2 art., 49 p.)

Avec la suite du Chapitre VIII sur l'attraction des couches de niveau, se termine la Première Partie du Mémoire. La Seconde Partie traite de l'attraction d'une masse de densité variable, limitée par une surface peu différente de la sphère, et contient les Chapitres suivants: *Chap.* I. Développement en série de la valeur inverse de la distance de deux points. — *Chap.* II. Fonctions sphériques et leur propriétés principales. — *Chap.* III. Potentiel d'une couche sphérique de densité variable. — *Chap.* IV. Attraction d'un sphéroïde peu différent de la sphère.

Regis (D.). — *Sur une application des principes d'homologie à la perspective.* (4 p.)

Regis (D.). — *Sur le nombre des racines réelles que peut avoir l'équation $x^m - px + q = 0$.* (2 p.)

La démonstration est fondée sur la représentation géométrique des équations $y = x^m + q$ et $y = px$, x et y étant les coordonnées orthogonales d'un point.

Aschieri (F.). — *Sur un complexe du second degré. — Génération géométrique des complexes du premier degré.* (6 p.)

Quelques propriétés des complexes du second degré dont l'équation peut se réduire à contenir seulement les carrés des coordonnées de la ligne droite. Ces propriétés consistent en des relations harmoniques que les droites du complexe déterminent avec une série de surfaces du second degré conjuguées au tétraèdre fondamental. Quant à la génération géométrique des complexes du premier degré, l'au

teur trouve le théorème suivant : « Par tout quadrilatère gauche,
» formé avec quatre droites d'un complexe linéaire, est déterminée
» une dépendance homographique, par laquelle le complexe est le
» lieu des droites qui rencontrent suivant des systèmes de points en
» involution deux faisceaux projectifs de plans, ayant pour axes un
» couple de côtés opposés du quadrilatère. »

Jung (G.). — *Démonstration d'un théorème de Géométrie.* (6 p.)

D'Ovidio (E.). — *Note sur les points, plans et droites en coordonnées homogènes.* (44 p.)

Riche recueil de relations métriques très-générales, relatives aux angles entre les droites ou les plans, aux distances entre les points, aux aires des triangles, aux volumes des tétraèdres, aux moments géométriques.

Bitonti (V.-N.). — *Solution de quelques questions de Trigonométrie et de Géométrie, proposées dans l'*Educational Times. (5 p.)

Padova (E.). — *Sur deux théorèmes de M. Neumann.* (6 p.)

Démonstration de deux théorèmes relatifs à la théorie du potentiel, énoncés par M. Neumann dans le tome II des *Mathematische Annalen,* et extension de ces théorèmes à l'espace à *n* dimensions.

Janni (G.). — *Exposition de la Nouvelle Géométrie de Plücker.* (25 p.)

Reproduction du Mémoire de Plücker sur les fondements de la Nouvelle Géométrie de l'espace, contenant principalement les propriétés des complexes, des congruences et des configurations linéaires.

Padova (E.). — *Du mouvement d'un ellipsoïde dans un fluide incompressible et indéfini.* (6 p.)

L'auteur, suivant la méthode employée par Riemann pour traiter le problème de la détermination du mouvement d'un corps homogène dans un fluide indéfini et incompressible, quand les forces qui sollicitent les divers points du corps sont égales entre elles en direction et en intensité, et pour appliquer la solution générale de ce problème au cas où le corps mobile est une sphère, traite le cas où le corps mobile est un ellipsoïde à trois axes.

Mollame (V.). — *Solution de quelques questions de Géométrie, proposées dans l'*Educational Times. (4 p.)

Bitonti (V.-N.). — *Solution d'une question tirée du même recueil.* (3 p.)

Cassani (P.). — *Note sur la conique des neuf points et des neuf droites.* (3 p.)

L'équation de la conique est donnée sous la forme d'un déterminant jacobien. G. B.

COMPTES RENDUS hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, publiés par MM. les Secrétaires perpétuels (*).

T. LXX.

N° 23. Séance du 6 juin 1870.

P. Secchi. — *Sur le déplacement des raies observées dans le spectre solaire.*

M. Mannheim. — *Détermination du plan osculateur et du rayon de courbure de la trajectoire d'un point quelconque d'une droite que l'on déplace en l'assujettissant à certaines conditions.*

Si l'on considère le déplacement d'une droite dans l'espace, on peut se proposer de déterminer, pour la trajectoire d'un de ses points: 1° la tangente à cette trajectoire; 2° le plan osculateur; 3° le rayon de courbure. En faisant usage de la notion si importante de la droite conjuguée due à M. Chasles, M. Mannheim a donné la solution complète de la première question dans son *Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable* (**).

Pour les deux autres questions qui n'ont pas encore été traitées, M. Mannheim est conduit à introduire une nouvelle droite, qu'il propose d'appeler *deuxième conjuguée*, et qui permet d'obtenir, de la manière la plus simple, tous les éléments géométriques du second ordre.

M. C. Wolf. — *Observations relatives à la division décimale des angles et du temps, proposée par M. d'Abbadie.*

« Tout en appréciant les raisons que M. d'Abbadie vient de déve-

---

(*) Voir *Bulletin*, p. 316.

(**) *Mémoires des Savants étrangers*, t. XX, et *Journal de l'École Polytechnique*, 43e cahier.

lopper, pour la division décimale correspondante des angles et du temps, il me semble, dit M. Wolf, qu'on obtiendrait les mêmes avantages, d'une manière plus simple et même plus rationnelle, en appliquant la division décimale au cercle et au jour, et non pas au quart du cercle et au quart du jour. Dans le cercle et dans le jour, nous possédons des unités données par la nature; en prendre le quart pour une nouvelle unité, c'est introduire tout d'abord quelque chose d'arbitraire. Outre cela, la division décimale du jour est déjà en usage dans maints calculs astronomiques, tandis que, vraisemblablement, les Astronomes ne se prèteraient pas très-facilement à adopter le quart du jour en unité. »

M. d'Abbadie répond en ces termes :

« Le quart du cercle est l'unité naturelle, employée de tout temps pour les fonctions trigonométriques; je n'ai pas proposé de changer cette unité, mais bien de la diviser décimalement, en revenant aux idées si justes de Lagrange, Laplace, Ideler, Borda, etc. Les analystes ont toujours rapporté les fonctions de l'angle au quadrant et non au cercle entier. Si le jour tout entier était divisé en 10 ou en 100, on ne pourrait, sans une multiplication préalable, prendre le sinus, etc., d'un angle horaire, ainsi que le besoin s'en fait sentir continuellement. On a bien plus rarement la nécessité de diviser la circonférence par 10; mais, dans ce cas, il suffirait de diviser par 4 le fractionnement décimal proposé par Lagrange, et appliqué au temps, en prenant comme unité l'intervalle de six heures. J'ai peine à comprendre ce qu'il y a d'arbitraire dans le quart du cercle pris comme unité. »

Il nous semble que, en définitive, dans cette discussion, tout le monde a raison. S'il n'y avait que le temps à compter, le jour serait l'unité la plus naturelle; on ne peut méconnaître, d'autre part, que le quadrant ne soit l'unité désignée pour les angles. Si l'on veut, comme cela serait très-utile, faire concorder les deux divisions, il faut de toute nécessité sacrifier une des deux unités naturelles, mais nous ne pouvons admettre, avec M. Wolf, que le cercle entier soit l'unité naturelle des angles.

MM. Klein et Lie. — *Sur une certaine famille de courbes et de surfaces.*

Dans cette Note se trouvent rapidement résumés les résultats

d'une étude neuve et importante, entreprise par les deux jeunes géomètres de Gœttingue et de Christiania.

Ces deux savants se sont proposés la question suivante : Trouver toutes les courbes et toutes les surfaces qui se transforment en elles-mêmes par une infinité de transformations linéaires ou homographiques, permettant d'amener, en général, chaque point de la courbe en tout autre point.

Parmi ces transformations, il y en a qui amènent tous les points dans des positions infiniment voisines. On est ainsi conduit à un système d'équations différentielles dont on obtient l'intégrale la plus générale.

Les courbes, résultat de cette intégration, et définies par la propriété que nous venons d'indiquer, sont appelées, pour abréger, des *courbes* V. On remarque parmi elles les paraboles, la spirale logarithmique, les courbes gauches du quatrième ordre avec rebroussement, les transformées linéaires de la loxodromie sur la sphère.

Quant aux surfaces V, elles comprennent toutes celles qui sont les transformées homographiques des surfaces comprises dans l'équation

$$x^a y^b z^c = \text{const.},$$

etc., etc.

La Note se termine par l'énoncé d'une proposition très-générale, relative à ces courbes et à ces surfaces.

N° 24. Séance du 13 juin 1870.

M. Yvon Villarceau. — *Remarques relatives à la division décimale des angles et du temps.*

M. Villarceau pense avec M. Wolf que l'unité naturelle des angles est le *cercle* ou le *tour*. Il croit qu'il y aurait avantage à adopter cette unité d'angle à la place du *quadrant,* dont le nom même rappelle qu'il ne peut être une unité.

M. Le Besgue. — *Démonstration de la méthode de Jacobi pour la formation de la période d'une racine primitive.*

Cette démonstration très-intéressante n'est malheureusement pas de nature à être analysée.

M. Combes. — *Note accompagnant la présentation de l'*Introduction à la Mécanique industrielle de Poncelet.

On sait que cet ouvrage de Poncelet a été publié en 1829; il était

destiné à compléter les leçons que Poncelet professait, à cette époque, aux ouvriers de la ville de Metz. La deuxième édition, plus complète, fut mise à l'impression vers 1830; elle ne fut publiée qu'en 1839.

La nouvelle édition est augmentée de Notes dues à la plume de M. Kretz, et dans lesquelles sont exposées les notions essentielles sur la Théorie mécanique de la chaleur. Voici comment s'exprime M. Combes au sujet de cet ouvrage de Poncelet :

« L'*Introduction à la Mécanique industrielle* est une des œuvres les plus achevées de Poncelet. Elle porte l'empreinte de ce génie sagace, laborieux, patient, difficile pour lui-même, qui voulait et savait creuser son sujet jusqu'au fond. Quoiqu'elle sorte du cercle des sciences abstraites, elle a gardé et conservera dans l'avenir toute son utilité et sa valeur scientifique; elle restera un modèle des Traités de Mécanique appliquée, et ne contribuera pas moins que les travaux qui l'ont précédée à la gloire de notre confrère. »

M. A. Mannheim. — *Construction de l'axe de courbure de la surface développable enveloppe d'un plan dont le déplacement est assujetti à certaines conditions.*

Dans cette nouvelle Communication, M. Mannheim considère la figure invariable formée par un système de plans parallèles à une même droite, et il établit la liaison qui existe entre les courbures des surfaces développables que ces plans enveloppent pendant leur déplacement.

Pour la développable enveloppe d'un plan, M. Mannheim emploie la droite d'intersection de deux plans normaux infiniment voisins menés par deux génératrices voisines de la surface, et il appelle cette droite *axe de courbure*. En employant les théorèmes relatifs au déplacement d'un solide invariable démontrés dans ses études précédentes, l'auteur est conduit à la solution du problème suivant :

« Quatre plans parallèles à une même droite G forment une figure de grandeur invariable se déplaçant en touchant respectivement quatre surfaces données; construire, à un instant quelconque, l'axe de courbure de la développable enveloppe d'un plan invariablement lié aux premiers, et qui est aussi parallèle à G. »

M. Norman-Lockyer. — *Observations spectroscopiques du Soleil.*

M. Winnecke. — *Éphéméride de la nouvelle comète observée.*

MM. Klein et Lie. — *Sur une certaine famille de courbes et de surfaces.*

Dans cette Note, MM. Klein et Lie complètent la Communication faite par eux dans la séance du 6 juin, en ajoutant un grand nombre de théorèmes importants à ceux qu'ils ont déjà donnés.

M. J. Boussinesq. — *Essai sur la théorie de l'écoulement d'un liquide par un orifice en mince paroi* (suite).

(*Voir* la séance du 31 janvier, *Bulletin*, p. 32.)

M. Clausius. — *Sur une quantité analogue au potentiel et sur un théorème y relatif.*

Dans cette Note, M. Clausius établit le théorème suivant de Mécanique : Soit donné un système de points matériels m, m', m'',... de coordonnées x, y, z; x', y', z';..., qui sont soumis à des forces dont les composantes sont X, Y, Z; X',.... Formons la somme

$$\sum \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right],$$

ou, en désignant par v, v', v'',.. les vitesses des points, la somme $\sum \frac{mv^2}{2}$, appelée *force vive du système*, et formons de plus la somme

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}(\mathrm{X}x + \mathrm{Y}y + \mathrm{Z}z),$$

dont M. Clausius appelle la valeur moyenne le *viriel du système*. On peut énoncer le théorème suivant :

La force vive moyenne du système est égale à son viriel.

M. Maurice Levy. — *Mémoire sur les équations générales des mouvements ultérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état.* Mémoire présenté. (Extrait.)

Dans ce Mémoire se trouvent établies pour des mouvements quelconques dans l'espace, et aussi pour ceux du cas important où tout est symétrique autour d'un axe, les équations générales de ces mouvements de déformation des masses ductiles, qui avaient été données par M. de Saint-Venant, dans une Note du 7 mars 1870, pour le seul cas de mouvements tous semblables dans des plans parallèles, où l'on peut abstraire la dimension qui leur est perpendiculaire, et ne considérer que deux des trois coordonnées des points.

M. G. Darboux. — *Sur la surface des centres de courbure d'une surface algébrique.*

Dans cette Note se trouvent déterminés l'ordre, la classe, et quelques-unes des singularités de la surface des centres de courbure. Il faut indiquer que déjà, dans un Mémoire sur les caractéristiques des systèmes de surfaces du second ordre, inséré aux *Nouvelles Annales de Mathématiques* (t. VII, 2ᵉ série), M. Zeuthen avait résolu quelques-unes des questions traitées par M. Darboux.

N° 26. Séance du 27 juin 1870.

M. Hoüel. — *Sur le choix de l'unité angulaire.*

Cette Note se rapporte à la discussion dont nous avons déjà parlé plus haut; elle nous paraît concluante.

M. Yvon Villarceau. — *Observations relatives à l'objet de la Communication qui précède.*

M. Hoppe. — *Corollaire au théorème de M. Crofton.*

Cette Note se rapporte à un théorème dont nous avons déjà parlé et qui a été donné dans les *Comptes rendus* (t. LXV, p. 994). M. Hoppe fait au sujet de ce théorème et de la démonstration qui en a été donnée par M. Serret une remarque ingénieuse. L'expression de l'intégrale étendue à l'aire se compose de trois parties, l'une algébrique, l'autre circulaire et enfin la dernière est le produit d'un logarithme par la surface d'un polygone. Or on sait que ces trois formes sont irréductibles l'une à l'autre. Alors en séparant ces trois espèces de termes, le théorème de M. Crofton se décompose en trois autres.

M. F. Lucas. — *Nouvelles propriétés de la fonction potentielle.*

Cette Note traite surtout des propriétés du potentiel dans un système d'atomes. Nous rendrons compte du travail *in extenso* publié dans le journal de M. Liouville.

M. Martin de Brettes. — *Détermination de l'épaisseur du blindage en fer que peut traverser un projectile dont on connaît le poids, le calibre et la vitesse d'arrivée.*

T. LXXI.

N° 1. Séance du 4 juillet 1870.

M. Delaunay. — *Note sur les pyramides de Villejuif et de Juvisy.*

M. Serret. — *Rapport sur un Mémoire de M. Bouquet, relatif à la théorie des intégrales ultra-elliptiques.*

« Le Mémoire de M. Bouquet dont l'Académie nous à chargés de lui rendre compte se rapporte au célèbre théorème d'Abel sur les transcendantes ultra-elliptiques, et il a exclusivement pour objet la démonstration d'un théorème nouveau qui peut être regardé comme un complément de celui d'Abel, au moins en ce qui concerne le cas le plus simple des transcendantes de *première espèce* d'une *classe* quelconque. Ce cas est le seul que l'auteur ait developpé, mais l'analyse dont il a fait usage est assurément susceptible d'extension.

» Dans le cas dont il s'agit, le théorème d'Abel assigne une valeur constante à une certaine somme d'intégrales du même élément différentiel, prises avec des signes convenables ; on peut supposer que les limites inférieures de ces intégrales soient zéro, et les limites supérieures sont des variables liées entre elles par des équations algébriques.

» C'est l'étude de la *constante* du théorème d'Abel que M. Bouquet a entreprise, et cet habile géomètre est parvenu à démontrer qu'on en obtient la valeur en ajoutant entre eux un certain nombre d'*éléments fixes*, après les avoir multipliés par des nombres entiers, qui peuvent être positifs, nuls ou négatifs. Les éléments dont je parle sont des intégrales définies qui répondent au même élément différentiel que celles à la limite supérieure variable auxquelles se rapporte le théorème d'Abel ; elles sont prises, comme celles-ci, à partir de zéro, et leurs limites supérieures sont les valeurs de la variable pour lesquelles l'élément différentiel devient infini.

» La démonstration que M. Bouquet a donnée de son théorème est remarquable par sa simplicité. Prenant pour point de départ des résultats importants dus à ses devanciers et particulièrement à M. Puiseux, l'auteur a su mettre habilement à profit la considération, reconnue aujourd'hui indispensable, de l'intégration exécutée suivant des contours quelconques.

» Le résultat obtenu par M. Bouquet remplit un *desideratum* signalé à plusieurs reprises par Legendre. L'illustre fondateur de la théorie des fonctions elliptiques a développé dans le tome III de son ouvrage (3me supplément) un grand nombre d'applications du théorème d'Abel, et il s'est occupé, à l'égard de quelques transcendantes particulières, de la détermination de la constante. « Cette question,

» dit-il, dont il ne paraît pas qu'on puisse donner la solution *a priori* » et d'une manière générale, mérite de fixer l'attention des analystes » par les résultats très-peu variés et très-simples qu'on obtient cons- » tamment dans les cas particuliers. » Traitant à un autre endroit des mêmes transcendantes particulières, il affirme, quoiqu'il n'en ait pas la démonstration, que la constante peut toujours s'exprimer par les deux mêmes *éléments,* quel que soit le nombre des intégrales dont la somme algébrique a pour valeur cette constante; et il ajoute : « Des exemples nombreux appuient cette assertion, que la théorie » n'a pas jusqu'à présent établie d'une manière absolument cer- » taine. »

» La généralité de ce fait analytique, qu'admettait Legendre, est mise hors de doute par le théorème de M. Bouquet, duquel elle ré- sulte immédiatement.

» En résumé, le Mémoire de M. Bouquet renferme un résultat nouveau et intéressant. Nous proposons donc à l'Académie de lui accorder son approbation, et d'en ordonner l'insertion dans le *Recueil des Savants étrangers.* »

Les conclusions de ce Rapport sont adoptées.

MM. C. Wolf et Rayet. — *Sur lal umière de la comète de Winnecke.* (Comète I, 1870.)

M. E. Catalan. — *Remarques sur une Note de M. Darboux, relative à la surface des centres de courbure de l'ellipsoïde.*

Dans une précédente Communication (*), M. Darboux a eu à considérer l'équation différentielle des lignes de courbure, et il avait énoncé la proposition générale suivante :

Étant donnée une équation différentielle

$$f\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0,$$

si l'on cherche le lieu des points du plan pour lesquels deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ fournies par l'équation précédente deviennent égales, le lieu de ces points n'est pas en général l'enveloppe des solutions particulières. C'est un lieu de points de rebroussement pour les courbes

(*) Voir *Bulletin*, p. 339.

représentant les différentes solutions particulières. Par exemple, si l'on considère l'équation simple

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + B\frac{dy}{dx} + C = 0,$$

l'équation

$$R = B^2 - 4AC = 0$$

représente une courbe pour les points de laquelle les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ deviennent égales ; mais cette courbe n'est pas en général l'enveloppe des courbes représentant les solutions particulières. Ce théorème est confirmé par plusieurs exemples géométriques très-généraux. Ainsi, si l'on considère, sur une surface d'un ordre supérieur à 2 la courbe parabolique séparant les points pour lesquels la courbure de la surface est négative de ceux pour lesquels les rayons de courbure sont de même signe, cette ligne parabolique n'est pas tangente en général aux lignes asymptotiques ; celles-ci ne peuvent pénétrer dans la région où la surface est convexe, elles viennent couper la ligne parabolique sous un angle fini et ont, sur cette ligne, un point de rebroussement.

Mais la proposition générale qui précède est, par sa nature même, sujette à des exceptions. Il est bien vrai, pour citer un exemple semblable, qu'en général une courbe n'a qu'une seule tangente en un point, qu'en général on ne sait pas intégrer une équation différentielle. M. Catalan a cependant contribué lui-même à réduire le nombre de celles qu'on ne sait pas intégrer. Aussi n'est-il pas difficile de donner une infinité d'exemples dans lesquels la proposition de M. Darboux est en défaut. Pour l'infirmer, il faudrait prouver qu'elle n'a pas lieu en général, et c'est ce que M. Catalan ne fait pas. Il y a là un simple malentendu.

M. Catalan indique encore dans sa Note certaines formules relatives à la surface des centres de courbure de l'ellipsoïde, comme ayant été données par lui dans ses *Mélanges mathématiques*, p. 263. Enfin, il termine par trois propositions sur cette surface. Voici l'une de ces propositions :

Le long d'une même ligne de courbure de l'ellipsoïde, le rayon principal varie en raison inverse de la distance du centre au plan tangent.

N° 2. **Séance du 11 juillet 1870.**

Séance publique (*).

N° 3. **Séance du 18 juillet 1870.**

M. DUHAMEL *fait hommage à l'Académie du volume qui forme la quatrième partie de son ouvrage :* Des Méthodes dans les Sciences de raisonnement.

« J'ai l'honneur de présenter à l'Académie la dernière Partie de mon ouvrage sur les Méthodes dans les Sciences de raisonnement. Dans la première partie, j'ai exposé d'une manière générale la marche que l'on doit suivre dans la recherche ou la démonstration de la vérité, et dans l'établissement d'une science de raisonnement. J'en ai fait d'abord l'application aux sciences les plus simples, celle des nombres et celle de l'étendue : je considère aujourd'hui la science des forces.

» Les données des deux premières sont fondées, jusqu'à un certain point, sur l'observation ; mais elles sont d'une telle nature, que l'esprit conçoit qu'elles subsisteraient lors même que le monde matériel serait anéanti. Il n'en est pas de même de la science des forces ; elle dépend de la nature de ce monde, qui aurait pu être créé différent de ce qu'il est, et soumis à d'autres lois. Les données de cette science doivent donc reposer sur l'observation de ces lois, et sur des expériences propres à les manifester.

» Il est un point sur lequel nous espérons obtenir l'assentiment des géomètres et des philosophes : jusqu'ici, dans l'étude du mouvement produit par les forces, on a commencé par considérer ce qu'on appelle le *mouvement absolu ;* et ce n'est qu'après en avoir établi la théorie qu'on passe à celle du mouvement relatif. Nous nous sommes placé dans un ordre d'idées tout différent : nous ne fondons rien sur le mouvement ou le repos absolu ; nous n'en parlons même que pour combattre cette notion, qui ne repose que sur la fixité supposée des points de l'*espace absolu,* c'est-à-dire sur un cercle vicieux, où entre la considération d'un être purement imaginaire. »

M. DE SAINT-VENANT. — *Démonstration élémentaire de la formule de propagation d'une onde ou d'une intumescence dans un canal prismatique, et remarques sur la propagation du son et de la lumière, ainsi que sur la distinction des rivières et des torrents.*

(*) Voir *Bulletin*, p. 254.

M. Painvin. — *Détermination des éléments de l'arête de rebroussement d'une surface développable, définie par ses équations tangentielles.*

Cette communication remplit une lacune qui existait dans les formules relatives aux courbes. Étant donnée une courbe définie par ses équations ordinaires, on saura trouver, en appliquant les formules usuelles, les éléments géométriques se rapportant à cette courbe. Mais il arrive assez souvent qu'une courbe ne peut être définie d'une manière simple que par ses plans osculateurs, ou, si l'on veut, par ses équations tangentielles. M. Painvin donne le moyen d'obtenir directement tous les éléments de la courbe.

L'application de ces formules à la surface développable circonscrite à une surface du second ordre et à une sphère a conduit M. Painvin à des résultats très-dignes d'intérêt. En particulier, l'arête de rebroussement de cette surface est *rectifiable.*

M. F. Lucas. — *De la possibilité d'obtenir des signaux de feu à longue portée.*

M. Sonrel. — *Étude photographique du Soleil à l'Observatoire de Paris.*

N° 4. Séance du 25 juillet 1870.

P. Secchi. — *Nouvelles remarques sur les spectres fournis par divers types d'étoiles.*

M. Faye. — *Sur une brochure nouvelle de M. Hirn.*

M. Bertrand. — *Rapport sur un Mémoire de M. Massieu, intitulé :* Mémoire sur les fonctions des divers fluides et sur la théorie des vapeurs.

Dans ce Rapport, M. Bertrand rend compte d'un important travail de M. Massieu, qui constitue un progrès des plus sérieux dans la théorie nouvelle de la chaleur.

« Le Mémoire de M. Massieu, dont nous venons rendre compte à l'Académie, nous semble conçu dans un excellent esprit. Acceptant sans les discuter et sans s'arrêter à les démontrer de nouveau les deux théorèmes importants dont on a fait la base de la théorie mathématique des effets calorifiques, M. Massieu s'attache d'abord à les résumer sous la forme la plus simple, et son travail apporte à cette théorie tant étudiée un progrès réel et incontestable.

» Le problème dont la solution rendrait la théorie parfaite et définitive serait celui-ci.

« Exprimer pour chaque corps, en fonction de deux variables » indépendantes, la température et la pression, par exemple, les » divers éléments physiques qui en dépendent, tels que le volume et » les deux caloriques spécifiques. En se bornant à ces trois inconnues » qu'il semble impossible de séparer, la théorie générale, résumée » dans deux théorèmes, dont l'un peut s'appeler *théorème de Carnot* » ou *de Clausius*, et l'autre *théorème de Mayer* ou *de Joule*, fournit » deux équations seulement entre trois inconnues, qui restent par » conséquent indéterminées, et il ne saurait en être autrement, » puisque les relations à obtenir changent complétement de forme » — cela paraît évident — avec la nature et l'état des corps. »

» La première partie du travail de M. Massieu, consacrée à ce problème général, en donne la solution complète et fort simple, dans l'expression de laquelle figure explicitement une fonction arbitraire qu'il nomme *caractéristique*, et dont la forme, variable d'une substance à l'autre, peut servir à caractériser chacune d'elles en déterminant tous ses éléments calorifiques.

» L'intégration complète de deux équations différentielles partielles du second ordre doit sembler, dans l'état de la science, une bonne fortune inespérée qu'aucune méthode connue ne pourrait promettre. Aussi n'est-ce pas par cette voie que M. Massieu aborde le problème. Les deux équations dont il s'agit expriment, on le sait, que certaines expressions sont des différentielles exactes; c'est en prenant pour inconnues leurs intégrales, ou plutôt en les considérant comme données, que l'on obtient la solution dont l'extrême simplicité accroît plutôt qu'elle n'amoindrit le mérite. Nous croyons utile de donner ici l'expression complète des formules les plus simples définitivement adoptées par M. Massieu.

» Soit dQ la quantité de chaleur nécessaire pour faire passer un corps, de la température t à la température $t + dt$, et du volume v au volume $v + dv$; on sait que, p désignant la pression, et A un coefficient constant pour tous les corps, les expressions

$$dQ - Apdv,$$

$$\frac{dQ}{T},$$

où T désigne la température *absolue* comptée à partir de — 273 degrés, doivent être des différentielles exactes; et que c'est ainsi que peuvent se traduire les deux théorèmes fondamentaux de la théorie nouvelle.

» Posons donc

$$\frac{dQ}{T} = dS,$$

$$dQ - Apdv = dU;$$

nous en conclurons

$$dU + Apdv + SdT = SdT + TdS = d(TS);$$

on a donc

$$SdT + Apdv = d(TS - U).$$

Posons

$$H = TS - U,$$

nous aurons

$$dH = SdT + Apdv.$$

La fonction H est *caractéristique* du corps, et M. Massieu montre très-aisément que, cette fonction étant connue, on peut, par de simples différentiations, exprimer toutes les propriétés calorifiques du corps correspondant, au moyen de cette fonction H et de ses dérivées. On a, par exemple, pour représenter les deux chaleurs spécifiques,

$$k = T\left[\frac{d^2H}{dt^2} - \frac{\left(\frac{d^2H}{dsdv}\right)^2}{\frac{d^2H}{dv^2}}\right],$$

$$k' = T\frac{d^2H}{dt^2}.$$

Le coefficient de dilatation β à pression constante, c'est-à-dire le rapport de la dérivée du volume $\frac{dv}{dt}$ au volume lui-même, est

$$\beta = -\frac{1}{v}\frac{\frac{d^2H}{dvdt}}{\frac{d^2H}{dv^2}},$$

et le coefficient de dilatation à volume constant β' est

$$= \frac{\frac{d^2H}{dv\,dt}}{\frac{dH}{dv}}.$$

» Quoique cette première partie du Mémoire de M. Massieu ne contienne aucun principe théorique nouveau, et qu'elle se résume dans l'expression plus simple et plus élégante de deux théorèmes très-connus, nous n'hésitons pas à la déclarer très-digne de l'approbation de l'Académie; l'introduction de la fonction caractéristique dans les formules qui résument toutes les conséquences possibles des deux théorèmes fondamentaux semble, pour la théorie, un service analogue et presque équivalent à celui qu'a rendu M. Clausius, lorsqu'il a donné au théorème de Carnot l'expression si élégante et si lumineuse qui le rattache à la fonction nommée par lui *entropie*.

» M. Massieu, après avoir proposé pour l'étude des corps l'emploi nouveau de la fonction caractéristique, recherche l'expression de cette fonction pour les gaz parfaits d'abord, pour les vapeurs saturées et pour les vapeurs surchauffées.

» L'étude des gaz parfaits, c'est-à-dire des fluides qui suivraient rigoureusement les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, ne laisse subsister qu'une inconnue : le calorique spécifique à pression constante; en admettant, ainsi que l'a trouvé M. Regnault pour quelques gaz, qu'on puisse le considérer comme constant, le problème est entièrement résolu. M. Massieu pourtant y applique ses formules et donne l'expression de la fonction caractéristique en fonction du volume et de la température.

» En étudiant ensuite les vapeurs saturées, M. Massieu retrouve d'une manière élégante des résultats célèbres et déjà classiques, découverts par M. Clausius, et son seul but est, comme il le déclare, de montrer par ces applications la simplicité et la généralité de sa méthode.

» Le chapitre relatif aux vapeurs surchauffées laisse plus de place à l'incertitude; l'expérience ici n'a pas encore suffisamment préparé le terrain, et dans les formules générales ingénieusement obtenues par M. Massieu subsistent des inconnues sur lesquelles on en est réduit à des hypothèses plus ou moins plausibles.

» M. Massieu avait adopté d'abord celle de la constance du calorique spécifique à volume constant, en assimilant, sous ce point de vue très-important au moins, les vapeurs à un gaz parfait; il y substitue ensuite une loi empirique qui permet une plus grande approximation, sans présenter toutefois une plus grande garantie d'exactitude théorique.

» M. Massieu a eu néanmoins, sur cette question difficile, le mérite de donner une formule indépendante de toute hypothèse, par laquelle toutes les questions relatives à l'étude physique des vapeurs se trouveront résolues le jour où l'on aura déterminé, pour chaque température et pour chaque pression, les valeurs du calorique spécifique à pression constante.

» *Conclusions.* — En résumé, le Mémoire de M. Massieu nous paraît très-digne d'être approuvé par l'Académie, et inséré dans le *Recueil des Savants étrangers.* »

Les conclusions de ce Rapport sont adoptées.

M. Laussedat. — *Restauration d'un cadran solaire conique sur un fragment rapporté de Phénicie par M. Renan.*

M. Darboux. — *Réponse aux observations de M. Catalan, du 4 juillet dernier.*

MÉLANGES.

SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES DE CONIQUES ET DE SURFACES DU SECOND ORDRE;

Par M. G. DARBOUX.

On sait qu'on appelle *points conjugués* ou *pôles harmoniques* deux points tels, que le plan polaire ou la polaire de l'un passe par l'autre. La théorie des points conjugués communs à plusieurs surfaces ou coniques n'a pas encore été traitée complétement. Je me propose d'indiquer dans cette Note quelques-uns des résultats que j'ai obtenus dans l'étude de cette théorie.

Quand des surfaces passent par l'intersection de deux autres, on dit qu'elles forment un *faisceau*. On appelle *réseau* l'ensemble des surfaces passant par l'intersection de trois surfaces fixes, et, en général, *système linéaire du* $n^{\text{ième}}$ *ordre* ou à n constantes, le système

des surfaces qu'on obtient en combinant linéairement les équations de $n+1$ surfaces. Ainsi l'équation

$$\Sigma_1^{n+1}\lambda_i U_i = 0$$

représente un système linéaire d'ordre n; on obtiendra toutes les surfaces du système en donnant aux paramètres λ_i toutes les valeurs possibles.

En même temps que les systèmes linéaires formés avec les équations en coordonnées *ponctuelles* des surfaces, nous emploierons les systèmes formés avec les équations en coordonnées *tangentielles*, ou systèmes formés de *surfaces enveloppes*. Ainsi le faisceau tangentiel sera formé de surfaces inscrites dans une même développable, le réseau tangentiel, de surfaces en général tangentes à huit points, etc. Nous dirons qu'une quadrique, *lieu de points*, est conjuguée à une quadrique *enveloppe*, toutes les fois que cette quadrique sera circonscrite à un tétraèdre conjugué par rapport à la quadrique enveloppe. Cela posé, voici le théorème fondamental qui permet de ramener les uns aux autres les problèmes en apparence les plus différents.

A un système linéaire d'ordre n formé avec des équations en coordonnées ordinaires, correspond un système d'ordre $8-n$ formé de surfaces enveloppes. Toutes les quadriques du premier système sont conjuguées à toutes celles du second.

Ainsi, à une surface unique formant un système d'ordre 0 correspond le système d'enveloppes d'ordre 8, toutes conjuguées à cette surface. A un faisceau de quadriques correspond un système d'ordre 7 formé de surfaces conjuguées aux premières, etc., etc.

Dans la théorie des coniques, à un système d'ordre n correspond un système d'ordre $4-n$. Considérons, par exemple, un réseau : à ce réseau correspond un second réseau formé par les enveloppes conjuguées aux premières. Le lieu des points pour lesquels les premières coniques se décomposent en deux droites est une courbe du troisième ordre, la hessienne ou jacobienne du réseau, l'enveloppe des droites joignant les paires de points, dans lesquelles se décomposent les coniques enveloppes du second réseau, est une courbe de troisième classe qu'on appelle la *cayleyenne* du premier réseau. Les relations entre les deux réseaux de coniques expliquent la réciprocité si remarquable entre la cayleyenne et la hessienne, réciprocité qui a été mise en évidence par MM. Cayley et Cremona.

Voici un second exemple se rapportant aux coniques. Si l'on considère le système de quatre coniques, il y aura un faisceau de coniques enveloppes conjuguées à ces quatre coniques, les enveloppes seront inscrites dans un quadrilatère et les paires de sommets opposés donneront les trois couples de points conjugués aux quatre coniques. On obtient aussi la proposition suivante :

Quand deux coniques enveloppes sont conjuguées par rapport à une conique, toutes les coniques inscrites dans le quadrilatère circonscrit aux deux premières jouissent de la même propriété. Si l'on a deux couples de points conjugués par rapport à une conique, toutes les coniques inscrites dans le quadrilatère formé avec ces quatre points, et en particulier la troisième paire de sommets opposés du quadrilatère, sont conjuguées dans la conique.

La partie de ce théorème relative au troisième couple de points conjugués dans la conique déduit des deux premiers a été donnée depuis longtemps par M. Hesse. Il résulte encore de la proposition précédente le théorème suivant :

On ne peut pas, en général, circonscrire à une conique un quadrilatère dont les sommets opposés soient conjugués par rapport à une conique donnée.

Autrement :

Si de deux points conjugués dans une conique, on mène des tangentes à une autre conique, ces tangentes forment un quadrilatère dont les autres paires de sommets opposés seront toujours conjuguées dans la première conique ou ne le seront jamais.

Je reviens aux surfaces de second ordre. Supposons qu'étant données n surfaces, on demande de trouver les couples de points conjugués communs à ces surfaces. Ces couples de points pourront être considérées comme formant une quadrique enveloppe conjuguée par rapport à toutes les surfaces. Elle devra donc faire partie du système adjoint d'enveloppes d'ordre $8 - n$. On aura donc à traiter la question suivante : Combien y a-t-il de paires de points? comment sont disposés ces points dans un système d'enveloppes, d'ordre $8 - n$; ou, ce qui revient au même, combien y a-t-il de couples de plans dans le système ordinaire de même ordre? Je commence par les cas les plus simples.

Faisceaux. — Dans ce cas, il y a sur toute droite une paire de

points conjugués, un point a une infinité de conjugués en ligne droite. Il n'y a à considérer que les lignes droites, intersections communes des plans polaires d'un point par rapport à toutes les surfaces. Ces droites, ne dépendant que de trois constantes, forment un système de rayons rectilignes de la nature des systèmes appelés *complexes* par Plücker. On les définit par la propriété suivante : elles coupent les faces du tétraèdre conjugué commun aux deux surfaces en quatre points dont le rapport anharmonique est constant. Ce *complexe* de droites a été considéré par M. Chasles, et, dans ces derniers temps par MM. Reye, Klein et Lie. Il se transforme par l'homographie dans le complexe des normales aux surfaces homofocales du second ordre. Dans ce cas, on sait déterminer *tous* les systèmes d'ordre quelconque normaux à ces droites (*). Nous le rencontrerons aussi dans l'étude des réseaux. Signalons dès à présent cette propriété : Quand un point A décrit une surface d'ordre n, les droites correspondantes forment une *congruence* d'ordre n et de classe $3n-\alpha$, α étant le nombre de fois que la surface passe par des sommets du tétraèdre. Ainsi à une surface du second ordre correspondent tous les systèmes de rayons rectilignes d'ordre 2 et de classe égale ou inférieure à 6. On retrouve, comme cas particulier, le problème des normales à une surface du second ordre.

Réseaux. — Les réseaux sont, *en général,* formés de surfaces passant par huit points. Dans ce cas, à un point A correspond un seul conjugué A'. Les droites AA' coupent les surfaces suivant des segments en involution, elles forment un *complexe* très-important du troisième ordre. Ce complexe peut aussi être considéré comme formé des génératrices rectilignes de toutes les surfaces, ou, ce qui revient au même, des sécantes doubles ou des tangentes de toutes les courbes du quatrième ordre, intersections de deux quadriques du réseau. Toutes les droites passant par un point O forment un cône du troisième ordre, ayant pour directrice la courbe du quatrième ordre, intersection des surfaces du réseau passant en O. Les huit droites qui

(*) En général, étant données les normales à un système de surfaces, on peut déterminer sans intégration tous les systèmes de surfaces normales aux mêmes droites. Cette propriété, très-utile, et dont la démonstration est des plus simples, ne paraît pas connue; du moins elle n'est pas signalée dans les travaux récents sur les droites qui remplissent l'espace.

joignent O aux points communs, les vingt-huit droites qui, partant de ce point, sont des sécantes doubles des vingt-huit cubiques gauches passant par six des huit points communs, ces trente-six droites sont sur le cône du troisième ordre (*). Celles de ces droites qui sont dans un plan P enveloppent une courbe du sixième ordre et de la troisième classe, la cayleyenne du réseau des coniques sections des surfaces par le plan P.

Le cône du troisième ordre se décompose en un cône du second ordre et un plan dans deux cas différents. On sait que les cônes du réseau ont leurs sommets sur une courbe du sixième ordre K_6. Toutes les fois que le point O se trouve sur cette courbe, le cône du complexe se décompose en un plan et en un cône du second ordre, qui est le cône du réseau ayant son sommet en O. Les cônes du système enveloppent une surface de la huitième classe et du vingt-quatrième ordre, pour les points de laquelle le cône du complexe acquiert une génératrice double. Les plans dans lesquels se décompose le cône quand O est sur K_6, enveloppent une surface développable de la quatorzième classe. Il y a des théorèmes analogues relatifs aux droites situées dans un plan. Enfin, quand le point O se trouve sur une des vingt-huit cubiques gauches du réseau, le cône du complexe se dé-décompose en un cône du second ordre contenant la cubique gauche, et un plan passant par les deux points communs aux surfaces non situés sur la cubique considérée.

La courbe K_6 a été étudiée par M. Hesse (*Journal de Crelle*, t. XLIX), dans un de ses plus importants Mémoires. Elle n'est jamais sur une surface du second ordre et six de ses points ne sont jamais sur une conique. On reconnaît facilement dans quel cas elle se décompose, ce qui est important pour l'étude qui va suivre.

Puisqu'à un point A correspond un autre point conjugué A′ et inversement, on a un mode de transformation *involutive*, analogue à la transformation de Mœbius. A une surface d'ordre n contenant la ligne K_6 comme ligne multiple d'ordre q correspond une surface d'ordre $3n - 8q$ contenant K_6 comme ligne multiple d'ordre $n - 3q$.

(*) Il faut ajouter à ces vingt-huit droites, vingt-huit autres droites passant par O, coupant à la fois une des cubiques gauches, et la droite qui joint les deux points communs aux surfaces qui ne sont pas sur cette cubique.

C'est ainsi qu'à un plan correspondent toutes les surfaces du troisième ordre contenant K_6, à une surface du quatrième ordre contenant K_6 correspond une surface de même genre, etc. A une courbe d'ordre n, coupant la courbe des sommets en α points, correspond une courbe d'ordre $3n - \alpha$ coupant en $8n - 3\alpha$ points, etc.

Les sécantes triples de la courbe K_6 forment une surface réglée du huitième ordre, qui est la jacobienne du système des surfaces du troisième ordre passant par la courbe, et qui contient six droites de chacune des surfaces.

Il n'est pas exact que les équations de trois quadriques puissent être ramenées à la forme canonique

$$f = \Sigma_1^5 \lambda_i P_i^2 = 0,$$
$$f_1 = \Sigma_1^5 \mu_i P_i^2 = 0,$$
$$f_2 = \Sigma_1^5 \nu_i P_i^2 = 0.$$

Les trois seconds membres contiennent bien trente constantes, mais on peut montrer que, si la transformation est possible d'une manière, elle le sera d'une infinité d'autres manières, et l'on est ainsi conduit au théorème suivant :

En général, on ne peut pas trouver de pentagone dont les sommets non adjacents soient conjugués à la fois dans trois surfaces, et quand on trouve un de ces pentagones, il y en a une infinité d'autres jouissant de la même propriété. Leurs sommets décrivent la courbe K_6, *leurs plans enveloppent une cubique gauche et leurs côtés décrivent la surface réglée du huitième ordre engendrée par les sécantes triples de la courbe* K_6 (*).

Les réseaux de quadriques présentent plusieurs cas particuliers dignes d'attention. Si les quadriques ont une droite commune, le

(*) Le théorème précédent est analogue aux théorèmes de Poncelet. Voici d'autres propositions du même genre qu'on déduit de notre théorème fondamental :

L'équation $\Sigma_1^9 \lambda_i P_i^4 = 0$ contient trente-six constantes, une de plus qu'il n'y en a dans l'équation générale des surfaces du quatrième ordre; cependant elle ne peut représenter la surface générale de cet ordre; pour qu'il en soit ainsi, il faut qu'un invariant du dixième ordre par rapport aux coefficients soit nul, et alors la transformation précédente est possible d'une infinité de manières, les plans P restant tangents à une surface du second degré.

Si l'on peut trouver un polygone circonscrit à une conique et dont tous les sommets soient sur une courbe algébrique, il y en aura une infinité d'autres jouissant de la même propriété.

complexe des génératrices se divise en deux, les génératrices d'un système vont rencontrer la droite commune, les autres forment un *complexe du second ordre identique* à celui que nous avons rencontré dans l'étude des faisceaux.

Systèmes du troisième ordre. — Les systèmes généraux du troisième ordre ont été peu étudiés. La *jacobienne* du système est une surface très-remarquable du quatrième ordre. On sait qu'elle peut être considérée de trois manières différentes : 1° comme le lieu des sommets des cônes du système ; 2° comme le lieu des paires de points conjugués par rapport à toutes les surfaces ; 3° comme le lieu des points où se touchent deux surfaces du système. La *hessienne* d'une surface du troisième ordre, qui est la jacobienne d'un réseau particulier, a été étudiée par plusieurs géomètres, notamment par M. Cremona (*Journal de Borchardt*, t. LXVIII). Mais la jacobienne la plus générale, qui n'a pas de point double, mérite une étude spéciale. Si on lui adjoint une surface du quatrième ordre, que j'appellerai la *discriminante*, on a un système très-important de deux surfaces qui se partagent, au grand avantage de la netteté, les propriétés de la hessienne d'une surface cubique.

La jacobienne contient, on le sait, les dix droites qui sont les arêtes des couples de plans du système. Elle contient en outre : 1° dix cubiques gauches, sécantes doubles chacune de neuf droites ; 2° cent-vingt cubiques gauches sécantes de trois droites ; 3° quarante-cinq séries de courbes du quatrième ordre rencontrant huit droites, auxquelles il faut associer quarante-cinq autres séries de courbes de même ordre ne rencontrant que deux droites. Les propriétés des points conjugués sont les mêmes que pour la hessienne et se démontrent de la même manière.

La *discriminante* contient en général dix points doubles et ne contient pas de droite. Chaque point commun aux surfaces du système ajoute un point double à la discriminante (et à la jacobienne), en sorte que le système des surfaces passant par six points a pour discriminante la surface à seize points singuliers, et pour jacobienne une surface ayant vingt-cinq droites et six points doubles. Ces deux surfaces se correspondent point par point, comme dans le cas général.

Les dix points doubles de la discriminante ne sont jamais sur une surface du second ordre. Le théorème suivant donne la relation entre ces points :

Si de l'un des points doubles on fait la perspective des neuf autres sur un plan, les neuf projections appartiennent à une infinité de courbes du troisième ordre; le cône circonscrit à la surface, et ayant pour sommet l'un des points doubles, se décompose en deux cônes du troisième ordre.

En examinant les relations entre les points des deux surfaces J et D, on est conduit à des relations analogues à celles que M. Hesse a données entre la courbe plane du quatrième ordre et la courbe K_6; mais notre théorème fondamental permet, de plus, de faire correspondre non-seulement les points des deux surfaces, mais encore des éléments en dehors de ces deux surfaces. C'est ainsi qu'à un plan correspond une surface du troisième ordre à quatre points doubles, tangente à D, en tous les points d'une courbe du sixième ordre. Les lignes asymptotiques de cette cubique se déterminent sans difficulté, grâce au mode de correspondance indiqué ici (*).

Mais pour compléter l'ensemble des relations géométriques, il est nécessaire d'adjoindre aux surfaces précédentes une troisième surface beaucoup plus compliquée. C'est la surface *focale* de la congruence

---

(*) Les lignes asymptotiques de cette surface donnent celles de la surface de Steiner. On déduit, du reste, les lignes asymptotiques de beaucoup de surfaces du théorème suivant : *Soit une surface pour laquelle les coordonnées de l'un des points s'expriment par les formules*

$$x = A(\rho - a)^m(\rho_1 - a)^n,$$
$$y = B(\rho - b)^m(\rho_1 - b)^n,$$
$$z = C(\rho - c)^m(\rho_1 - c)^n,$$

l'équation différentielle des lignes asymptotiques sera

$$m(m-1)\frac{d\rho^2}{(\rho - a)(\rho - b)(\rho - c)} = n(n-1)\frac{d\rho_1^2}{(\rho_1 - a)(\rho_1 - b)(\rho_1 - c)}.$$

Ce théorème donne les lignes asymptotiques de la *surface des centres de courbure* de l'ellipsoïde, de la surface de Steiner, etc.

J'ajouterai que les lignes asymptotiques de la surface de Steiner ont déjà été déterminées par MM. Clebsch et Gordan (*Journal de Borchardt*, t. LXVIII, p. 1).

La proposition qui précède conduit en particulier à cette conséquence, qu'on sait déterminer les lignes asymptotiques des surfaces comprises dans l'équation

$$Ax^m + By^m + Cz^m + Dt^m = 0.$$

Ces surfaces remarquables, considérées par Lamé et plusieurs autres géomètres, comprennent, comme cas limite, les surfaces dont l'équation est

$$x^m y^n z^p = C,$$

et qui ont été étudiées par M. J.-A. Serret et M. Combescure.

En se bornant au cas du troisième ordre, on voit qu'on sait déterminer les lignes asymptotiques de la surface dont la Hessienne se réduit à quatre plans.

formée par les droites joignant deux paires de points conjugués. Ces droites sont celles qui coupent toutes les surfaces du système suivant des segments en involution. Elles forment un système de rayons rectilignes d'ordre 7 en général, et de classe 3. Leur surface focale est en même temps l'enveloppe des cônes du système. On construit géométriquement les points de contact de chaque rayon, les plans tangents en ces points : les propriétés de la surface rappellent celles de la cayleyenne d'un réseau de coniques. Les huit droites qui joignent les huit points communs à trois surfaces quelconques du système sont tangentes doubles de cette surface. Elle est en général de l'ordre 24 et de l'ordre 16. Son ordre diminue de quatre unités, sa classe de deux unités pour chaque point commun aux quadriques du système. Le cas le plus simple, celui où six points sont communs aux surfaces, est très-important. La surface se réduit à une cubique gauche passant par les six points, et l'on retrouve ce beau théorème de M. Paul Serret :

Toute droite qui coupe en involution quatre des systèmes de plans passant par six points est sécante double de la cubique gauche des six points.

Dans le cas où les surfaces ont un, deux, trois, quatre et cinq points communs, on retrouve les surfaces si remarquables à onze, douze,... et quinze points singuliers que M. Kummer a rencontrées dans ses belles études sur les rayons rectilignes. Tous les résultats qu'a trouvés M. Kummer s'expliquent ainsi géométriquement, les différents systèmes de rayons correspondant aux génératrices des surfaces du second ordre passant par les points fixes, les points doubles se divisant naturellement en deux classes, etc. Il faut cependant signaler une exception importante : l'on n'obtient pas la surface du douzième ordre sans plan singulier. Nous avons déjà rencontré cette surface dans un problème relatif aux faisceaux.

L'application de la discriminante sur un plan double s'effectue conformément à la méthode de M. Clebsch. La courbe de passage se compose de deux courbes du troisième ordre. La correspondance entre la surface à seize points singuliers D et la surface J, lieu des sommets des cônes passant par six points, est très-remarquable. Aux six points doubles de J correspondent six points doubles de D; les dix autres points doubles de cette surface correspondent aux dix

droites, arêtes des couples de plans passant par les six points. Les seize coniques singulières de D correspondent à la cubique gauche des six points et aux quinze droites joignant les six points. Enfin, les tangentes doubles de D se divisent en six systèmes correspondants aux systèmes de droites passant par les six points doubles de J.

Si l'on se propose de ramener les quatre équations des surfaces du système à la forme canonique,

$$f = \Sigma_1^6 \lambda_i P_i^2 = 0,$$

les quatre équations ainsi obtenues contiennent quarante-deux constantes. Il est possible cependant de montrer que si l'on a obtenu ces équations, on peut les transformer de manière à y introduire trois arbitraires ; elles ne sont donc pas applicables à un système de quatre surfaces quelconques. On obtient ainsi le théorème suivant :

On ne peut pas, en général, trouver un hexaèdre dont les sommets opposés soient conjugués à la fois par rapport à quatre surfaces, et, quand il y a un hexaèdre satisfaisant à cette définition, il y en a une infinité d'autres. Les plans de ces différents hexaèdres enveloppent une surface du second ordre, leurs vingt sommets décrivent la jacobienne du système (*).

Systèmes du quatrième ordre. — A ces systèmes formés de cinq surfaces correspond un réseau d'enveloppes du même ordre. Il y a à considérer une courbe K_{10} du dixième ordre, et une développable D_{10} de dixième classe, réciproque de la première courbe.

Toute surface du quatrième ordre passant par K_{10} est la jacobienne de quatre surfaces du système, toute surface de quatrième classe inscrite dans D_{10} est la jacobienne tangentielle de quatre surfaces du système conjugué. Les points de K_{10} et les plans de D_{10} se groupent par paires aa', AA' conjuguées les unes par rapport aux autres.

Les droites aa' forment une surface réglée du dixième ordre R_{10}; par chacune de ces droites on peut mener quatre plans tangents à D_{10}.

Les droites AA' forment une surface réglée du même ordre R'_{10} coupant chaque jacobienne suivant dix droites et suivant K_{10} qu'elle

(*) Dans certains cas, l'indétermination des plans de l'hexaèdre est plus grande ; cela se présente en particulier pour la hessienne d'une surface cubique.

a pour ligne triple. Cette surface réglée est le lieu des arêtes des couples de plans du système (*).

Ces propriétés sont évidentes, quand on connaît les relations des deux systèmes.

Ici se termine, grâce au théorème fondamental qui réduit de moitié le nombre des problèmes, l'étude des questions proposées. J'indiquerai en terminant les théorèmes suivants :

L'équation

$$\Sigma_1^7 \lambda_i P_i^2 = 0$$

représente toutes les surfaces conjuguées aux surfaces enveloppes inscrites dans les sept plans P_i. On peut toujours mettre les équations de sept surfaces sous la forme précédente, et cela de huit manières différentes.

Des équations de la forme

$$\Sigma_1^8 \lambda_i P_i^2 = 0$$

représentent toutes les surfaces conjuguées aux surfaces inscrites dans une même développable ; douze équations de la forme précédente contiennent cent-vingt constantes, et paraissent pouvoir représenter douze surfaces. Cependant on ne peut employer ces équations que pour huit surfaces.

L'équation

$$\Sigma_1^9 \lambda_i P_i^2 = 0$$

représente toutes les surfaces conjuguées à la surface inscrite dans les neuf plans. Quoique 27 équations de cette forme renferment 270 constantes, on ne peut pas les appliquer à plus de neuf surfaces.

On obtient ainsi comme cas particulier la proposition fondamentale dont M. Paul Serret a fait usage dans son livre sur la *Géométrie de Direction*.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Albrich (C.). — Sammlung von geometrischen Aufgaben. Gr. in-8. Hermannstadt, Michaelis. 6 Ngr.

(*) Tout plan tangent à D_{10} coupe K_{10} suivant les six sommets d'un quadrilatère complet, dont les trois diagonales appartiennent à R_{10}, et suivant quatre autres points en ligne droite.

American Ephemeris and Nautical Almanac for 1873. Roy.-8, 524 p. (Washington), London. 8 sh.

Bille (J.-F.). — Tabeller over Solens Declination, Rectascension og Tidsæqvation, sammt Maanens Culminations Klokkeslætter i Greenwich for Aaret 1873. Christiania, Cappelen. 8 Sk.

Björling (C.-F.-E.) (jr.). — Sur le mouvement rectiligne d'une molécule soumise à une force attractive ou répulsive, qui est une fonction algébrique, rationnelle et entière de la distance à un centre fixe. — Greifswald, Koch. Broch. in-8°.

Cramer (G.-H.). — Practische zeevaartkunde. Gr. in-8, 7 en 249 bl. Rotterdam, Van Belle. 2 fl. 70 c.

Delabar (G.). — Anleitung zum Linearzeichnen. 2. Thl., 3. Abth. Die Polar- und Parallelperspective. Qu. gr. in-8. Geb. Freiburg, Herder. 1 $\frac{1}{2}$ Thlr.

Dronke (A.). — Einleitung in die höhere Algebra. 1. Thl. Gr. in-8. Halle, Nebert. $\frac{3}{4}$ Thlr.

Forti (dott. *Angelo*). — Tavole dei Logaritmi de' numeri e delle funzioni circolari ed iperboliche, precedute dalla storia e teoria delle iperboliche, da applicazioni e da altre tavole di uso frequente. — 2 vol. in-16. Torino, Firenze, Milano; G.-B. Paravia e comp. 1870. 8 fr.

Guldberg (A.-S.). — Regningsarterne og deres Anvendelse, nærmest udarbeidet for Lærerne ved vore Borger-og Almuskoler. — Christiania, 1868. 30 Skill.

Hessel. — Uebersicht der gleicheckigen Polyeder. Gr. in-8. Marburg, Ehrhardt. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Hofmann (F.). — Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. 1. Thl. 4., mit Rücksicht auf das metrische System umgearbeitete Auflage. Gr. in-8. Bayreuth, Grau. 16 Ngr.

Inskip (R.-M.). — Navigation and Nautical Astronomy. New edit. In-8, 166 p. London, Harrison. 6 sh. 6 d.

Lübsen (H.-B.). — Ausführliches Lehrbuch der Analysis. 5. Aufl. Gr. in-8. Leipzig, Brandstetter. 1 Thlr. 6 Ngr.

Montag (C.). — Ueber ein durch die Sätze von Brianchon und Pascal vermitteltes geometrisches Beziehungssystem. Dissert. Gr. in-8. Breslau, Maruschke und Berendt. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Nyberg (B-A.). — Elementarkurs i räkning, metodiskt framstäld. Första kursen : hufvudräkning med 774 exempel. — Helsingfors, 1869.

Reimann (E.). — Die Höhenbestimmung der Sternschnuppen. Inaug.-Dissert. Gr. in-8. Breslau, Maruschke und Berendt. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Rosanes (J.). — Ueber die neuesten Untersuchungen in Betreff unserer Anschauung vom Raume. Gr. in-8. Breslau, Maruschke und Berendt. 6 Ngr.

Schubert (F.-C.). — Mathematisches Vademecum. 2. Aufl. In-8. Berlin, Wiegandt und Hempel. $\frac{1}{6}$ Thlr.

Seidel (L.). — Ueber die Grenzwerthe eines unendlichen Potenzausdruckes. Gr. in-8. München, Franz. 4 Ngr.

Smyth (C. Piazzi). — On an Equal Surface Projection for Maps of the World. In-8, sewed. London, Hamilton. 3 sh.

Wand (Th.). — Die Principien der mathematischen Physik und die Potentialtheorie. Gr. in-8. Leipzig, Teubner. 1 Thlr.

Waszmuth (A.). — Ueber ein neues Verfahren, den Reductionsfactor einer Tangentenboussole zu bestimmen. Lex.-8. Wien, Gerold. 2 Ngr.

Weihrauch (K.). — Untersuchung über eine Gleichung des 1. Grades mit mehreren Unbekannten. (Dissertat.) 45 p. in-4. Dorpat.

Wenzel (Georg). — Ueber die einfachste allgemeine Beziehung zwischen räumlichen Gebilden. Inaug.-Dissert. Gr. in-8, 58 S. Breslau, Maruschke und Berendt. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Weyr (E.). — Ueber Curvenbüschel. Lex.-8. Wien, Gerold. 1 $\frac{1}{2}$ Ngr.

Williams (W.-M.). — The Fuel of the Sun. In-8, 240 p. London, Simpkin. 7 sh. 6 d.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

MAYR (Dr Aloys), ordentl. Professor der Mathematik an der k. Universität zu Würzburg.—CONSTRUCTION DER DIFFERENZIAL-GLEICHUNGEN AUS PARTIKULAREN INTEGRALEN, und zwar aus einfachen Functionen, aus bestimmten Integralen und aus bestimmten Differenzialen. Fortsetzung der Prolegomena zur Theorie der Integration. — Würzburg, Julius Kellner's Buchhandlung; 1870 (*).

Dans un ouvrage publié en 1868, sous le titre de : *Der integrirende Factor und die partikularen Integrale* (Würzburg, J. Kellner), l'auteur a établi que les équations différentielles ne peuvent s'intégrer, en général, par des opérations directes, d'où ressort la nécessité de recourir à une méthode plus indirecte.

Cette méthode est la construction au moyen d'intégrales particulières, c'est-à-dire la formation d'un recueil d'équations différentielles admettant des intégrales de formes données. On voit que ce procédé a une certaine analogie avec ceux que l'on emploie pour la recherche des intégrales définies spéciales, dont on a formé des Tables par des moyens indirects de calcul.

On obtient ainsi, par le développement des méthodes de construction, un nombre de plus en plus grand d'équations intégrales, dans la catégorie desquelles on a d'autant plus de chances de pouvoir faire rentrer une équation proposée.

Les intégrales particulières employées dans la construction des équations sont ou des fonctions simples, telles que $x^\nu e^{ux}$; ou des intégrales définies, telles que $x^\nu \int e^{ux} V\,du$; ou des différentielles définies, telles que $x^\nu \frac{d\{V d[\ldots d(e^{ux}V)]\}}{du^n}$. Ces dernières expressions se présentent comme des termes essentiels dans la série des diverses sortes d'intégrales particulières.

Voici les titres des sections dans lesquelles se divise cet ouvrage :

(*) MAYR (A.), professeur ordinaire à l'Université royale de Würzbourg. — *Construction des équations différentielles au moyen d'intégrales particulières, savoir : au moyen de fonctions simples, d'intégrales définies et de différentielles définies.* Suite des Prolégomènes à la théorie de l'intégration. — Würzbourg, J. Kellner, 1870. 1 vol. in-8°, 231 p. Prix : 1 Thlr. 24 Ngr.

I. Introduction. — II. Construction des équations différentielles. — III. Construction des équations différentielles au moyen de l'intégrale particulière $y = x^\nu e^{\lambda x}$. — IV. Construction des équations différentielles au moyen de l'intégrale particulière $y = x^\nu e^{\lambda x^\mu}$. — V. Autres formations d'équations différentielles au moyen des fonctions $y = x^\nu e^{\lambda x}$ et $y = x^\nu e^{\lambda x^\mu}$. — VI. Construction des équations différentielles au moyen de l'intégrale particulière $y = \int x^\nu e^{ux} V du$. — VII. Intégration au moyen des différentielles définies. — VIII. Conclusion.

L'auteur se propose de continuer ses recherches sur ce sujet fécond, et de les étendre aux équations différentielles à plusieurs variables indépendantes. J. H.

LIEBLEIN (Johann), ausserordentlicher Professor am Polytechnikum zu Prag. — SAMMLUNG VON AUFGABEN AUS DER ALGEBRAISCHEN ANALYSIS. — Prag, Verlag von H.-C.-J. Satow, 1867 (*). Pr. 1 $\frac{1}{3}$ Thlr.

Cet utile recueil est le seul qui ait été publié pour venir en aide aux personnes qui étudient cette branche si importante de l'Analyse, formant la transition entre l'Algèbre et le Calcul infinitésimal.

L'auteur a conformé le plan de son ouvrage à celui du *Handbuch der algebraischen Analysis* de M. Schlömilch (**). Voici les titres des Chapitres dans lesquels il est divisé :

I. Sur les diverses espèces de fonctions.

II. Sur les fonctions cyclométriques (ou fonctions circulaires inverses).

III Sur les valeurs-limites.

IV. Sur la continuité et la discontinuité des fonctions.

V. Sur la convergence et la divergence des séries infinies.

VI. Sur les séries doubles.

VII. Sur les développements en séries : (A) séries récurrentes;

(*) LIEBLEIN (J.), professeur extraordinaire à l'Institut Polytechnique de Prague. — *Recueil de Problèmes d'Analyse algébrique*. Prague, H.-C.-J. Satow, 1867. 1 vol. in-8°, 192 p.

(**) *Voir* le compte rendu de ce livre, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. III, p. 512; 1864.

(B) série binomiale, série exponentielle; (C) séries logarithmiques; (D) séries goniométriques et cyclométriques.

VIII. Sur les produits infinis.

IX. Sur les fonctions de variables complexes, et sur les séries et les produits de quantités complexes.

X. Sur les fractions continues.

L'ouvrage est terminé par les réponses aux diverses questions, avec des indications sur la manière de résoudre les plus difficiles.

J. H.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN (*).

T. LXXVI (suite), nos 1810-1824, 1870.

STEPHAN (E.). — *Positions moyennes pour 1870 de nébuleuses nouvelles.*

POWALKY (C.). — *Contributions pour une discussion plus complète des passages de Vénus, et détermination de quelques résultats plus exacts au moyen de ces passages.* (32 col.; all.)

WEISS (E.). — *Contributions à la connaissance des étoiles filantes* (2e Mémoire). (28 col.; all.)

Déterminations de hauteurs d'étoiles filantes dans la période d'août 1869. (*a*) Équation personnelle dans les observations d'étoiles filantes. (*b*) Calcul des observations correspondantes d'étoiles filantes. Calcul des orbites de météores pour un point radiant : 1° connu; 2° inconnu. (*c*) Calcul des observations correspondantes de la période d'août 1869.

ZÖLLNER (F.). — *Sur la température et la constitution physique du Soleil.* (18 col.; all.)

WINNECKE (A.). — *Liste de quelques nouvelles étoiles changeantes, avec les éléments approximatifs de leurs variations d'éclat.* (6 col.; all.)

(*) Voir *Bulletin*, p. 87, 280.

Schönfeld (E.). — *Contributions à l'étude des variations d'éclat des étoiles changeantes.* (24 col.; all.)

Oppolzer (Th.). — *Détermination définitive de l'orbite de la planète (59) Elpis.* (8 col.; all.)

Jordan (W.). — *Remarque sur la seconde solution de Gauss pour le problème fondamental de la géodésie supérieure.* (8 col.; all.)

Ce problème consiste, étant donnés la longueur d'une ligne géodésique tracée sur l'ellipsoïde terrestre, l'azimut à l'une de ses extrémités et la latitude géographique de cette extrémité, à en déduire l'azimut et la latitude pour l'autre extrémité, et la différence en longitude des deux extrémités.

Spörer. — *Observations des taches solaires.* (6 col.; all.)

Distribution héliographique pendant les Ire, IIe et IIIe périodes de rotation de 1870.

Peters (C.-H.-F.). — *Découverte d'une nouvelle planète (112), et éléments de (111) Até.*

Newcomb (S.). — *Sur une méthode très-précise pour déterminer les positions relatives des centres du Soleil et de la Lune pendant une éclipse de Soleil presque centrale.* (4 col.; angl.)

T. LXXVII, n°s 1825-1837; 1870-1871.

Schubert (E.). — *Éléments d'Euphrosyne, leurs perturbations par Jupiter, et Table pour la solution du problème de Kepler.* (12 col.)

Dembowski. — *Observations d'étoiles doubles* (suite). (5 art., 24 col.; fr.)

Spörer. — *Observations des taches solaires* (suite). (2 art., 24 col.)

Distribution héliographique pendant les IVe, V^{e}, VIe, VIIe, VIIIe et IXe périodes de rotation de 1870.

Engelmann (R.). — *Détermination de l'éclat de quelques étoiles du ciel austral.* (12 col.; all.)

Matthiessen (L.). — *Constante magnétique de l'intensité horizontale à Jever (Gr.-D. d'Oldenbourg), lat. N. 53° 35'.*

Heis. — *Observations de la lumière zodiacale en 1870 à Münster.*

Schubert (E.). — *Éléments de Polyhymnie, leurs perturbations par Jupiter, et Table pour la solution du problème de Kepler.* (10 col.)

Schmidt (J.-F.-J.). — *Observations d'étoiles variables à l'Observatoire d'Athènes en* 1870. (12 col.)

Schmidt (J.-F.-J.). — *Observations du Soleil en* 1870 *à l'Observatoire d'Athènes.* (6 col.; all.)

Littrow (K. von). — *Approches physiques des planètes de* (1) *à* (82) *pendant la présente année.* (4 col.; all.)

Zöllner (F.). — *Sur la périodicité et la distribution héliographique des taches solaires.* (11 col.; all.)

Weiss (E.). — *Comptes rendus de l'expédition autrichienne envoyée à Aden pour l'observation de l'éclipse totale de Soleil de l'année* 1868. (26 col.; all.)

Observations pendant l'éclipse. De la méthode de Littrow pour la détermination du temps par les hauteurs circumméridiennes, au point de vue de l'usage pratique. Climatologie d'Aden. Coordonnées géographiques d'Aden. Observations d'étoiles filantes à Aden.

PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS of the Royal Society of London (*).

T. CLIX, Seconde Partie; 1870.

Andrews (Th.). — *Sur la continuité des états gazeux et liquide de la matière.* (16 p.)

Guthrie (Fr.). — *Sur la résistance thermale des liquides.* (24 p.)

T. CLX; 1870.

Ferrers (N.-M.). — *Note sur la représentation proposée par M. Sylvester pour le mouvement d'un corps rigide libre, par celui d'un ellipsoïde dont le centre est fixe et qui roule sur un plan non poli.* (7 p.)

M. Sylvester a donné (*Philosoph. Transact.*, 1866) une extension importante de la représentation indiquée par Poinsot pour le mou-

(*) Voir *Bulletin*, p. 181.

vement d'un corps solide tournant librement, au moyen de l'ellipsoïde d'inertie. Il a prouvé que, si un ellipsoïde matériel, semblable à l'ellipsoïde d'inertie, et tel que ses moments d'inertie principaux A, B, C soient liés à ses demi-axes par la relation

$$Aa^4(b^2-c^2)+Bb^4(c^2-a^2)+Cc^4(a^2-b^2)=0,$$

est assujetti à rouler sur un plan parfaitement dépoli, le mouvement de cet ellipsoïde matériel sera exactement le même que celui de l'ellipsoïde d'inertie du corps solide, le plan dépoli tenant lieu du plan géométrique fixe, en contact avec lequel l'ellipsoïde d'inertie est supposé rouler. Il a aussi trouvé des expressions de la pression et du frottement de l'ellipsoïde contre le plan dépoli, en fonction de la vitesse angulaire de l'ellipsoïde, des longueurs de ses axes, et de la distance de son centre au plan dépoli. En cherchant directement les valeurs de ces forces, M. Ferrers a été conduit à une autre manière de traiter le problème, qui lui a fourni quelques théorèmes intéressants.

Perry (St.-J.). — *Sur l'état magnétique de l'ouest de la France en 1868.* (18 p.)

Cayley (A.). — *Mémoire sur la Géométrie abstraite.* (13 p.)

L'étude des quantités qui dépendent de deux ou de trois variables est considérablement éclaircie par la représentation de ces quantités par des points d'un plan ou de l'espace. Lorsqu'une quantité dépend de plus de trois variables, il est avantageux, pour la facilité de l'exposition, de conserver le langage géométrique, en concevant la quantité comme représentée par un point d'un espace de plus de trois dimensions. Un exemple important de ce cas se présente dans la Géométrie plane, à propos de la détermination du nombre des courbes qui satisfont à des conditions données. Les conditions impliquent des relations entre les coefficients de l'équation de la courbe; et, pour mieux comprendre ces relations, il est utile de considérer les coefficients comme les coordonnées d'un point dans un espace d'un nombre convenable de dimensions.

Crofton (M.-W.). — *Sur la preuve de la loi des erreurs des observations.* (13 p.)

L'objet de ce Mémoire est de donner la preuve mathématique, sous sa forme la plus générale, de la loi des erreurs d'observation

isolées, d'après l'hypothèse qu'une erreur, dans la pratique, provient de l'action concourante d'un grand nombre de sources d'erreurs indépendantes, dont chacune, si elle existait seule, produirait des erreurs extrêmement petites en comparaison de celles qui proviennent de toutes les autres sources combinées. Cette preuve est contenue dans un procédé général, proposé en vue d'un objet différent, savoir, dans la généralisation donnée par Poisson aux recherches de Laplace sur la loi des résultats moyens d'un grand nombre d'observations.

Airy (G.-B.). — *Note sur une extension de la comparaison des perturbations magnétiques avec les effets magnétiques conclus des courants galvaniques terrestres observés; et discussion des effets magnétiques conclus des courants galvaniques dans les jours de tranquillité magnétique.* (12 p.)

Sabine (Sir Edw.). — *Contributions au magnétisme terrestre.* — N° XII : *État magnétique des Iles Britanniques, réduit à l'époque* 1842-1845. (11 p.)

Rankine (W.-J.-M.). — *Sur la théorie thermodynamique des ondes d'une perturbation longitudinale finie.* (12 p.)

L'objet de ce travail est de déterminer les relations qui doivent exister entre les lois de l'élasticité d'une substance quelconque, gazeuse, liquide ou solide, et celles de la propagation ondulatoire d'une perturbation longitudinale finie dans cette substance; en d'autres termes, d'une perturbation consistant en déplacements des particules suivant la direction de la propagation, la vitesse de déplacement des particules étant assez grande pour n'être pas négligeable vis-à-vis de la vitesse de propagation. Le but spécial de ces recherches est de déterminer quelles conditions doivent être remplies, relativement au transport de la chaleur de particule à particule, pour qu'une perturbation longitudinale finie puisse se propager le long d'une masse prismatique ou cylindrique, sans perte d'énergie ni changement de *type*, le mot *type* étant employé pour désigner la relation entre l'étendue de la perturbation d'une série de particules, à un instant donné, et leurs positions non troublées respectives. La matière troublée peut être conçue, dans ces recherches, comme contenue dans un tube rectiligne de section uniforme et de longueur indéfinie.

SPOTTISWOODE (W.). — *Sur le contact des coniques avec les surfaces.* (20 p.)

On sait qu'en chaque point d'une surface on peut mener deux tangentes, appelées *tangentes principales,* qui ont avec la surface un contact du second ordre, c'est-à-dire d'un ordre plus élevé que n'est en général l'ordre de contact d'une droite et d'une surface. L'objet du présent Mémoire est d'établir le théorème correspondant, relativement aux coniques tangentes, savoir, qu'en chaque point d'une surface on peut mener dix coniques ayant avec la surface un contact du cinquième ordre, et qu'on peut appeler *coniques tangentes principales.*

ROSCOE (H.-E.). — *Sur la relation entre la hauteur du Soleil et l'intensité chimique de la lumière solaire totale par un ciel sans nuages.* (8 p.)

TYNDALL (J.). — *Sur l'action des rayons d'une grande réfrangibilité sur la matière gazeuse.* (33 p.)

GLAISHER (J.-W.-L.). — *Tables des valeurs numériques du sinus intégral, du cosinus intégral, et de l'exponentielle intégrale.* (22 p.)

Ces tables donnent, avec dix-huit, onze et sept décimales et trois ordres de différences, les valeurs des transcendantes

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \int_\infty^x \frac{\cos x}{x}\,dx, \quad \int_\infty^{-x} \frac{e^{-x}}{x}\,dx,$$

dont la dernière est connue aussi sous le nom de *logarithme intégral.* Le Mémoire est accompagné de figures représentant la marche de ces transcendantes, dont les maxima et minima sont donnés dans des tables auxiliaires. L'auteur indique plusieurs corrections aux tables des mêmes fonctions construites par Bretschneider.

WARREN DE LA RUE, B. STEWART et B. LOEWY. — *Recherches sur la physique solaire.* — N° II : *Positions et aires des taches observées à Kew en* 1864, 1865, 1866; *grandeur de la portion du disque visible du Soleil renfermant des taches, depuis le commencement de* 1832 *jusqu'en mai* 1868. (108 p.)

JEVONS (W.-St.). — *Sur les moyens mécaniques pour exécuter les opérations de raisonnement.* (22 p.)

STRUTT (J.-W.). — *Sur les valeurs de l'intégrale* $\int_0^1 Q_n Q_{n'} d\mu$,

Q_n et $Q_{n'}$ étant les coefficients de Laplace des ordres n et n', avec une application à la théorie de la radiation. (12 p.)

ROYSTON-PIGOTT (G.-W.). — *Sur l'application au microscope d'un chercheur pour les images aplanétiques, et sur ses effets pour augmenter le grossissement et la netteté des images.* (13 p.)

TIDSSKRIFT FOR MATHEMATIK. Udgivet af Camillo Tychsen (*).

T. VI, 1870.

STEEN (Ad.). — *Récréations mathématiques.* (2 art.; 28 p.)
Théorie mathématique de plusieurs tours de cartes.

SEIDELIN (C.). — *Démonstration de quelques propositions sur les permutations et les combinaisons. — Démonstration d'un théorème de stéréométrie.* (4 p.)

HANSEN (P.-C.-V.). — *Méthode de Cauchy pour l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre.* (3 art.; 28 p.)

ZEUTHEN (H.-G.). — *Nouvelles remarques sur les solutions singulières.* (7 p.)

L'auteur examine en particulier les difficultés qui peuvent se présenter lorsque, l'intégrale générale étant $F(x, y, C) = 0$, la solution singulière correspond au cas où le rapport $\frac{F'(x)}{F'(y)}$ se présente sous l'une des formes $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

LORENZ (L.). — *Sur la force centrifuge.* (3 p.)

Le mot de *force centrifuge* est pris dans deux acceptions : l'une, l'acception vulgaire, partant de l'idée d'une force qui *agirait* sur le corps animé d'un mouvement de rotation; l'autre, l'acception scientifique, qui considère cette force comme *émanant* du corps. La crainte de faire naître une équivoque entre ces deux significations a engagé, dans ces derniers temps, la plupart des auteurs à abandonner l'usage de cette expression. M. Lorenz est d'avis qu'on la conserve, mais en

(*) Voir *Bulletin*, p. 179. A partir de l'année 1871, la rédaction de ce Journal passe entre les mains de M. *H.-G. Zeuthen*, bien connu des lecteurs du *Bulletin*.

Enfin, si les cubiques gauches ont cinq points communs, elles sont sur un même hyperboloïde, mais les génératrices de l'un des systèmes qui sont sécantes doubles de l'une des cubiques coupent l'autre en un seul point. Les dix sécantes doubles communes sont ici les droites qui joignent deux à deux les cinq points communs aux deux courbes.

Pour démontrer ces résultats, M. Sturm emploie une méthode de transformation dans laquelle à une droite correspond une courbe du quatrième ordre à trois points doubles. Elle se détermine de la manière suivante : Si l'on a deux plans dans l'espace, une sécante double de la cubique gauche les coupe en deux points qui se correspondent.

Brill (A.). — *Sur le problème de la rotation des corps.* (8 p.; it.)

On sait que Jacobi a, par l'introduction des fonctions elliptiques, ramené les formules qui donnent la solution de ce problème à un haut degré de simplicité. Il a montré que les cosinus des angles que font les axes principaux du corps avec les axes coordonnés peuvent s'exprimer par des quotients des fonctions Θ. M. Brill donne une solution nouvelle de cette question, solution dont le caractère essentiel est d'éviter l'emploi des trois angles d'Euler qui dérangent nécessairement la symétrie des calculs.

Schramm (H.). — *Les invariants et les covariants en qualité de critères pour les racines d'une équation.* Suite d'un travail précédent, inséré au tome I, p. 259-279. (13 p.; fr.)

Le paragraphe III est consacré à la recherche d'une espèce d'invariants indiquant la coexistence de r groupes à s racines égales.

Dans le chapitre qui suit, on cherche de même des invariants servant à indiquer l'existence de plusieurs racines égales et imaginaires.

Le travail se termine par l'application des résultats généraux à quelques équations particulières.

Aoust (L'abbé). — *Théorie des coordonnées curvilignes quelconques.* (15 p.; fr.). Suite d'un travail précédent, inséré au tome II, p. 39.

Ce Mémoire traite surtout des relations relatives à la courbure. On y donne différentes expressions de la courbure d'une surface et plusieurs relations entre les courbures des courbes faisant partie du sys-

tème. Ces formules s'appliquent simplement au problème des surfaces applicables les unes sur les autres.

Roberts (Michael). — *Sur les fonctions abéliennes.* (10 p.; fr.)

Cette Note contient la démonstration d'un théorème général de Jacobi et son application au cas où le polynôme sous le radical est du cinquième degré.

Hermite. — *Sur l'expression des modules des transcendantes elliptiques en fonction du quotient des deux périodes.* (2 p.; fr.)

Hermite. — *Sur l'intégrale* $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}$. (1 p.; fr.)

Hermite. — *Sur la transcendante* E_n. (1 p.; fr.)

Ce dernier article se rapporte à l'évaluation de la transcendante de Bessel, lorsque n est un grand nombre.

Matthiessen (L.). — *Des figures d'équilibre et de la rotation des anneaux sidéraux homogènes sans corps central, et de leur changement par expansion ou par condensation.* (28 p.; lat.)

Voir au sujet de ce Mémoire la *Mécanique céleste,* livre III, § 44, et un travail antérieur du même auteur dans le *Zeitschrift für Mathematik und Physik,* t. X, p. 59; 1865.

Smith. — *Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques.* (52 p.; fr.)

Ce Mémoire très-important a été couronné par l'Académie de Berlin. Ce qui le distingue surtout des travaux précédents, c'est le soin que l'auteur a pris d'examiner les cas où quelques-uns des éléments géométriques deviennent imaginaires. Dans ce but, M. Smith commence par donner une théorie des couples des points imaginaires qu'il considère, à l'exemple de M. Chasles, comme les points doubles d'une involution et qu'il appelle des *dyades* de points; il considère aussi les dyades de droites formées de deux droites imaginaires conjuguées.

Dans la première partie du Mémoire, on examine les problèmes les plus simples, et l'on montre que, toutes les fois qu'une construction pourra s'effectuer avec la règle quand les points seront réels, il en sera de même quand les points seront imaginaires. C'est ainsi que l'on peut, étant donnés quatre couples de points imaginaires conju-

gués deux à deux, trouver, par l'emploi seul de la règle, le neuvième point commun à toutes les *cubiques* passant par les huit points des quatre couples ou dyades.

Dans la seconde partie du Mémoire, M. Smith suppose qu'une conique ait été complétement tracée, et il montre que tous les problèmes cubiques et biquadratiques peuvent se résoudre par l'unique emploi de la règle, du compas et de cette conique. Il donne une démonstration simple de cette proposition énoncée par Descartes de la manière suivante :

« Or, quand on est assuré que le problème proposé est solide, soit que l'équation par laquelle on le cherche monte au quarré de quarré, soit qu'elle ne monte que jusqu'au cube, on peut toujours en trouver la racine par l'une des trois sections coniques, laquelle que ce soit, ou même par quelque partie de l'une d'elles, tant petite qu'elle puisse être, en ne se servant au reste que de lignes droites et de cercles. Mais je me contenterai de donner une règle générale pour les trouver toutes par le moyen d'une parabole, à cause qu'elle en est en quelque façon la plus simple. » *Géométrie,* livre III (*Œuvres de Descartes*, édition Cousin, t. V, p. 419).

Dans la troisième partie, l'auteur examine quelques problèmes célèbres, le problème des normales aux coniques et le problème suivant qui était plus spécialement proposé par l'Académie :

Étant donnés treize des points d'intersection de deux courbes du quatrième ordre, trouver les trois autres.

L'auteur apprend à construire linéairement deux courbes du troisième ordre, ayant six points communs et passant par ces trois points. On est ainsi conduit au problème suivant :

Étant donnés six points communs à deux courbes du troisième ordre, déterminer les trois autres points communs,

dont la solution a été donnée par M. Chasles.

L'examen des cas particuliers de ces différents problèmes est fait de la manière la plus complète et la plus rigoureuse.

Schwarz (A.). — *Note sur la représentation conforme d'une aire elliptique sur une aire circulaire.* (5 p.; it.)

Schlaefli (L.). — *La résolvante de l'équation du cinquième degré mise sous la forme d'un déterminant symétrique à quatre lignes.* (4 p.; it.)

ZEUTHEN (H.-G.). — *Sur les singularités ordinaires d'une courbe gauche et d'une surface développable* (*). (44 p.; fr.)

SMITH. — *Appendice au Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques*. (25 p.; fr.)

SCHLAEFLI (L.). — *Sur le développement de la période imaginaire pour le cas où le module de la fonction elliptique est infiniment petit*. (6 p.; it.)

VOLPICELLI (P.). — *De la distribution électrique sur les conducteurs isolés*. (20 p.; it.)

Le but de ce Mémoire important est la démonstration du théorème suivant : Étant donné un système de corps conducteurs, contenant chacun une certaine quantité d'électricité, la distribution de l'électricité à leur surface ne peut se faire que d'une seule manière. *Voir* à ce sujet un Mémoire de M. Liouville : *Additions à la Connaissance des Temps pour l'an* 1845; — *Problèmes de Mécanique rationnelle* du P. Jullien; Paris, 1855; t. II, p. 334-340; — Urbanski (A.), *Vorträge über höhere Physik*; Lemberg, 1857, p. 115; — un Mémoire de M. G. Belli : *Memorie della Società italiana*, t. XXII, p. 111-209.

C'est dans le Mémoire de M. Volpicelli que se trouvent toutes ces indications.

DINI (U.). — *Sur un problème qui se présente dans la théorie générale de la représentation géométrique d'une surface sur une autre*. (25 p.; it.)

Dans un Mémoire publié aux *Annales de Tortolini*, t. VII, M. Beltrami a démontré que les seules surfaces susceptibles d'être représentées sur un plan de telle manière qu'aux lignes géodésiques correspondent les droites du plan sont les surfaces à courbure constante positive, nulle ou négative. Dans le travail actuel, M. Dini se propose d'étudier un problème plus général, qu'on peut énoncer ainsi :

Trouver toutes les surfaces qui peuvent être représentées sur une autre surface, de manière qu'à un point de l'une des surfaces corresponde un seul point de l'autre, et qu'à toute ligne géodésique de l'une des surfaces corresponde une ligne géodésique de l'autre.

Cette question est complétement résolue de la manière suivante :

Appelons avec l'auteur *conique géodésique*, respectivement aux courbes A et B, une courbe telle que la somme ou la différence des

(*) Voir *Bulletin*, p. 139.

normales géodésiques menées d'un de ses points aux deux courbes A et B soit constante. Appelons cette conique une *ellipse* quand c'est la somme des normales qui est constante, une *hyperbole* quand c'est la différence. Cela posé, on a le théorème suivant :

Si, sur un surface, il existe un double système de lignes formé d'ellipses et d'hyperboles géodésiques ayant les mêmes courbes de base, et étant isothermes en prenant ces lignes pour lignes coordonnées u et v, l'élément linéaire de la surface se réduira à la forme

$$ds^2 = (U - V)(U_1 du^2 + V_1 dv^2),$$

où U, U_1 sont des fonctions de u; V, V_1 des fonctions de v, et *vice versa*. Si les lignes u et v sont orthogonales et isothermes, et qu'en les prenant pour coordonnées, l'élément de surface prenne la forme précédente, ces lignes seront des ellipses et des hyperboles géodésiques par rapport à deux quelconques des courbes représentées par les équations

$$\int\sqrt{(U-h)U_1}\,du + \int\sqrt{(h-V)V_1}\,dv = \text{const.},$$
$$\int\sqrt{(U-h)U_1}\,du - \int\sqrt{(h-V)V_1}\,dv = \text{const.},$$

où les constantes du second membre sont arbitraires, et h est une constante telle, que $U - h$, $h - V$ soient positives pour les régions de surface que l'on considère, et les paramètres elliptiques ou hyperboliques de chaque courbe, c'est-à-dire la somme ou la différence constante des normales, seront respectivement

$$2\int\sqrt{(U-h)U_1}\,du - c - c', \quad 2\int\sqrt{(h-V)V_1}\,dv - c + c',$$

où c, c' sont les constantes des seconds membres des courbes de base, dans les équations précédentes.

En faisant usage de la proposition précédente et d'un théorème élégant dû à M. Tissot, l'auteur arrive à la solution complète du problème proposé. Signalons encore le théorème suivant :

Dans une transformation homographique générale, les lignes orthogonales de la première figure qui restent orthogonales dans la seconde sont des ellipses et des hyperboles homofocales qui se changent en ellipses et hyperboles homofocales, et l'axe des foyers imaginaires de ces coniques est dans chaque figure la droite qui correspond aux points à l'infini dans l'autre. Les axes des foyers réels sont les droites perpendiculaires aux axes précédents qui sont en même temps cor-

respondantes. Les foyers réels dans les figures sont des points correspondants, les foyers imaginaires correspondent aux points à l'infini sur le cercle dans l'autre figure.

Roberts (Michael). — *Sur les lignes de courbure d'un ellipsoïde.* (14 p.; fr.)

Cet article se rapporte à des lignes de courbure exceptionnelles, signalées pour la première fois par M. Roberts, et dont l'arc ne dépend que des intégrales elliptiques.

Riemann (B.). — *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la Géométrie.* Mémoire posthume, publié par R. Dedekind, et inséré dans le tome XIII des *Mémoires de la Société Royale de Gœttingue* (1867). Traduit de l'allemand par M. J. Hoüel. (18 p.; fr.)

Roberts (W.). — *Sur une intégrale double définie.* (4 p.; fr.)

Tardy (P.). — *Sur quelques théorèmes d'arithmétique.* (8 p.; it.)

Le but de cette Note est la démonstration de cinq théorèmes d'Eisenstein, énoncés au tome XXVII du *Journal de Crelle* (p. 281), dont il n'avait pas été publié de démonstration, quoique MM. Schaar (*) et Gennocchi (**) aient donné des théorèmes analogues.

Voir aussi un Mémoire de M. Stern, *Ueber einige Eigenschaften der Function* Ex (*Journal de Crelle-Borchardt*, t. LIX).

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, publiés par MM. les Secrétaires perpétuels (***).

T. LXX.

N° 6 (****). **Séance du 8 août 1870.**

M. Phillips. — *Relation entre les chaleurs spécifiques et les coefficients de dilatation d'un corps quelconque.*

M. d'Abbadie. — *Sur la division décimale du quadrant.*

(*) *Mémoire sur une formule d'Analyse* (*Académie royale de Belgique*, t. XXIII).

(**) *Note sur la théorie des résidus quadratiques*, t. XXV du même Recueil.

(***) Voir *Bulletin*, p. 201.

(****) Nous n'indiquons pas les séances dans lesquelles on n'a pas présenté de Mémoire sur les Mathématiques.

N° 7. Séance du 16 août 1870.

M. Serret, présente à l'Académie le tome V des *Œuvres de Lagrange*. Voici la liste des Mémoires que contient ce volume :

Théorie de la libration de la Lune et des autres phénomènes qui dépendent de la figure non sphérique de cette planète.

Théorie des variations séculaires des éléments des planètes. (Première et seconde Partie.)

Théorie des variations périodiques des mouvements des planètes. (Première Partie.)

Sur les variations séculaires des mouvements moyens des planètes.

Théorie des variations périodiques des mouvements des planètes. (Seconde Partie.)

Sur la manière de rectifier les méthodes ordinaires d'approximation pour l'intégration des équations du mouvement des planètes.

Sur une méthode nouvelle d'approximation et d'interpolation.

Sur une nouvelle propriété du centre de gravité.

Méthode générale pour intégrer les équations aux différences partielles du premier ordre lorsque ces différences ne sont que linéaires.

Théorie géométrique du mouvement des aphélies des planètes, pour servir d'addition aux Principes de Newton.

Sur la manière de rectifier deux endroits des Principes de Newton relatifs à la propagation du son et au mouvement des ondes.

Mémoire sur une question concernant les annuités.

Mémoire sur l'expression du terme général d'une série récurrente lorsque l'équation génératrice a des racines égales.

Mémoire sur les sphéroïdes elliptiques.

Mémoire sur la méthode d'interpolation.

Mémoire sur l'équation séculaire de la Lune.

Mémoire sur une loi générale d'optique.

Rapports.

M. Yvon Villarceau. — *Division décimale des angles et du temps.*

P. Secchi présente à l'Académie le volume qu'il vient de publier, intitulé *le Soleil*.

M. de Fonvielle. — *Sur les découvertes astronomiques des anciens.*

N° 8. Séance du 22 août 1870.

M. Morin. — *Note sur la première session de la Commission internationale du mètre, tenue à Paris du 8 au 13 août 1870.*

M. Newcomb. — *Sur les inégalités de la Lune dues à l'action des planètes.*

N° 9. Séance du 29 août 1870.

M. Boussinesq. — *Essai théorique sur les lois trouvées expérimentalement par M. Bazin, pour l'écoulement uniforme de l'eau dans les canaux découverts.*

N° 10. Séance du 5 septembre 1870.

M. Boussinesq. — *Note complémentaire au Mémoire sur les ondes liquides périodiques. Établissement de relations générales et nouvelles entre l'énergie interne d'un corps fluide ou solide, et ses pressions ou forces élastiques.*

M. Delaunay. — *Découverte d'une comète par M. Coggia.*

N° 11. Séance du 12 septembre 1870.

M. Faye. — *Sur la manière d'observer le prochain passage de Vénus par M. Simon Newcomb.*

Voici comment s'exprime M. Faye :

« M. S. Newcomb a bien voulu m'adresser, il y a quelques jours, une Notice lue par lui à la *National Academy of Sciences* (U. S.) sur le prochain passage de Vénus. J'ai pensé que l'Académie aimerait à avoir connaissance de ce travail, qui montre qu'on se préoccupe en Amérique de ce grand phénomène tout autant qu'en Europe. M. Newcomb a voulu contrôler sérieusement l'opinion qui, dans la bouche de Halley, a donné jadis un si grand crédit aux passages de Vénus. Dans son Mémoire sur l'observation du passage de Mercure à Sainte-Hélène, ce grand astronome déclare qu'il avait observé, à moins d'une seconde près, le contact intérieur de Mercure et du Soleil, et c'est sur ce haut degré de précision qu'il établit l'espoir d'arriver, par les passages de Vénus, à mesurer avec une exactitude extrême la distance de la Terre au Soleil.

» M. Newcomb a pris la peine de réduire au centre de la Terre toutes les observations du dernier passage de Mercure en novembre 1868, et il en a formé un tableau très-instructif dont j'extrais les nombres suivants :

Contact observé avec déformation de l'image.		Contact observé sans déformation de l'image.	
$21^h0^m - 2,4$	Le Verrier, inst.	$21^h0^m - 3,0$	Rayet.
$+ 4,0$	Stone.	$+ 1,5$	Liais.
$+ 4,7$	Dunkin.	$+ 4,9$	André.
$+ 11,3$	Criswick.	$+ 8,3$	Villarceau.
$+ 12,6$	Carpenter, inst.	$+ 11,4$	Wolf.
$+ 17,3$	Buckingham.	$+ 14,2$	Duner.
		$+ 29,6$	Pohl.

» J'ai exclu les observations où les bords des astres sont notés comme mal définis, et celles dont le caractère ne se range pas dans les deux colonnes ci-dessus. M. Newcomb a d'ailleurs tenu compte de l'ouverture et du grossissement, qui a beaucoup varié d'un observateur à l'autre; il en conclut qu'il n'existe aucune dépendance entre ces éléments et l'instant de l'observation.

» Il résulte clairement du ce tableau que Halley se faisait quelque illusion lorsqu'il se flattait d'avoir observé à 1 seconde près l'instant d'un phénomène identique. On voit aussi que la même incertitude existe, soit que le phénomène se présente avec le caractère géométrique de deux disques en contact, ou qu'il soit altéré par une certaine déformation des images.

» M. Newcomb conclut de là que l'observation du prochain passage de Vénus échouera si l'on se contente d'observer comme autrefois les contacts intérieurs. Il propose les mesures photographiques. L'Académie verra sans doute avec intérêt que, plus les astronomes approfondissent cette question, plus ils se rallient à l'emploi de la photographie. M. Newcomb n'y pressent qu'une difficulté, celle de déterminer exactement l'échelle angulaire des images, et il conseille, pour cela, aux observateurs l'emploi d'appareils parallactiques qui permettraient de photographier les Pléiades avant et après l'observation de Vénus (*). Mais il me semble, et c'est une suggestion que je soumets aux astronomes, qu'il existe un moyen bien plus simple et bien plus praticable, moyen que j'ai employé moi-même avec un plein succès. Il consiste à photographier plusieurs fois une même partie du disque solaire pendant qu'il passe dans le champ de la lunette immo-

(*) On sait que ce sont les astronomes des États-Unis qui sont parvenus les premiers à photographier les étoiles et même des systèmes stellaires tels que les Pléiades.

bile, et à enregistrer les instants, à $\frac{1}{100}$ de seconde près, par le télégraphe électrique. Les bords ou plutôt les petites taches du Soleil fournissent, sur ces images, des points de repère parfaits pour déterminer la valeur angulaire des parties de l'image. Le même procédé permettra d'étudier complétement les déformations dues au système optique dans toutes les directions, car il suffit de prendre d'autres empreintes d'une nouvelle série de positions du Soleil, après avoir fait tourner la lunette autour de son axe d'un angle de 90 degrés, par exemple.

» Ce dernier procédé, qui n'a été appliqué jusqu'ici qu'à l'occasion de l'éclipse de 1858, dans les ateliers de M. Porro, me semble préférable, pour l'étude du système optique, à celui qu'on a adopté dans le même but à l'Observatoire de Kew, dont les astronomes ont poussé si loin l'étude photographique des taches du Soleil. A Kew on s'est contenté, si je ne me trompe, de photographier une grande règle divisée placée à une certaine distance, ou un dôme éloigné dont les dimensions étaient exactement connues. »

N° 13. Séance du 26 septembre 1870.

M. Chapelas. — *Aurore boréale du 24 septembre 1870.*

N° 14. Séance du 3 octobre 1870.

M. Faye. — *Sur l'affût de l'amiral Labrousse.*

M. Bienaymé. — *Traduction de deux passages de Stobée inexpliqués jusqu'ici.*

N° 15. Séance du 10 octobre 1870.

M. Dupuy de Lôme donne lecture d'une *Note sur un projet d'aérostat dirigé,* Note dont l'impression sera réunie à celle d'une Communication qui doit la compléter.

N° 16. Séance du 17 octobre 1870.

M. Dupuy de Lôme. — *Projet d'aérostat dirigé, muni d'un propulseur.*

N° 17. Séance du 24 octobre 1870.

M. Dupuy de Lôme donne quelques développements complémentaires sur la construction de son aérostat.

M. Morin communique à l'Académie une pièce manuscrite attribuée à Monge, et relative au système aérostatique de Meusnier.

M. Janssen. — *Sur l'eclipse totale du 22 décembre prochain.*

N° 18. Séance du 31 octobre 1870.

M. Dupuy de Lôme. — *Deuxième et troisième Notes sur les aérostats dirigés, faisant suite à la Communication du 10 octobre.*

M. Meusnier. — *Mémoire sur l'équilibre des machines aérostatiques, sur les différents moyens de les faire descendre ou monter, et spécialement sur celui d'exécuter ces manœuvres sans jeter de lest et sans perdre d'air inflammable, en ménageant dans le ballon une capacité particulière destinée à contenir de l'air atmosphérique.*

Ce Rapport, ou projet de Rapport, écrit entièrement de la main de Monge, mais non signé, a été trouvé dans les archives du Conservatoire des Arts et Métiers. Cette pièce est celle dont il a été fait mention dans le *Compte rendu* de la séance du 24 octobre, p. 529.

M. S. Lie. — *Sur une transformation géométrique.*

Dans cette importante Note, se trouve énoncé un théorème capital, dont les conséquences seront très-nombreuses, il faut l'espérer :

Toutes les fois qu'on connaît les lignes de courbure d'une surface, on peut en déduire les lignes asymptotiques d'une autre surface.

Par exemple, on sait trouver les lignes de courbure des surfaces du quatrième ordre ayant le cercle de l'infini pour ligne double, on déduit de là *les lignes asymptotiques de la surface des ondes, et en général de la surface de Kummer.* Nous reviendrons sur ces propositions et sur d'autres analogues dues à M. Klein dans un article spécial.

M. Hachette. — *Sur les circonstances qui ont pu amener Monge à s'occuper des questions relatives aux aérostats.*

M. Chapelas. — *Aurores boréales des 24 et 25 octobre.*

M. Salicis. — *Aurore boréale du 24 octobre.*

M. A. Guillemin. — *Aurores boréales des 24 et 25 octobre.*

M. Chasles présente à l'Académie différents opuscules mathématiques.

N° 19. Séance du 7 novembre 1870.

M. Faye. — *Sur la déviation des projectiles à ailettes.*

N° 22. Séance du 28 novembre 1870.

M. Yvon Villarceau. — *Note sur les conditions des petites oscillations d'un corps solide de figure quelconque, et la théorie des équations différentielles linéaires.*

N° 24. Séance du 12 décembre 1870.

M. Faye. — *Sur l'expédition de M. Janssen.*

M. J. Moutier. — *Sur la formule de la vitesse du son.*

N° 25. Séance du 19 décembre 1870.

M. Faye. — *Sur l'art de pointer et ses conditions physiologiques.*

N° 26. Séance du 26 décembre 1870.

M. J. Moutier. — *Recherches sur l'état solide.*

M. Flammarion. — *Éclipse de soleil du 22 décembre 1870. Mesure de la variation de la lumière* (*).

MÉLANGES.

NOTE SUR UN MÉMOIRE DE M. DINI (**).

Dans ce Mémoire, inséré aux *Annali di Matematica*, M. Dini a été amené à étudier les figures homographiques dans le plan, et il énonce la proposition suivante :

Étant données deux figures homographiques dans le plan, les seules lignes orthogonales de la première figure qui restent orthogonales dans la

(*) Il importe de ne pas perdre de vue que nous n'avons à rendre compte que des travaux se rapportant aux Mathématiques. L'activité de l'Académie s'est portée pendant le siége de Paris sur des travaux intéressant particulièrement la défense. On pourra consulter à ce sujet un ouvrage de M. Grimaud de Caux : *L'Académie des Sciences pendant le siége de Paris.*

(**) Voir *Bulletin*, p. 376.

seconde sont des ellipses et des hyperboles homofocales qui se changent en hyperboles et en ellipses homofocales.

La lecture de ce théorème nous a amené à penser qu'il peut s'étendre à l'espace. Voici en effet la proposition analogue.

Considérons dans l'espace deux figures homographiques, et soient A et B les deux coniques qui correspondent au cercle de l'infini C considéré comme appartenant successivement à chacune des figures. Il est évident que la développable (A, C) circonscrite à A et à C correspondra à la développable (C, B) circonscrite à C et à B. Par suite, au système des surfaces homofocales ayant A pour focale, correspondra le système des surfaces du même ordre ayant pour focale B. Il est, du reste, facile de faire voir que le système *triple* orthogonal ainsi formé est le seul qui reste orthogonal après la transformation. En effet, si l'on se propose de déterminer trois directions passant par un point, telles que les trois directions correspondantes soient perpendiculaires, on trouve que le problème n'a qu'une seule solution. Mais il n'en est pas de même si l'on considère seulement deux systèmes orthogonaux : dans ce cas, la solution dépend de la résolution d'une équation aux dérivées partielles du second ordre; nous pourrons revenir sur ce problème dans une autre occasion, pour en dire quelques mots.

G. D.

NOTICE SUR LA VIE ET LES TRAVAUX DE N.-I. LOBATCHEFSKY.

Troisième article.

TRAVAUX GÉOMÉTRIQUES DE LOBATCHEFSKY.

M. Ianichefsky, professeur de Mathématiques à l'Université de Kazan, publie en ce moment une nouvelle édition des *Œuvres géométriques de N.-I. Lobatchefsky* (Геометрическія сочиненія Н. И. Лобачевскаго, Kazan, gr. in-4°). Cinquante-trois feuilles de ce volume ont déjà paru. Elles contiennent les Mémoires désignés dans notre précédent article (*) sous les n°s 2, 9, 11 et 12, rangés par ordre chronologique. Pour donner une idée de cet ensemble de recherches, nous suivrons de préférence l'ordre naturel des matières.

(*) Voir *Bulletin*, p. 324.

Le nom de Lobatchefsky est connu surtout, jusqu'à présent, par ses découvertes relatives à la théorie des parallèles. Il s'en faut de beaucoup cependant que les services rendus par lui à la science soient limités à cette question spéciale. On lui doit un Traité complet sur les fondements de la Géométrie, où il a présenté sous une forme neuve et originale les principes essentiels de la science de l'espace.

Ces principes, connus depuis plus de vingt siècles, ont été, par malheur, acceptés trop tôt comme évidents et immuables. L'exposition qu'en a donnée Euclide a paru tellement satisfaisante, qu'on ne s'est pas occupé de savoir s'il n'existait pas d'autres manières plus rationnelles de coordonner les vérités géométriques, et les esprits éminents, quand ils ont traité la question, l'ont plutôt considérée au point de vue métaphysique qu'au point de vue mathématique.

Cependant les travaux de Gauss, de Lobatchefsky, de J. Bolyai, de Riemann, de Helmholtz, et d'autres grands géomètres ont mis hors de doute qu'il reste quelque chose à faire sur ce sujet. Lors même qu'on ne serait pas encore parvenu au but désiré, lors même qu'on n'aurait pas encore découvert la méthode la plus scientifique et, par suite, la plus simple pour organiser l'enchaînement des vérités de la Géométrie, on ne devrait pas moins une vive reconnaissance à ces novateurs qui ont *remué des idées* et fait sortir cette question de l'état de stagnation où elle était restée pendant deux mille ans. Si à cette heure la solution n'est pas encore complète, on en possède du moins presque tous les éléments. La mise en œuvre des matériaux acquis serait une tâche bien digne de tenter l'ambition d'un géomètre habile, et l'utilité d'un livre fondé sur des bases vraiment rationnelles serait immense pour l'enseignement élémentaire, qui se trouverait ainsi délivré de tant de Traités reposant sur des conceptions fausses.

Nous allons essayer d'indiquer les principales modifications à la méthode ordinaire, proposées par Lobatchefsky dans son grand travail intitulé : Новыя начала Геометріи, съ полной теоріей параллельныхъ (*), et publié, comme nous l'avons dit dans un article précédent (**) dans les *Mémoires de l'Université de Kazan* pour les

(*) Nouveaux principes de Géométrie, avec une Théorie complète des parallèles, en six articles, comprenant 470 pages in-8°.

(**) *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*; 1870, p. 324.

années 1835-1838. Lobatchefsky n'emploie dans ce travail que les procédés habituels de la Géométrie élémentaire. Il cherche à réduire les axiomes au moindre nombre possible, et à faire ressortir le rôle que chacun d'eux joue séparément dans l'ensemble de la théorie.

L'ouvrage, divisé en treize Chapitres, est précédé d'une Introduction (30 pages), dans laquelle l'auteur discute les démonstrations du principe des parallèles, données par Legendre et par Bertrand (de Genève), et en démontre rigoureusement l'insuffisance. Nous reviendrons sur cette question, lorsque nous aurons vu ce que devient la Trigonométrie plane, tant qu'on n'a pas encore prononcé sur la question de l'axiome XI d'Euclide.

Le Chapitre Ier (16 pages), intitulé : *Premières notions de Géométrie,* traite des diverses manières dont un corps peut être divisé, et contient les définitions des surfaces, des lignes et des points. Lobatchefsky établit ces définitions de la manière même dont on y a été conduit par l'expérience. On parvient, par exemple, à l'idée de surface en amincissant indéfiniment un corps dans le voisinage de sa limite, et les propriétés des surfaces sont celles vers lesquelles convergent les propriétés d'un tel corps infiniment mince.

L'objet du Chapitre II (26 pages) est la démonstration de l'existence du plan et de la ligne droite, en partant d'un axiome unique : l'existence de la sphère.

Jusqu'à présent on avait admis comme première hypothèse de la Géométrie l'existence d'une suite continue de points, qui restent immobiles, lorsqu'un système solide dont ils font partie tourne autour de deux de ces points, supposés fixes; et l'ensemble de tous ces points immobiles forme une ligne, indéfinie dans les deux sens, et que l'on appelle *ligne droite.*

De la notion de la ligne droite on peut déduire celle du plan, lieu des positions d'une droite mobile qui glisse sur deux droites fixes partant d'un même point (*).

Mais la constatation expérimentale de l'immobilité de certains points d'un système rigide ne peut se faire qu'au moyen de mesures approximatives, et l'on ne peut jamais vérifier l'hypothèse en toute rigueur. A cette hypothèse, qui repose seulement sur une induction,

---

(*) *Voyez* une Note de M. Valeriani (*Giornale di Matematiche*, t. VII, décembre 1869).

Lobatchefsky et J. Bolyai (*) ont voulu en substituer une autre, n'empruntant à l'expérience que des relations de situation, toujours exactement vérifiables.

Étant admise la notion indéfinissable de la solidité, la distance de deux points A, B est dite *égale* à celle de deux autres points A', B', si l'on peut faire coïncider successivement les deux mêmes points d'un système solide d'abord avec A et B, puis avec A' et B'.

La sphère est le lieu des points équidistants d'un point fixe. C'est une surface simple et complétement fermée.

D'un centre donné on peut toujours décrire une sphère, et une seule, qui passe par un point donné.

Une sphère ne peut avoir qu'un seul centre.

Si, de deux centres fixes et avec une distance convenable, on décrit deux sphères égales, l'intersection de ces sphères est un *cercle*, ayant lès deux centres fixes pour *pôles*.

Le lieu des cercles décrits des mêmes pôles est une surface indéfinie, superposable à elle-même par retournement, et que l'on appelle *plan*.

Si l'on fait tourner un plan autour de deux de ses points, supposés fixes, il y a un ensemble de points qui restent immobiles (ou du moins qui reviennent sur eux-mêmes au bout d'une demi-révolution) ; ces points forment une ligne indéfinie dans les deux sens, que l'on appelle *la ligne droite*.

Deux droites qui ont deux points communs se confondent.

Une droite qui a deux points dans un plan y est située entièrement.

Deux plans qui ont trois points communs non en ligne droite se confondent.

On établit ensuite les propriétés fondamentales de la sphère, du cercle, du plan, de la ligne droite, les caractères des positions relatives de deux sphères ou de deux cercles, etc.

Si cet enchaînement de propositions pouvait s'établir d'une manière à la fois simple et rigoureuse, il n'est pas douteux que les principes de la Géométrie n'eussent ainsi acquis une base plus solide et plus indépendante des erreurs de l'expérimentation. Cette méthode

(*) *Kurzer Grundriss eines Versuchs u. s. w.* Maros Vásárhely, 1851.

conduirait en même temps plus directement à un grand nombre de propriétés des figures formées par des droites ou par des plans.

Il nous semble malheureusement que les déductions de Lobatchefsky et de J. Bolyai sont mêlées de suppositions qui nécessitent de nouveaux appels à l'expérience, et que, tout au plus, leur raisonnement démontre l'existence de la ligne droite *dans le plan*, mais non celle de la ligne droite *dans l'espace* (*). Nous laissons de côté la question de simplicité qui est d'un intérêt secondaire tant qu'il ne s'agit pas d'une application à l'enseignement élémentaire.

Il ne faut pas toutefois renoncer à l'idée de voir un jour les fondements de la Géométrie établis sur cette base d'une manière pleinement rigoureuse. Des tentatives récentes, encore inédites, dues à un géomètre qui a profondément étudié la question, nous font espérer une prochaine solution des difficultés qui restent encore à vaincre.

J. H.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Abbe (Cleveland). — The portable Transit-Instrument in the vertical of the Pole Star, translated from the original Memoir of W. Döllen. Washington, 1870.

Bardey (E.). — Quadratische Gleichungen mit den Lösungen. Gr. in-8. Leipzig, Teubner. 16 Ngr.

Baur (F.). — Lehrbuch der niedern Geodäsie. 2. Aufl. Gr. in-8. Wien, Braumüller. $3\frac{1}{3}$ Thlr.

Becker (E.). — Tafeln der Amphitrite. Mit Berücksichtigung der Störungen durch Jupiter, Saturn und Mars. Gr. in-4. Leipzig, Engelmann. $2\frac{2}{3}$ Thlr.

Becker (Fr.). — Die elementare Geometrie in neuer Anordnung. Programm der Realschule 2. Ordn. in Hanau. 39 S. In-4 mit 2 Taf. in qu.-Fol.

(*) *Voyez* la distinction que M. Beltrami a établie entre ces deux notions (*Saggio di interpretazione, ecc.* Giorn. di Mat.; t. VI, p. 285; *Essai d'interprétation*, etc. Annales de l'École Normale supérieure; t. VI, p. 253).

Berg (F.-W.). — Ueber die Berechnung der Störungen. Dissert. a. d. J. 1869. 72 S. In-8. Dorpat.

Bollettino meteorologico ed astronomico del Regio Osservatorio dell' Università di Torino. Anno IV, 1869.

Breen (Hugh). — On the Corrections of Bouvard's Elements of the Orbits of Jupiter and Saturn, 1868.

Bruhns (C.). — Bestimmung der Längendifferenz zwischen Berlin und Wien. Gr. in-4. Leipzig, Engelmann. 1 Thlr.

Brünnow (F.). — Lehrbuch der sphärischen Astronomie. 3. Ausgabe. Gr. in-8. Berlin, Dümmler. 4 Thlr.

Clebsch (A.). — Ueber die partiellen Differentialgleichungen, welchen die absoluten Invarianten binärer Formen bei höheren Transformationen genügen. Gr. in-4. Göttingen, Dieterich. 16 Ngr.

Clouth (F.-M.). — Tafeln zur Berechnung goniometrischer Coordinaten. Lex.-8. Halle, Nebert. $1\frac{2}{3}$ Thlr.

Coffin (J.-H.). — The Orbit and Phenomena of a Meteoric Fire-Ball, seen July 20, 1860. Washington, 1869.

Da Schio (A.). — Salita sull' Etna per la ecclisse totale del sole del 22 dicembre 1870. In-32, 24 p. Vicenza, tip. Paroni.

Dase (Zacharias). — Factorentafel für alle Zahlen der 7-8 Millionen, mit den darin vorkommenden Primzahlen. 1862-1865, 3 kl. Folio-Bande cartonirt. Hamburg, W. Mauke. Pr. 4 Thlr.

Denza (Fr.). — Le stelle cadenti dei periodi di novembre 1868 ed agosto 1869 osservate in Piemonte ed in altre contrade d'Italia. Torino, 1870.

Dietzel (C.-F.). — Leitfaden für den Unterricht im technischen Zeichnen. 3. Heft. Die Elemente der Perspective. 2. Aufl. Gr. in-8. Leipzig, Seemann. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Dronke (Ad.). — Julius Plücker, Professor der Mathematik und Physik an der Rhein. Friedrich-Wilhelms-Universität zu Bonn. Biographische Notizen. Gr. in-8. Bonn, Markus. $\frac{1}{6}$ Thlr.

Dunham's Multiplication and Division Tables, from One to Ten Mil-

lions, adapted to every calculation. Folio, 52 p. cloth. London, Wilson. 21 sh.

Garbich (N.). — Analytische Methode zur Berechnung der Sonnenfinsternisse, sowie aller anderen Occultationen. Gr. in-8. Triest, Schimpf. 1 Thlr.

Gauss (F.-G.). — Fünfstellige, vollständige, logarithmische und trigonometrische Tafeln. Zum Gebrauche für Schule und Praxis. Berlin, L. Rauh, 1870.

Green (George). — Mathematical Papers. Edited by *N.-M. Ferrers*. In-8, 346 p., cloth. London, Macmillan. 15 sh.

Hesse (O.). — Die Determinanten. Gr. in-8. Leipzig, Teubner. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Hind (J.-R.). — An Introduction to Astronomy. 3d edit. In-12. London, Bell and Daldy. 3 sh. 6 d.

Jacobi (C.-G.-J.). — Mathematische Werke. 3. Bd. Gr. in-4. Berlin, G. Reimer. 4 Thlr.

Klinkerfues (W.). — Theoretische Astronomie. Erste Abtheilung. Braunschweig, Vieweg, 1871.

Kretschmer (E.). — Beiträge zur Theorie der Flächen mit ebenen Krümmungslinien, welche gegebenen Bedingungen genügen. Gr. in-8. Frankfurt a. d. O., Harnecker und Co. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Main (R.). — Second Radcliffe Catalogue, containing 2386 Stars; deduced from Observations extending from 1854 to 1861, at the Radcliffe Observatory, Oxford; and reduced to the epoch 1860. Oxford, James Parker and Co., 1870.

Main (R.). — Results of Astronomical and Meteorological Observations made at the Radcliffe Observatory, Oxford, in the year 1867. Vol. XXVII. Oxford, James Barker and Co, 1870.

Meyerstein (M.). — Das Spectrometer. Ein neues Instrument zur Bestimmung der Brechungs- und Zerstreuungs-Verhältnisse verschiedener Medien, u. s. w. 2. Aufl. Göttingen, Deuerlich'sche Buchhandlung, 1870.

Möller (Axel). — Planet-och Komet-Observationer, anställda år 1868 på Lunds Observatorium. Lund, 1859.

Nautical-Magazine and Naval Chronicle for 1870. In-8. boards. London, Simpkin. 13 sh. 6 d.

Neumayer (G.). — Results of the Magnetic Survey of the Colony of Victoria, executed during the years 1858-1864. Mannheim, J. Schneider, 1869.

Pihl (O.-A.-L.). — Micrometric Examination of Stellar Cluster in Perseus. Christiania, B.-M. Bentzen, 1869.

Proctor (R.-A.). — A Star Atlas for the Library, the School, and the Observatory. 2d Edit. Folio. London, Longmans. 25 sh.

Proctor (R.-A.). — The Sun; Ruler, Fire, Light and Life of the Planetary System. With ten lithographic plates (seven coloured) and 107 drawings on woods. Post-8, 504 p., cloth. London, Longmans. 10 sh. 6 d.

Repertorium für Meteorologie. Herausgegeben von der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Redigirt von Dr. *Heinrich Wild*, Mitglied der Akademie und Director des physikalischen Central-Observatoriums. Band 1, Heft I. St. Petersburg, 1869.

Rollwyn (J.-A.-S.). — Astronomy simplified for General Reading; with numerous new Explanations and Discoveries in Spectrum Analysis, etc. In-8, 420 p., cloth. London, Tegg. 10 sh. 6 d.

Schiaparelli (G.-V.). — Alcuni risultati preliminari tratti delle osservazioni di Stelle cadenti, pubblicate nelle Effemeridi degli anni 1868, 1869, 1870.

Schubert (E.). — Tables of Harmonia. Washington, 1869.

Stürmer (C.-M.). — Argumententafeln zu den von P.-A. Hansen construirten ecliptischen Tafeln. Gr. in-8. Landshut, Krüll. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Tables to facilitate the Reduction of Places of the Fixed Stars. Prepared for the Use of the American Ephemeris and Nautical Almanac. Washington; Bureau of Navigation, Navy Department; 1869.

Tschermak (G.). — Ueber den Meteoriten von Goalpara und über die leuchtende Spur der Meteore (Abd. a. d. Sitzb. d. Ak.). Lex.-8. Wien, Gerold. 4 Ngr.

Versluys (J.). — Leerboek der stereometrie. Gr. in-8, 7 en 160 bl. Groningen. Noordhoff. 2 fl. 25 c.

Weyer (G.-D.-E.). — Vorlesungen über nautische Astronomie. Gr. in-8. Kiel, Schwers. 1 Thlr.

Wild (H.). — Repertorium für Meteorologie. Herausgegeben von der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Bd. I, Heft 1. St. Petersburg, 1869.

Wochenschrift für Astronomie, Meteorologie und Geographie. Redigirt von *Heis*. Neue Folge. 14. Jahrgang, 1871. N° 1. In-8. Halle, Schmidt. pro complet 3 Thlr.

Wöckel (L.). — 850 Konstrucktions-problemer. Efter 9^e^ upplagan öfversätt af C. U. Dieterich. In-12, 154 sid. Stockholm, Fahlstedt. 1 rd.

Worpitzky. — Beiträge zur Functionentheorie. Gr. in-8. Berlin, Calvary und Co. 12 Ngr.

Wolf (R.). — Die Erfindung des Fernrohrs und ihre Folgen für die Astronomie. Vortrag. Gr. in-8. Zürich, Schulthess. 9 Ngr.

Wolf (R.). — Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie u. Astronomie. 1 Bd., 2 Lfg. Ebendas. 1 Thlr. 6 Ngr.

Wolf (R.). — Matériaux divers pour l'histoire des Mathématiques. In-4; 32 p. 1 planche. Roma, tip. delle Scienze matematiche e fisiche.

Young (Fr. and J.-R.). — Euclid's Elements of Geometry. Books 1, 2 and 3. With Notes, Explanatory Remarks, etc. In-18, cloth. London, Routledge. 1 sh.

Zelewski (A.-V.). — Ein Beitrag zur Theorie der Determinanten. Gr. in-8. Breslau, Goerlich und Coch. 8 Ngr.

Zeuner (G.). — Abhandlungen aus der mathematischen Statistik. Gr. in-8. Leipzig, Felix. 2 Thlr.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TABLE ANALYTIQUE

DES MATIÈRES.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

Pages.

SERRET (Paul). — Géométrie de direction 9
CASORATI (F.). — Teorica delle funzioni di variabili complesse. Volume I 19
BERTRAND (J.). — Traité de calcul différentiel et de calcul intégral (Calcul intégral, 1re partie) 41
DURÈGE (H.). — Theorie der elliptischen Functionen 49
SALMON (G.), traduit par *Bazin*. — Leçons d'Algèbre supérieure 54
PLÜCKER (J.). — Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement 73
BALTZER (R.). — Die Elemente der Mathematik. I. Band 80
BRIOT (Ch.). — Théorie mécanique de la chaleur 85
VALSON (C.-A.). — La vie et les travaux du baron Cauchy 105
HANKEL (H.). — Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen 117
HOFFMANN (L.) und NATANI (L.). — Mathematisches Wörterbuch 137
ZEUTHEN (H.-G.). — Sur les singularités ordinaires d'une courbe gauche et d'une surface développable 139
PAINVIN (L.). — Discussion de l'intersection de deux surfaces du second ordre ... 157
PAINVIN (L.). — Note sur la transformation homographique 159
CHRISTOFFEL (E.-B.). — Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke 169
BREMIKER (C.). — Nouveau Manuel de logarithmes à 7 décimales pour les nombres et les fonctions trigonométriques 171
WIENER (C.). — Épreuves stéréoscopiques du modèle d'une surface du troisième ordre à 27 droites réelles 175
OPPOLZER (Th.). — Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten. I. Band 201
MANSION (P.). — Théorie de la multiplication et de la transformation des fonctions elliptiques 206
CREMONA (L.). — Preliminari di una Teoria geometrica delle Superficie 233
DILLNER (G.). — Grunddragen af den geometriska kalkylen 249

Pages.
FORTI (A.). — Tavole dei logaritmi de' numeri e delle funzioni circolari ed iperboliche ... 265
MANNHEIM (A.). — Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable. Nouvelle méthode des normales. Applications diverses ... 297
KLINKERFUES (W.). — Theoretische Astronomie. I. Abtheilung ... 302
HESSE (O.). — Die Determinanten, elementar behandelt ... 303
SANNIA (A.) e D'OVIDIO (E.). — Elementi di Geometria. 2ª edizione ... 329
SPITZ (C.). — Erster Cursus der Differential-und Integralrechnung ... 331
MAYR (A.). — Construction der Differenzial-Gleichungen aus partikularen Integralen ... 361

MÉLANGES.

HESSE (O.). — Des relations analytiques entre six points situés sur une conique... 33
HOÜEL (J.). — Notice sur la vie et les travaux de N.-I. Lobatchefsky..... 66, 324, 384
IMCHENETSKY (V.). — Étude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes. (*Introduction.*) ... 164
Cours de la Faculté des Sciences de Paris pendant le second semestre ... 166
Funérailles de M. Lamé : Discours de MM. Bertrand, Combes et Puiseux ... 189
Cours de Mathématiques du Collége de France pendant le second semestre de l'année 1869-1870 ... 196
Extrait d'une lettre de M. O. Hesse ... 196
Communications de MM. Catalan, Mannheim et Gilbert ... 197
GABRIEL LAMÉ. Liste de ses travaux et des fonctions qu'il a occupées ... 224
Sur les lignes asymptotiques des surfaces gauches ... 228
ACADÉMIE DES SCIENCES. Concours de l'année 1869. Séance publique du 11 juillet 1870. Prix décernés et proposés pour les Sciences mathématiques ... 254
HERMITE. — Sur l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{\sin\alpha\, dx}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$ ... 320
DARBOUX (G.). — Sur les systèmes linéaires de coniques et de surfaces du second degré ... 348
DARBOUX (G.). — Note sur un Mémoire de M. Dini ... 383
BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE : Liste d'ouvrages nouvellement parus, 38, 71, 104, 167, 199, 230, 264, 358 et 388

RECUEILS ACADÉMIQUES ET JOURNAUX DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS LE BULLETIN.

Abhandlungen der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag. 6. Reihe, I. Bd ... 99
Acta Societatis scientiarum Fennicæ. Helsingforsiæ. T. VII-VIII ... 274
Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, publiées par M. Pasteur. T. VI ... 27
Annali di Matematica pura ed applicata, diretti da F. Brioschi e L. Cremona. T. I-III ... 311, 370
Archiv der Mathematik und Physik; herausgegeben von J.-A. Grunert. T. L-LI. 100, ... 248, 27
9

Pages.

Astronomische Nachrichten, gegründet von H. C. Schumacher, herausgegeben von C.-A.-F. Peters. T. LXXIII-LXXVII 87, 280, 363

Bulletin de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg. T. XIII-XIV.. 240

Bulletins de l'Académie royale des Sciences de Belgique. Bruxelles. T. XXVII-XXVIII. 281

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche; pubblicato da B. Boncompagni. T. II 98

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Année 1870. T. LXX-LXXI 29, 63, 154, 211, 316, 334, 377

Forhandlinger ved de Skandinaviske Naturforskeres tiende Möde. Christiania, 1868. 282

Giornale di Matematiche, pubblicato da G. Battaglini. T. VII-VIII. 152, 219, 286, 297, 331

Journal de l'École Polytechnique. T. XXVI, 43e cahier 269, 297

Journal de Mathématiques pures et appliquées; publié par J. Liouville. 2e série, t. XIV 91

Journal für die reine und angewandte Mathematik. Herausgegeben von C.-W. Borchardt. T. LXII 24

Kongliga Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Stockholm. Ny följd. T. V-VI 242

Mathematische Annalen, herausgegeben von A. Clebsch und C. Neumann. Bd. I.. 124

Memoirs of the Astronomical Society of London. T. XXXVII 238

Memoirs of the Literary und Philosophical Society of Manchester. 3d series. T. II-III. 162

Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna. Serie seconda. T. VII-VIII 219

Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Jahrgang 1869 187

Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts Universität zu Göttingen. 1868-1869 238

Nova Acta regiæ Societatis scientiarum Upsaliensis. Series IIIa. T. VI 247

Ofversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens förhandlingar. Stockholm T. XXII-XXV 245

Philosophical Transactions of the Royal Society of London. T. CLVII-CLX... 181, 365

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. T. XI 215

Proceedings of the Royal Irish Academy. Dublin. T. VIII-X 306

Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Milano. T. II...... 188

Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. T. LVIII-LX 208

Société des Sciences naturelles du grand-duché de Luxembourg. T. X 304

Tidskrift för matematik och fysik, utgifven af G. Dillner, F.-W. Hultman och T.-R. Thalén. Årgång II-III 177, 295

Tidsskrift for Mathematik. Udgivet af C. Tychsen. 2. Række. T. V-VI...... 179, 369

Transactions of the Cambridge Philosophical Society. T. XI 215

Transactions of the Royal Irish Academy. Dublin. T. XXIII-XXIV 306

Transactions of the Royal Society of Edinburgh. T. XV 159

Verslagen en mededeelingen der koninglijke Akademie van Wetenschappen. Amsterdam. 2de Reeks. Deel III 186

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Leipzig. Bd. V 289

Zeitschrift für Mathematik und Physik. Herausgegeben von O. Schlömilch, E. Kahl und M. Cantor. Bd. XIV-XV 59, 27

TABLE DES MÉMOIRES ET OUVRAGES

PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

ALGÈBRE.

Théorie des équations. — Substitutions.

Pages.

ADAMS (J.-C.). — Note sur la décomposition en facteurs de

$x^n + \frac{1}{x^n} - 2\cos n\alpha$ 218

AIRY (G.-B.). — Sur la décomposition en facteurs du trinôme

$x^n - 2\cos n\alpha + \frac{1}{x^n}$ 218

BALTZER (R.). — Die Elemente der Mathematik. I. Bd. 3. Aufl 80

BAUR (C.-W.). — Résolution d'un système d'équations, l'une quadratique, les autres linéaires.... 60

— Résolution d'un système d'équations, dont l'une est quadratique et les autres linéaires........... 62

BJÖRLING (C.-F.-E.). — Sur la condition de réalité des racines des équations algébriques........... 247

BRIOSCHI (Fr.). — Des substitutions de la forme

$\theta(r) \equiv \varepsilon\left(r^{n-1} + ar^{\frac{n-3}{2}}\right)$,

pour un nombre n premier de lettres........................ 239

— Solution générale de l'équation du cinquième degré 313

CAYLEY (A.). — Sur la solution de l'équation quartique $\alpha U + 6\beta H = 0$. 126

— Addition au Mémoire sur la résultante d'un système de deux équations 183

— Sur les conditions d'existence de rois racines égales ou de deux couples de racines égales dans une quartique ou une quintique binaire......................... 184

DAUG. — Sur les équations du troisième degré.................... 177

GRASSMANN (H.). — Résolution élémentaire de l'équation générale du quatrième degré............. 249

HULTMAN (F.-W.). — Théorie des puissances..................... 296

ISÉ (E.). — Note sur la résultante de deux équations................ 219

JANNI (G.). — Méthode pour calculer, par des approximations successives certaines, les racines réelles des équations algébriques. 287

JANNI (V.). — Décomposition d'une équation du quatrième degré entre deux variables en deux facteurs rationnels du deuxième degré.... 152

JORDAN (C.). — Théorèmes sur les équations algébriques........... 92

— Commentaire sur Galois........ 128

— Sur les équations de la division des fonctions abéliennes 136

— Sur la division des fonctions hyperelliptiques.................. 215

— Mémoire sur les groupes de mouvements 315

JUNG (G.) et ARMENANTE (A.). — Sur une équation du huitième degré. 153

KINKELIN (H.). — Nouvelle démonstration de l'existence des racines complexes dans une équation algébrique 135

KIRKMAN (Th.). — Sur les groupes non modulaires................ 163

KÖNIGSBERGER. — Rectification d'un

Pages.

théorème d'Abel concernant les fonctions algébriques 128
Köttritzsch (Th.). — Sur la résolution d'un système d'un nombre infini d'équations linéaires 275
Minding (F.). — Sur la loi de formation des dénominateurs et des numérateurs dans la réduction des fractions continues en fractions ordinaires 240
Montucci. — Sur la méthode de Gauss pour l'abaissement des équations trinômes............. 65
Morgan (A. de). — Sur l'infini et le signe d'égalité.................. 216
Pellet. — Sur les fonctions irréductibles suivant un module premier et une fonction modulaire 64
Petersen (J.). — Quelques remarques sur la théorie des équations. 181
Regis (D.). — Sur le nombre des racines réelles que peut avoir l'équation $x^m - px + q = 0$..... 332
Roberts (M.). — Note sur les équations du cinquième degré....... 312

Pages.

— Sur l'expression la plus simple de certaines fonctions des différences des racines d'une équation du cinquième degré............ 315
Schlaefli (L.). — La résolvante de l'équation du cinquième degré mise sous la forme d'un déterminant symétrique à quatre lignes. 374
Sylow. — Remarques sur le caractère de résolubilité d'une équation algébrique au moyen de radicaux, lorsqu'elle est irréductible, et que son degré est un nombre premier. 285
Trudi (N.). — Sur la forme quadratique des facteurs irréductibles d'une équation binôme......... 315
Tychsen (C.). — Rectification relative à un Mémoire d'Abel....... 179
Vecchio (A.). — Sur les équations transcendantes................. 152
Young (J.-R.). — Sur les racines imaginaires des équations numériques, avec un examen et une démonstration de la règle de Newton 311

Déterminants.

Hesse (O.). — Die Determinanten, elementar behandelt............ 303
Lucas (F.). — Sur une formule d'analyse........................... 320
Neumann (C.). — Sur la théorie des déterminants fonctionnels....... 129
Unferdinger (Fr.). — Différentes manières de mettre le produit $(a^2+b^2+c^2+d^2)\ldots \times (a_{n-1}^2+b_{n-1}^2+c_{n-1}^2+d_{n-1}^2)$ sous la forme d'une somme de quatre carrés.................. 210
Versluys (J.). — Applications nouvelles des déterminants à l'Algèbre et à la Géométrie............... 100
— Applications nouvelles des déterminants à la Géométrie......... 249

Théorie des formes homogènes.

Battaglini (G.). — Sur les formes ternaires quadratiques (première Partie).................. 220, 286
Bessel (A.). — Sur les invariants des systèmes simples de formes binaires simultanées............. 129
Brioschi (Fr.). — Des discriminants des formes binaires du sixième degré......................... 313
Clebsch (A.) et Gordan (P.). — Sur la théorie des formes cubiques ternaires......................... 126
— Sur les formes biternaires des variables contragrédientes....... 132
— Sur la représentation typique des formes binaires............... 312
Gordan (P.). — Invariants des formes binaires pour des transformations de degré supérieur............. 26
— Sur les formes ternaires du troi

Pages.
sième degré 127
— Applications du « Mémoire sur la représentation typique des formes binaires » aux équations modulaires de la transformation du cinquième ordre 314
— Application de quelques résultats contenus dans le Mémoire « Sur la représentation typique des formes binaires des cinquième et sixième degrés » aux intégrales hyperelliptiques 316
HARBORDT (F.). — Le système simultané d'une forme biquadratique et d'une forme quadratique binaire 129
SALMON (G.). — Leçons d'Algèbre supérieure (traduction par M. Bazin). 54
SCHRAMM (H.). — Les invariants et les covariants en qualité de critères pour les racines d'une équation 313, 372
SMITH (H.-J.-St.). — Sur les ordres et les genres de formes quadratiques ternaires 181

ARITHMÉTIQUE.

Théorie des nombres.

BOUNIAKOVSKY (M.). — Sur quelques formules qui résultent de la combinaison des résidus quadratiques et non quadratiques des nombres premiers 240
CALZOLARI (L.). — Nouvelle solution générale en nombres rationnels de l'équation $W^2 = a + bv + cv^2$.... 153
— Recherche des valeurs rationnelles de v qui rendent le polynome $a + bv + cv^2 + dv^3 + ev^4$ un carré parfait 154
— Solution générale de l'équation $y^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$.............. 154
— Note sur l'équation

$$u^2 = A x^2 \pm B y^2 \ldots\ldots\ldots$$ 220

CANTOR (G.). — Systèmes simples de numération 60
— Sur une décomposition des nombres en produits infinis 60
CURTZE (M.). — Notes diverses sur la série de Lambert et sur la loi des nombres premiers 313
GENOCCHI (A.). — Sur quelques formes de nombres premiers 315
HULTMAN (F.-W.). — Histoire de l'Arithmétique en Suède. 177, 178, 295
LE BESGUE (V.-A.). — Démonstration de la méthode de Jacobi pour la formation de la période d'une racine primitive 336
LIOUVILLE (J.). — Sur les nombres entiers de la forme $12k + 5$..... 91
— Nouveau théorème concernant la fonction numérique $F(k)$....... 95
— Extrait d'une lettre à M. Besge. 91, 96
— Théorème concernant la fonction numérique $\rho_2(n)$............ 96
— Remarque au sujet de la fonction $\zeta_1(n)$ qui exprime la somme des diviseurs de n.............. 96
— Sur la forme ternaire

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 \ldots\ldots\ldots$$ 97

POLLOCK (sir Fr.). — Sur les mystères des nombres auxquels Fermat fait allusion (deuxième Communication) 184
SARDI (C.). — Théorèmes d'arithmétique relatifs aux fractions décimales périodiques 152
— Sur les sommes des diviseurs des nombres 153
— Sur quelques séries; application à l'Arithmétique 154
SEELING (P.). — Diverses propositions de la théorie des nombres . 100
STERN (A.). — Résidus quadratiques, trigonaux et bitrigonaux......... 26
— Sur un théorème de Gauss (relatif à la théorie des nombres)...... 239
TARDY (P.). — Sur quelques théorèmes d'Arithmétique 377
UNFERDINGER (Fr.). — Sur les caractères de divisibilité des nombres. 210
VECCHIO (A.). — Sur les proportions et les progressions 152
VITO (E.). — Démonstration d'un théorème de la théorie des nombres 288

ASTRONOMIE THÉORIQUE. — ÉPHÉMÉRIDES.

Pages.
Argelander (Fr.). — Sur les étoiles observées par Piazzi, mais non insérées dans son nouveau Catalogue ... 90
— Sur la dépendance entre les déclinaisons et les grandeurs des étoiles ... 280
— Catalogue des aurores boréales observées aux observatoires d'Åbo et de Helsingfors, pendant les années 1823-1837 ... 274
Åstrand (J.-J.). — Méthode simple d'approximation pour les déterminations du temps et de la longitude ... 246
Auwers. — Sur la valeur de la constante de l'aberration, d'après les observations de Molyneux ... 187
Bach (M.). — Du passage de Vénus sur le disque du Soleil en 1874, et du calcul de la parallaxe du Soleil ... 29
Bourget (J.). — Sur le développement algébrique de la fonction perturbatrice ... 66
Bruhns (H.). — Sur les corrections des éléments de Jupiter et de Saturne, données par Bouvard (1821) ... 89
Brothers (A.). — Catalogue d'étoiles binaires, avec des remarques préliminaires ... 163
Celoria (G.). — Détermination de l'orbite de Clytie ... 90
Challis. — Sur la théorie de la constante de l'aberration ... 89
Deike (C.). — Éléments et éphémérides de Thisbé pour l'apparition de 1870 ... 280
Delaunay (Ch.). — Constitution physique de la Lune ... 30
— Rapport sur les recherches de M. Puiseux sur la Lune ... 30
Falb (R.). — La comète de Halley et ses météorites ... 88
Faye. — Sur la manière d'observer le prochain passage de Vénus, par M. E. Newcomb ... 379
— Sur l'expédition de M. Janssen. 383
Flammarion (C.). — Loi du mouvement de rotation des planètes ... 157
— Réponse à une observation relative à la loi du mouvement de rotation des planètes ... 213
De Fonvielle. — Sur les découvertes astronomiques des anciens ... 378
Gould (B.-A.). — Comparaison des positions des catalogues de Poulkova et de Gould ... 281
Haughton (S.). — Discussion des observations de marées faites sous la direction de l'Académie Royale d'Irlande en 1850-1851 ... 306
— Sur les marées semi-diurnes des côtes d'Irlande ... 308
— Sur un moyen graphique pour calculer la dérive d'un navire par la marée de la mer d'Irlande ... 309
Hoek (M.). — Sur la différence entre les constantes d'aberration de Delambre et de Struve ... 88
Kayser (E.). — Etude de la Lune au point de vue de la forme ellipsoïdale ... 88
Gyldén (H.). — Sur une méthode pour représenter les perturbations d'une comète par des expressions rapidement convergentes ... 241
Klinkerfues (W.). — Sur la détermination des orbites ... 90
— Recherches sur le mouvement de la Terre et du Soleil dans l'éther ... 281
— Theoretische Astronomie, I. Thl. 302
Krueger (A.). — Sur la parallaxe de l'étoile n° 17415 d'Oeltzen ... 274
— Recherches sur l'orbite de la planète Thémis, avec une nouvelle détermination de l'attraction de Jupiter ... 27
— Sur la parallaxe de l'étoile LL 21258 ... 274
Laussedat. — Applications de la méthode graphique à la prédiction des éclipses de Soleil ... 33
Lehmann (W.). — Éléments des orbites des huit planètes principales pour janvier 1, 1800, avec leurs perturbations du premier et du second ordre ... 88

Pages.

Ligowski. — Sur la réduction des distances lunaires au moyen des logarithmes à quatre décimales, et sans l'emploi de tables auxiliaires..................... 280
Linsser (C.). — Éphéméride pour la recherche de la comète périodique de Winnecke (1858, II), à son retour en 1869................. 240
Littrow (K. von). — Dénombrement des étoiles boréales du Catalogue de Bonn, d'après leurs grandeurs..................... 210
Marth (A.). — L'éclipse de Lune du 12 juillet 1870.................. 281
Martin (Ad.). — Méthode d'autocollimation de *L. Foucault*, son application à l'étude des miroirs paraboliques..................... 65
— Sur la méthode suivie par *L. Foucault*, pour reconnaître si la surface d'un miroir est rigoureusement parabolique............. 65
Matthiessen (L.). — Des figures d'équilibre et de la rotation des anneaux sidéraux homogènes sans corps central, et de leur changement par expansion ou par condensation..................... 373
Maywald. — Orbite et éphéméride de (97) Clotho 281
Möller (A.). — Perturbations générales de Pandore. 90
Newcomb (S.). — Aperçu d'une méthode directe et facile pour effectuer le développement de la fonction perturbatrice et de ses coefficients différentiels............. 65
— Sur une méthode très-précise pour déterminer les positions relatives des astres, du Soleil et de la Lune pendant une éclipse de Soleil presque centrale............... 364
— Sur les inégalités de la Lune dues à l'action des planètes.......... 378
Oltramare. — Sur l'existence d'une loi de répartition analogue à la loi de Bode (ou de Titius), pour chacun des systèmes de satellites de Jupiter, de Saturne et d'Uranus. 156
Oppolzer (Th.). — Sur la comète vue par Pons en février 1808..... 90
— Détermination définitive de l'orbite de la planète (59) Elpis..... 364
Parkes (W.). — Sur les marées à Bombay et à Kurrachee......... 185
Penny (W.-G.). — Sur le mouvement de rotation des corps célestes.... 113
Peters (C.-F.-W.). — Remarques sur le prochain passage de Vénus en 1874........................ 90
— Sur certains corps passant devant le Soleil...................... 88
— Découverte d'une nouvelle planète (112), et éléments de (111) Até. 364
Powalky. — Les phénomènes dans les contacts intérieurs de Vénus en 1769....................... 89
— Contribution pour une discussion plus complète des passages de Vénus, et détermination de quelques résultats plus exacts au moyen de ces passages.......... 363
Prey (A.). — Éléments et éphémérides de la planète (43) Ariadne. 280
Quesneville (G.). — Remarques relatives à une Note de M. C. Flammarion sur la loi du mouvement de rotation des planètes......... 212
Robinson (T.-R.) et Grubb (Th.). — Description du grand télescope de Melbourne.................... 185
Schmidt (J.). — Détermination des changements périodiques de la Comète II, 1861................ 88
— Points radiants et densité horaire des météores.................. 89
Schubert (E.). — Perturbations des coordonnées rectangulaires de Parthénope par Jupiter et Saturne... 89
— Éléments de Thalie, leurs perturbations par Jupiter, et Table pour la solution du problème de Kepler....................... 281
— Éléments d'Euphrosyne, leurs perturbations par Jupiter, et Table pour la solution du problème de Kepler....................... 364
— Éléments de Polyhymnie, leurs perturbations par Jupiter, et Table pour la solution du problème de Kepler....................... 365
Schulhof (L.). — Élément et éphéméride de (108) Hécube.......... 281
Schur (W.). — Sur la détermination de l'orbite de l'étoile double 70 d'Ophiuchus.................. 88
Seydler (A.). — Sur l'orbite de (106) Dioné....................... 281
Simon (Ch.). — Mémoire sur la rotation de la Lune (2e Mém.)...... 27

Pages.
STARK (J.-E.). — Éléments de la planète (108) Hécate 281
THALEN (R.).—Sur l'origine du temps et le jour de la semaine en différents lieux de la Terre 177
TIETJEN (F.). — Sur l'incertitude d'une détermination d'orbite par trois observations, lorsque celles-ci sont situées à peu près symétriquement sur un même grand cercle 88
UNFERDINGER (Fr.). — Sur quelques formules remarquables de trigonométrie sphérique 208
WACKERBARTH (A.-D.). — Théorie provisoire de Léda 247
WINNECKE (A.). — Observations, éléments et éphémérides de la comète I, 1870, avec des remarques sur la position géographique de Karlsruhe 281
— Éphéméride de la nouvelle comète observée 337

ASTRONOMIE PRATIQUE.

Analyse spectrale. — Observations stellaires.

ANGSTRÖM (A.-J.). — Recherches sur le spectre solaire 293
BAXENDELL (J.). — Observations sur la pluie météorique du 13-14 nov. 1866 163
— Observations sur la nouvelle étoile variable T de la Couronne.. 163
CHAPELAS. — Recherches sur les centres de moyenne position des étoiles filantes 157
— Aurore boréale du 24 septembre 1870 381
— Aurores boréales des 24 et 25 octobre 1870 382
DECHARME. — Aurore boréale observée à Angers 157
DELAUNAY (Ch.).—Découverte d'une petite planète à l'Observatoire de Marseille 212
— Découverte d'une comète, par M. Coggia 379
DEMBOWSKI. — Mesures micrométriques des étoiles doubles principales 280, 281, 364
ENGELMANN (R.). — Détermination de l'éclat de quelques étoiles du Ciel austral 364
FAYE. — Sur l'observation photographique des passages de Vénus et sur un appareil de M. Laussedat. 154
— Sur les procédés d'observation photographique proposés par M. Paschen, pour le prochain passage de Vénus 212
— Sur l'observation spectrale des protubérances solaires. (Travaux de Respighi) 212
FLAMMARION. — Éclipse de Soleil du 22 décembre 1870. Mesure de la variation de la lumière 383
GIBBS (W.). — Sur la construction d'une carte normale du spectre solaire 293
GUILLEMIN (A.). — Aurores boréales des 24 et 25 octobre 1870 382
HEELIS (Th.). — Observations sur la lumière zodiacale 163
HEIS. — Observations de la lumière zodiacale 33
— Observations d'aurores boréales. 33
— Observations de la lumière zodiacale en 1870 à Münster...... 364
HUGGINS (W.). — Nouvelles observations sur le spectre de quelques étoiles et de quelques nébuleuses, avec un essai pour déterminer, d'après cela, si ces corps se meuvent en s'approchant ou en s'éloignant de la Terre, et des observations sur les spectres du Soleil et de la Comète II, 1868 184
JANSSEN. — Sur l'éclipse totale du 22 décembre 1870 382
KNOTT (G.). — Sur l'étoile variable R du Petit Renard 163
LASSELL (W.). — Observations de planètes et de nébuleuses à Malte.
— Observations diverses faites à Malte avec l'équatorial de 4 pieds.
— Catalogue de nébuleuses nouvelles, découvertes à Malte avec l'équatorial de 4 pieds, en 1863-65. 238
LEPPIG (H.). — Observations des taches du Soleil, faites à l'Observatoire de Leipzig 90
LE VERRIER (U.-J.). — Présentation de Notes diverses sur l'aurore boréale du 5 avril 1870 157

Pages.

LIAIS (E.). — Observation du passage de Mercure sur le Soleil, à Atalaïa (Brésil) 88

LITTROW (K. VON). — Approches physiques des planètes (1) à (82) pendant la présente année 365

LOCKYER (J.-N.). — Observations spectroscopiques sur le Soleil (suite.) 186, 337

LOEWY (B.). — (*Voir* WARREN DE LA RUE) 185, 368

MATTHIESSEN (L.). — Grandeur apparente et absolue du Soleil 63

NEUMAYER (G.). — Sur la variation diurne de la déclinaison magnétique, eu égard spécialement à la déclinaison de la Lune 181

NYRÉN (M.). — Essai de détermination de la constante de la précession au moyen des étoiles de faible éclat 289

OPPOLZER (Th.). — Rapport sur l'Expédition autrichienne pour l'observation de l'éclipse totale de Soleil de 1868 à Aden. — VI. Coordonnées géographiques d'Aden... 211

OPPOLZER (Th.), WEISS et ŘIHA. — Rapports sur l'expédition autrichienne entreprise pour l'observation de l'éclipse totale de Soleil de 1868 à Aden (5 art.) 209

OUDEMANS (J.-A.-C.). — Observations de l'éclipse totale de Soleil du 18 août 1868 sur la côte est des Célèbes 88

OXMANTOWN (lord). — Compte rendu des observations de la Grande Nébuleuse d'Orion, faites à Birr-Castle avec des télescopes de 3 et de 6 pieds, de 1848 à 1867. 182, 290

PASCHEN. — Application de la photographie à l'observation des passages de Vénus sur le Soleil 91

PETERS (C.-A.-F.). — Sur les observations faites en 1869 à Altona et à Berlin, avec un pendule à réversion, construit par Lohmeier.. 281

PHILLIPS (J.). — Notices sur quelques parties de la surface de la Lune. 184

RAYET. — *Voir* WOLF (C.) 341

RIEFLER (J.). — Sur le prisme des passages 281

ROSCOE (H.-E.). — Sur la relation entre la hauteur du Soleil et l'intensité chimique de la lumière solaire totale par un ciel sans nuage. 368

Pages.

ROSÉN (P.-G.). — Études faites à l'aide d'un astro-photomètre de M. Zöllner 241

— Recherches et mesures exécutées avec un astro-photomètre de Zöllner 292

SALICIS. — Aurore boréale du 24 octobre 1870 382

SAVITCH (A.). — Observations des planètes Saturne et Neptune en 1867 à l'Observatoire académique de Saint-Pétersbourg 240

SAVITCH (M.). — Observations faites à l'Observatoire astronomique de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg 241

SCHMIDT (J.-F.-J.). — Observations du Soleil en 1870 à l'Observatoire d'Athènes 365

— Observations d'étoiles variables à l'Observatoire d'Athènes 365

SCHÖNFELD. — Sur les changements d'éclat des étoiles variables 87

— Table des variations d'éclat de δ de la Balance 89

— Études sur la variation de β de la Lyre et de δ de Céphée 90

— Contribution à l'étude des variations d'éclat des étoiles changeantes 364

SECCHI (A.). — Constitution de l'auréole solaire, et tubes de Geissler. 30

— Sur le déplacement des raies observées dans le spectre solaire.... 334

— Sur les spectres d'étoiles 88

— Nouvelles remarques sur les spectres fournis par divers types d'étoiles 344

SONREL. — Étude photographique du Soleil à l'Observatoire de Paris.. 344

SPÖRER. — Observations des taches du Soleil 87, 90, 280, 364

STÉPHAN (E.). — Positions moyennes pour 1870 de nébuleuses nouvelles 363

STEWART (Balfour). — *Voir* WARREN DE LA RUE 185, 368

STRUVE (O.). — Observation spectrale d'une aurore boréale 240

— Réapparition de la comète de Winnecke, et découverte de quelques nouvelles nébuleuses 242

TIETJEN (F.). — Observations spectroscopiques du Soleil 89

WARREN DE LA RUE (B.), STEWART et LOEWY (B.). — Recherches sur la physique du Soleil. Positions hé-

Pages.
liographiques et aires des taches solaires observées au photohéliographe de Kew, en 1862 et 1863.. 185
— Recherches sur les physiques solaires. N° II : Positions et aires des taches, etc.................. 368
Weiss (E.). — Rapport sur l'Expédition autrichienne pour l'observation de l'éclipse totale de Soleil de 1868 à Aden. — VII. Observations d'étoiles filantes à Aden. 211
— Contributions à la connaissance des étoiles filantes.............. 363
— Compte rendu de l'expédition autrichienne envoyée à Aden pour l'observation de l'éclipse totale de Soleil de l'année 1868.......... 365
Winnecke (A.). — Liste de quelques nouvelles étoiles changeantes, avec les éléments approximatifs de leurs variations d'éclat.............. 363
Wolf (C.) et Rayet. — Sur la lumière de la comète de Winnecke. 341
Wolf (R.) — Étude sur la fréquence des taches du Soleil, et sa relation avec la variation de la déclinaison magnétique.................... 156
Zöllner (J.-C.-F.). — Observation des protubérances.............. 89
— Nouveau spectroscope, et contributions à l'analyse spectrale des étoiles.......................... 89
— Sur la température et la constitution physique du Soleil....... 363
— Sur la périodicité et la distribution héliographique des taches solaires........................ 365

BIBLIOGRAPHIE. — HISTOIRE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

Armenante (A.) et Jung (G.). — Résumé des leçons complémentaires faites à l'Institut Technique supérieur de Milan................. 153
Bertrand (J.). — Discours prononcé aux funérailles de G. Lamé...... 189
Bienaymé. — Traduction de deux passages de Stobée inexpliqués jusqu'ici.......................... 381
Boncompagni (B.). — La vie et les travaux du baron Cauchy, par C.-A. Valson. (Analyse.)........ 99
— Sur l'Ouvrage d'Albirouni sur l'Inde.......................... 99
Boole (G.). — Des propositions définies numériquement........... 218
Catalan (E.). — Communication. — Liste de Mémoires 97
Clifton (R.-B.). — Note sur le Mémoire de A. de Morgan : *Sur l'histoire des origines des signes + et —*. 216
Combes (C.-P.-M.) — Discours prononcé aux funérailles de G. Lamé. 191
— Note accompagnant la présentation de l'*Introduction à la Mécanique industrielle* de Poncelet.... 336
Duhamel (J.-M.-C.) fait hommage à l'Académie des Sciences du 4e volume de son ouvrage : *Des méthodes dans les sciences de raisonnement*......................... 343
Graves (Ch.). — Notice nécrologique sur sir W.-R. Hamilton......... 311
Grube (F.). — Historique du théorème de Maclaurin sur l'attraction des ellipsoïdes confocaux............ 61
Grunert (J.-A.). — Sur une lettre remarquable, écrite par Lagrange, à l'âge de dix-huit ans, au comte de Fagnano....................... 101
Hankel (H.). — La découverte de la gravitation et Pascal............. 60
Hesse (O.). — Extrait d'une lettre.. 196
Hoffmann (L.) und Natani (L.). — Mathematisches Wörterbuch u. s. w. 137
Houël (J.). — Notice sur la vie et les travaux de N.-I. Lobatchefsky. 66, 324, 384
Ianichefsky (E.) (traduit par A. Potocki.). — Notice sur la vie et les travaux de N.-I. Lobatchefsky.... 99
Jacobi (C.-G.-J.). — Lettres sur les fonctions elliptiques............ 27
Jacoli (F.). — Anecdote inédite relative à B. Cavalieri 99
Jevons (W. St.). — Sur les moyens mécaniques pour exécuter les opérations de raisonnement......... 368
Lamé (G.). — Liste de ses travaux et des fonctions qu'il a occupées.... 224
Le Roy (A.). — Notice sur la vie et les travaux de J.-B. Brasseur..... 99

Pages.

LITTROW (C. VON). — Sur l'infériorité des anciens dans les sciences physiques ... 249
LOBATCHEFSKY (N.-I.). — *Voir* HOÜEL (J.) ... 66, 324, 384
MATTHIESSEN (L.). — La règle de fausse position chez les Indous et les Arabes du moyen âge, et application remarquable de cette règle à la résolution directe des équations littérales du 2ᵉ et du 3ᵉ degré ... 276
MORGAN (A. DE). — Sur l'histoire des origines des signes + et — ... 216
— Sur la racine d'une fonction quelconque et sur les séries neutres (2ᵉ Mémoire) ... 217
NARDUCCI (E.). — Sur la vie et les écrits de Fr. Woepcke ... 99
NATANI (L.). — *Voir* HOFFMANN ... 137
POTOCKI (A.). — *Voir* IANICUEFSKY ... 99
PUISEUX (V.). — Discours prononcé aux funérailles de G. Lamé ... 192
SCHERING (E.). — Communication relative au 3ᵉ volume des *Œuvres de Gauss* ... 128
SCHJELLERUP. — Une uranométrie du xᵉ siècle ... 89
SÉDILLOT (L.-Am.). — Les professeurs de Mathématiques et de Physique générale au Collége de France ... 99
SMITH (W.-R.). — Hegel et la métaphysique du calcul des fluxions ... 161
THALÈN (R.). — Léon Foucault ... 178
VALSON (C.-A.). — *Voir* BONCOMPAGNI. 99
— La vie et les travaux du baron Cauchy ... 105
WOLF (R.). — Matériaux divers pour l'histoire des Mathématiques ... 99
WACKERBARTH (A.-F.-D.). — Sur la grande pyramide de Gizeh ... 296

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Équations différentielles. — Calcul des variations. — Calcul des différences finies.

BERTRAND (J.). — Rapport sur un Mémoire de M. Moutard relatif à la théorie des équations différentielles partielles du second ordre ... 316
— Traité de calcul différentiel et de calcul intégral (t. II) ... 41
BESSO (D.). — Sur l'intégrale

$$\int_0^{?} \frac{\sin^m x}{x}\,dx \ldots\ldots\ldots \quad 153$$

BIERENS DE HAAN. — Sur la théorie des intégrales définies (nº IX) ... 187
BOUE. — Trouver le volume d'un solide de révolution, lorsque la courbe génératrice est rapportée à des coordonnées polaires ... 296
BOLTZMANN (L.). — Sur les intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. 208
BOOTH (J.). — Sur la rectification de quelques courbes ... 314
BRILL (A.). — Note relative au nombre des modules d'une classe de fonctions algébriques ... 132
CASORATI (F.). — Teorica delle funzioni di variabili complesse ... 16
CAYLEY (A.). — Note sur une équation différentielle ... 162
DARBOUX (G.). — Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre. 155
— Sur la théorie des équations aux dérivées partielles ... 156
D(AU)G. — Sur l'intégration par substitution ... 178
— Sur la théorie élémentaire du facteur d'intégration ... 178
DIDON (F.). — Sur deux systèmes d'équations aux dérivées partielles ... 27
— Sur certains systèmes de polynômes associés ... 27
— Sur une équation aux dérivées partielles ... 29
— Sur un mode d'approximation des fonctions de plusieurs variables ... 156
DILLNER (G.). — Théorie du calcul géométrique ... 177, 179
— Éléments du calcul géométrique. ... 249, 295, 296
— Intégrales définies des fonctions synectiques ... 296
ENNEPER (A.). — Remarques sur une équation différentielle du second ordre ... 276
— Réduction d'une intégrale multiple ... 278
GENOCCHI (A.). — Sur un théorème de Cauchy ... 315
GRANDI (A.). — Sur une formule connue qui peut se déduire d'un théorème de Cauchy ... 154
GULDBERG (A.-S.). — Sur la forma-

Pages.

tion de nouveaux algorithmes dans le calcul infinitésimal........... 283

Hamilton (sir W.-R.). — Sur une nouvelle méthode générale pour l'inversion d'une fonction linéaire et quaternionale d'un quaternion. 309

— Sur l'existence d'une équation symétrique et biquadratique, qui est satisfaite par le symbole d'opération linéaire sur les quaternions. 309

Hankel (H.). — Démonstration d'un lemme de la théorie des intégrales définies........................ 62

— Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden Functionen. 117

Hansen (Chr.). — Sur les solutions particulières des équations différentielles du premier ordre..... 180

— Détermination élémentaire de l'aire et du volume du tore...... 179

Hansen (P.-C.-V.). — Intégration de trois équations aux dérivées partielles du second ordre......... 180

— Méthode de Cauchy pour l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre... 369

Harley (R.). — Sur une certaine classe d'équations différentielles linéaires...................... 163

Hermite (Ch.). — Sur l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\sin\alpha\, dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}\ldots\ldots 320$$

— Sur l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}\ldots\ldots 373$$

Holmgren (Hj.). — Sur la transformation des intégrales multiples.. 243

— Sur le calcul différentiel à indices quelconques.................... 244

Imchenetsky (V.-G.). — Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre...... 101

— Étude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes..................... 164

Jochmann (E.).— Représentation conforme du rectangle sur la surface du cercle...................... 63

Leffler (G.-M.). — Intégration de l'équation

$$f(x^2+y^2)=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\ldots\ldots 179$$

Lindelöf (L.). — Propriétés des polyèdres qui, sous une étendue superficielle donnée, enferment le plus grand volume.............. 242

— Sur les maxima et minima d'une fonction des rayons vecteurs menés d'un point mobile à plusieurs centres fixes.................... 274

— Remarques sur les différentes manières d'établir la formule

$$\frac{d^2 z}{dx\,dy}=\frac{d^2 z}{dy\,dx}\ldots\ldots\ldots\ldots 275$$

Lindmann (C.-F.). — Détermination des dérivées supérieures de quelques fonctions, et de diverses intégrales définies qui en dépendent.............................. 243

Lipschitz (R.). — Sur la possibilité d'intégrer complétement un système donné d'équations différentielles ordinaires............... 315

Malmsten (C.-J.). — Intégration de l'équation différentielle

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=f(x^2+y^2)\ldots\ldots 177$$

— Sur les intégrales définies entre des limites imaginaires.......... 244

Mayr (A.). — Construction der Differenzial-Gleichungen aus partikularen Integralen, und zwar aus einfachen Functionen u. s. w.... 361

Most (R.). — Sur trois intégrations à l'intérieur de la figure

$$\left(\frac{x}{a}\right)^p+\left(\frac{y}{b}\right)^q+\left(\frac{z}{c}\right)^r+\ldots=1\ldots 62$$

Moutard. — Recherches sur les équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes.................. 211

— *Voir* Bertrand................ 316

Neumann (C.). — Sur une extension du théorème de calcul intégral sur lequel est fondée la décomposition en fractions simples....... 239

Phragmén (L.). — Théorie des maxima et des minima............. 178

Roberts (W.). — Sur une intégrale double définie................. 377

Russel (W.-H.-L.).— Sur la solution de la résolvante différentielle.... 163

Schlaefli (L.). — Quelques observations sur les fonctions de Laplace.. 313

— Sur les relations entre diverses intégrales définies qui servent à

Pages.

exprimer la solution générale de l'équation de Riccati............ 313
— Sur une équation aux dérivées partielles du premier ordre...... 314
SCHLÖMILCH (O.). — Valeur de

$$\operatorname{arc\,tg}(\xi + i\eta)\ldots\ldots\ldots \quad 59$$

— Sur les courbes rectifiables..... 278
SERRET (J.-A.). — Sur un théorème du calcul intégral............... 28
SPITZ (C.). — Erster Cursus der Differential-und Integralrechnung... 331
SPOTTISWOODE (W.). — Sur les résolvantes différentielles............ 163
STEEN (Ad.). — Nouvelle méthode pour l'intégration de l'équation

$$\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = 2f(x^2+y^2)\ldots \quad 178$$

— Remarques sur l'intégration des équations différentielles......... 179
— Sur l'intégration des équations différentielles linéaires au moyen des intégrales définies.......... 282
STOKES (G.-G.). — Supplément d'un Mémoire sur la discontinuité des constantes arbitraires qui se présentent dans les développements divergents.................... 218
STOLZ (O.). — Sur les caractères distinctifs des maxima et des minima des fonctions de plusieurs variables.......................... 209
THEORELL (A.-G.). — Quelques conséquences du théorème de Cauchy sur les différences des fonctions continues..................... 247
THOMAE (J.). — La formule récurrente

$$\begin{aligned}(B + An)\,\varphi(n) &\\ + (B' - A'n)\,\varphi(n+1) &\\ + (B'' + A''n)\,\varphi(n+2) &= 0\ldots \quad 61\end{aligned}$$

TISSERAND. — Sur un point de calcul des différences.................. 155
TISSOT (A.).— Sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes. 272
TRUDI (N.). — Sur la détermination des constantes arbitraires dans les intégrales des équations différentielles et aux différences finies... 153
UNFERDINGER (Fr.). — Sur les deux intégrales générales

$$\int x^n \cos[m \log(a + bx)]\, dx,$$

$$\int x^n \sin[m \log(a + bx)]\, dx,$$

et sur quelques formules qui s'y rattachent...................... 210
VILLARCEAU (Y.). — Note sur les conditions des petites oscillations d'un corps solide de figure quelconque, et la théorie des équations différentielles linéaires.......... ... 383
WEBER (H.).— Sur la démonstration du principe de Dirichlet 25
— Sur l'intégration de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + k^2u = 0\ldots\ldots \quad 124$$

WINCKLER (A.). — Sur quelques questions d'analyse élémentaire...... 210
— Sur quelques intégrales multiples........................ 211
ZEUTHEN (H.-G.). — Remarque au sujet de l'article de Chr. Hansen sur les solutions singulières......... 180
— Nouvelles remarques sur les solutions singulières............. 369

CALCUL NUMÉRIQUE. — TABLES DE LOGARITHMES. — MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS.

ABBADIE (Ant. D'). — Note sur une nouvelle division décimale de l'angle et du temps.......... 319, 335
— Sur la division décimale du quadrant.......................... 377
BRUHNS (C.). — Nouveau Manuel de logarithmes à 7 décimales....... 117
CLARKE (A.-R.). — Extrait des résultats des comparaisons des étalons de mesures de longueur en Angleterre, en Belgique, etc........ 181
DAUG (H.-T.). — Sur les cubatures approximatives................. 245
FORTI (A.). — Tavole dei Logaritmi.. 265

Pages.

GLAISHER (J.-W.-L.). — Table des valeurs numériques du sinus intégral, du cosinus intégral et de l'exponentielle intégrale......... 368
HORVATH. — Valeur approchée de

$$\sqrt{u^2+v^2+w^2}......... 60$$

HOÜEL (J.). — Sur le choix de l'unité angulaire... 339
HULTMAN (F.-W.). — Sur le calcul des valeurs des rentes viagères des assurances sur la vie et des primes d'assurances sur la vie.......... 177
TODHUNTER (I.). — Sur la méthode des moindres carrés............. 216
VILLARCEAU (Y.). — Remarques relatives à la division décimale des angles et du temps............. 336
— Observations sur la communication de M. Hoüel : « Sur le choix de l'unité angulaire............. 339
— Division décimale des angles et du temps..................... 378
WOLF (C.). — Observations relatives à la division décimale des angles et du temps, proposée par M. d'Abbadie........................ 334

FONCTIONS PARTICULIÈRES.

Fonctions elliptiques, abéliennes, de Laplace, eulériennes, de Bessel.

ALLÉGRET. — Note sur l'existence de nouvelles classes renfermant chacune un nombre illimité de courbes algébriques planes, dont les arcs offrent une représentation exacte de la fonction elliptique de première espèce................ 215
BETTI (E.). — Sur les fonctions sphériques........................ 312
BJÖRLING (E.-G.). — Sur les formules d'addition pour les fonctions elliptiques..................... 246
BOCQUET (C.). — *Voir* SERRET (J.-A.). 340
BRIOSCHI (F.). — Sur la bissection des fonctions hyperelliptiques....... 66
— Sur l'équation qui donne les points d'inflexion des courbes elliptiques..................... 188
CASORATI (F.). — Des relations fondamentales entre les modules de périodicité des intégrales abéliennes de première espèce.......... 370
CASORATI (F.) et CARMONA (L.). — Sur le nombre des modules des équations ou des courbes algébriques d'un genre donné.............. 188
CATALAN (E.). — Sur l'addition des fonctions elliptiques de première espèce....................... 282
DIDON (F.). — Méthode de Cauchy pour l'inversion de l'intégrale elliptique...................... 95
DILLNER (G.). — Groupe de formules concernant les fonctions elliptiques de première espèce......... 243
DURÈGE (H.). — Theorie der elliptischen Functionen (2e édition). 49
FUCHS (L.). — Modules de périodicité des intégrales hyperelliptiques, etc.. 25
— Relation rationnelle entre les modules de périodicité des intégrales hyperelliptiques.......... 26
HANKEL (H.). — Les fonctions cylindriques de première et de seconde espèce........................ 135
HERMITE (Ch.). — Sur l'intégrale

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}.......... 313$$

— Sur le développement en série des intégrales elliptiques de première et de seconde espèce...... 314
— Sur l'expression des modules des transcendantes elliptiques en fonction du quotient des deux périodes........................ 373
— Sur la transcendante E_n........ 373
JORDAN (C.). — Théorème sur les fonctions doublement périodiques. 319
KÖNIGSBERGER. — Équation différentielle à laquelle satisfont les périodes des fonctions hyperelliptiques du premier ordre.......... 128
— Les équations modulaires des fonctions hyperelliptiques du premier ordre pour la transformation du troisième degré............. 128
LINDMANN (C.-F.). — Sur les fonctions transcendantes Z'(a) et G*a*, avec l'extension de leurs valeurs au cas des valeurs impaires de *a*.... 242
MANSION (P.). — Théorie de la mul-

Pages.
tiplication et de la transformation des fonctions elliptiques......... 206
MATTHIESSEN (L.). — Sur quelques propriétés des intégrales eulériennes de première et de seconde espèce.......................... 314
RIEMANN (B.). — Toute fonction de n variables ayant plus de $2n$ périodes simultanées est impossible. 26
ROBERTS (M.). — Sur les fonctions abéliennes...................... 373
SERRET (J.-A.). — Rapport sur un Mémoire de M. Bouquet relatif à la théorie des intégrales ultra-elliptiques...................... 340
THOMAE (J.). — Sur la fonction

$$P\begin{pmatrix}\alpha, \beta, \gamma \\ \alpha', \beta', \gamma', x\end{pmatrix}$$ 59

WEIERSTRASS. — Sur les fonctions monodromes les plus générales de n variables à $2n$ périodes.......... 187
WINCKLER (A.). — Sur les intégrales abéliennes complètes...... 209

GÉODÉSIE.

Magnétisme terrestre.

ANDRÆ (VON). — Lettre au sujet d'un Mémoire de W. Jordan 89
BOGUSLAW VON PRONDZYNSKI. — Sur le nombre des équations entre les angles et les sinus dans la comparaison des réseaux de triangles... 90
CHAMBERS (Ch.). — Sur les variations solaires de la déclinaison magnétique à Bombay................ 186
DELAUNAY (Ch.). — Note sur les pyramides de Villejuif et de Juvisy. 339
DONOVAN (M.). — Sur un cadran solaire mobile pouvant indiquer le temps solaire apparent à une petite fraction de minute près.......... 308
HELMERT (F.-R.). — Sur la théorie des réseaux trigonométriques.... 60
HENNESSY (H.). — Sur la distribution de la température dans la région inférieure de l'atmosphère terrestre........................ 308
JORDAN (W.). — Sur l'exactitude des triangulations de l'Allemagne du Sud.......................... 90
— Sur la détermination de l'exactitude des observations répétées d'une seule inconnue........... 89
— Remarque sur la seconde solution de Gauss pour le problème fondamental de la géodésie supérieure........................ 364
LAMBERT (G.). — Détermination expérimentale de la forme de la Terre........................ 65
LAUSSEDAT. — Restauration d'un cadran solaire conique sur un fragment rapporté de Phénicie, par M. Renan..................... 348
MACLEAR (sir Th.). — Vérification et extension de l'arc de méridien de Lacaille au Cap de Bonne-Espérance......................... 294
MATTHIESSEN (L.). — Constante magnétique de l'intensité horizontale à Jever (gr.-duc. d'Oldenbourg), lat. N. 53° 35'................. 364
OPPOLZER (Th.). — Sur la latitude de l'Observatoire de Josefstadt... 281
PETTERSON (C. A.). — Déterminations astronomiques de positions dans le district de Norrbotten........ 247
RENNY (H.-L.). — Sur une nouvelle formule barométrique pour la mesure de la hauteur des montagnes, dans laquelle l'état hygrométrique de l'air est considéré systématiquement...................... 306
— Sur les constantes des formules barométriques qui tiennent compte exactement de l'état hygrométrique de l'atmosphère.......... 307
SABINE (E.). — Contributions au magnétisme terrestre.............. 184
— Contributions au magnétisme terrestre. N° XII: État magnétique des îles Britanniques, réduit à l'époque 1842-45. 367
SCHELL (A.). — Théorie générale du planimètre polaire.............. 208
— Sur l'exactitude de l'équation des angles de l'instrument à niveler de Stampfer. 61

Pages.
Sonderhof (A.). — Corrections géodésiques des angles horizontaux observés sur le sphéroïde........ 249
Stamkart (F.-J.). — Mesure d'une base dans la mer de Harlem..... 186
Weingarten (J.).—Sur un problème de géodésie.................. 87
— Sur la réduction des angles d'un triangle sphéroïdique à ceux d'un triangle plan ou sphérique...... 90
Wiener (Chr.). — Calcul des altérations dans un réseau variable de triangles...................... 59
Wittstein. — Sur la déviation de la verticale à de grandes hauteurs.. 89
Zachariæ (G.). — Mesure du degré de méridien en Danemark, t. I, publié par C.-G. Andræ......... 180

GÉOMÉTRIE.

Géométrie analytique. — Courbes et surfaces de degré supérieur.

Bauer. — Discriminant de l'équation du troisième degré aux axes principaux........................ 25
— Sur les sections circulaires des surfaces du second degré........ 25
Bretschneider (C.-A.). — Les courbes polaires harmoniques........ 104
Casey (J.). — Sur les quartiques bicirculaires..................... 308
Catalan (E.). — Remarques sur une Note de M. Darboux, relative à la surface des centres de courbure de l'ellipsoïde................. 341
Cayley (A.). — Sur les courbes polyzomales ou courbes

$\sqrt{U}+\sqrt{V}+\ldots=0$....... 159

— Huitième Mémoire sur les quantiques....................... 181
— Troisième Mémoire sur les surfaces gauches.................. 185
— Sur les courbes qui satisfont à des conditions données. (Deux Mémoires.).................... 182
— Mémoire sur les surfaces du troisième degré.................. 185
— Mémoire sur la théorie des surfaces réciproques.............. 185
— Sur la théorie de l'involution... 215
— Sur un cas de l'involution des courbes du troisième degré...... 215
— Sur la classification des courbes du troisième degré............. 216
— Sur les cônes et les courbes du troisième degré................. 216
— Sur certaines surfaces gauches... 217
— Note sur quelques torses sextiques.................. 314, 315
— Mémoire sur la géométrie abstraite.......................... 366
Chasles (M.) communique un Théorème concernant la théorie des surfaces de M. Spottiswoode..... 155
— Nouvel énoncé d'un théorème de M. Spottiswoode................ 213
Cremona (L.). — Préliminaires d'une théorie géométrique des surfaces. 219
— Sur les surfaces gauches du quatrième degré.................. 219
Darboux (G.). — Sur la surface des centres de courbure d'une surface algébrique.................... 339
— Réponse aux observations de M. Catalan du 4 juillet dernier.. 348
Durège (H.). — Sur une construction facile des courbes du troisième ordre qui passent par les points à l'infini sur le cercle............ 61
— Sur une série de tangentes menées successivement à une courbe du troisième ordre ayant un point double ou un point de rebroussement......................... 135
Durrande (H.). — Sur les surfaces du quatrième ordre............ 213
Enneper (A.). — Sur un problème de géométrie sphérique......... 60
— Remarques sur l'intersection de deux surfaces.................. 238
— Sur un théorème de géométrie.. 238
— Recherches de géométrie analytique.......................... 238
— De la surface développable formée par les plans tangents le long d'une courbe donnée sur une surface......................... 623
Geiser. — Sur les tangentes doubles

Pages.

d'une courbe plane du quatrième ordre 127

HALPHEN. — Mémoire sur les courbes gauches algébriques 65

HAMILTON (sir W.-R.). — Sur les courbes gauches du troisième degré 309

HECER (R.). — Nouvelles coordonnées homogènes du plan 277

HOCHHEIM (Ad.). — Sur les lieux géométriques des points remarquables d'un triangle 276

JONQUIÈRES (E. DE). — Sur les réseaux de courbes et de surfaces algébriques 132

JORDAN (C.). — Sur une nouvelle combinaison des 27 droites d'une surface du troisième ordre 64

— Sur l'équation aux 27 droites des surfaces du troisième degré 92

KRONECKER (L.). — Sur les systèmes de fonctions de plusieurs variables 187

LA GOURNERIE (DE). — Note sur les singularités élevées des courbes planes 98

LÜROTH (J.). — Sur quelques propriétés d'une classe de courbes du quatrième ordre 126

NIPPERT (P.). — Solution de quelques problèmes 279

PAINVIN. — Détermination des éléments de l'arête de rebroussement d'une surface développable, définie par ses équations tangentielles. 344

Pages

REYE (Th.). — Génération géométrique des surfaces du troisième, du quatrième ordre, et en général d'un ordre quelconque, au moyen des réseaux de surfaces d'ordre inférieur 133

SCHUBERT (H.). — Détermination de l'ordre de la surface fondamentale (*Kernfläche*) de Hesse, correspondante à une surface d'ordre quelconque 278

SPOTTISWOODE (W.). — *Voir* CHASLES. 155, 213

— Sur le contact des coniques avec les surfaces 368

STEEN (Ad.). — Sur les coordonnées trilinéaires 370

TOEPLITZ (J.). — Des relations qui existent entre les coordonnées trilinéaires et tétraédriques 61

TOGNOLI (O.). — Sur une extension de propriétés concernant les courbes algébriques planes d'ordre quelconque, aux surfaces algébriques de degré quelconque. 288, 33

ZEUTHEN (H.-G.). — Sur les singularités ordinaires d'une courbe gauche et d'une surface développable. 139

— Équations fondamentales pour les deux systèmes de coordonnées trilatères et pour les deux systèmes de coordonnées tétraédriques. 180

— Sur les singularités ordinaires d'une courbe gauche et d'une surface développable 375

Géométrie analytique. — Sections coniques et surfaces du second ordre.

CASEY (J.). — Sur les équations et les propriétés : 1° du système des cercles tangents à trois cercles sur un plan ; 2° etc 311

— Recherche des équations des couples de quadriques inscrites dans une quadrique donnée et tangente à quatre quadriques inscrites aussi dans la même quadrique... 315

CASSANI (P.). — Étude sur la conique des neuf points et des neuf droites 154

— Sur le triangle conjugué de deux coniques 332

— Solution de ce problème : Par un point donné, mener un cercle deux fois tangent à une parabole donnée 331

— Note sur la conique des neuf points et des neuf droites 334

CAYLEY (A.). — Démonstration nouvelle du théorème de M. Casey par rapport aux cercles qui touchent trois cercles donnés 312

DARBOUX (G.). — Sur les systèmes linéaires de coniques et de surfaces du second degré 348

GEISER (F.). — Sur les normales à l'ellipsoïde 313

GENLIS (Fr.). — Sur un caractère géométrique propre à faire reconnaître l'espèce de la conique déterminée par cinq tangentes données ou cinq points donnés 62

Pages.

— Tétraèdre de volume maximum inscrit dans un ellipsoïde à trois axes égaux 62

Gaunbat (J.-A.). — Sur les cordes communes des sections coniques et de leurs cercles de courbure, et en particulier sur les maxima et les minima de ces cordes 100

— Discussion générale de l'équation du second degré

$$Ap_0^2 + Bp_1^2 + Cp_2^2 + Dp_0p_1 + Ep_1p_2 + Fp_2p_0 = 0,$$

en coordonnées trilinéaires ou trimétriques 279

— Équation générale des sections coniques et en particulier du cercle en coordonnées trilinéaires... 276

— Discussion générale de l'équation des lignes du second degré 279

Hamilton (sir W.-R.). — Sur les huit génératrices ombilicales imaginaires d'une surface à centre du second degré 310

Hansen (P.-C.-V.). — Quelques propositions sur les surfaces du second ordre 370

Hesse (O.). — Des relations analytiques entre six points situés sur une courbe 33

Leidman. — Remarques sur les figures rectilignes inscrites et circonscrites à une ellipse 178

Pages.

Niemtschik (R.). — Procédé simple pour mener, par des points extérieurs, des normales aux surfaces du second ordre 209

— Sur la construction des points d'intersection des cercles et des sections coniques 209

— Construction des points d'intersection de deux sections coniques. 210

Ovidio (E. d'). — Nouvelle exposition de la théorie générale des courbes du deuxième ordre en coordonnées trilinéaires 152

Painvin (L.). — Discussion de l'intersection de deux surfaces du second ordre 157

Roberts (M.). — Sur l'application du théorème d'Abel à la comparaison des arcs des lignes de courbure de l'ellipsoïde 314

— Sur les lignes de courbure d'un ellipsoïde 377

Schubert (H.). — Propriétés géométriques des seize sphères tangentes à quatre sphères données 63

Serret (P.). — Géométrie de direction 9

Siebeck (H.). — Du triangle dont les côtés contiennent les pôles conjugués par rapport à quatre sections coniques 314

Staudigl (R.). — Construction de l'ellipse 209

Géométrie élémentaire, synthétique.

Becker (J.-C.). — Sur les polyèdres. 59

— Note additionnelle sur l'article des polyèdres 61

Bertrand (J.). — Somme des angles d'un triangle 29

Besso (D.). — De l'idée de fonction dans l'enseignement de la géométrie élémentaire 153

Biyonti (V.-N.). — Théorèmes de géométrie élémentaire à démontrer 224

— Solution de quelques questions de trigonométrie et de géométrie, proposées dans l'*Educational Times* 333, 334

Björling (E.-G.). — Sur les polyèdres réguliers 299

Bretschneider (C.-A.). — Le théorème de Matthew Stewart 100

Chelini (D.). — Usage du principe géométrique de la résultante dans la théorie des tétraèdres 219

Dillner (G.). — Essai d'exposition de la théorie des parallèles 178

Dostor (G.). — Propriété de la bissectrice d'un angle d'un triangle. — Ellipse et hyperbole; relation entre les angles des deux rayons vecteurs d'un point avec l'axe focal. — Etc 249

Fasbender. — Les angles que les côtés du triangle forment avec leurs lignes de gravité respectives 249

Folie (F.). — Note sur quelques théorèmes généraux de géométrie supérieure 282

Frucher (P.). — Expression du volume d'un polyèdre limité par des

Pages.

triangles, au moyen des coordonnées rectangulaires des sommets du polyèdre.................. 370
Helmholtz (H.). — Sur les faits qui servent de base à la géométrie... 238
Hoüel (J.). — Note sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe de la théorie des parallèles, dit *Postulatum d'Euclide*.................. 223
Jung (G.). — Démonstration d'un théorème de géométrie.......... 333
Mollame (V.). — Solutions de quelques questions de géométrie, proposées dans l'*Educational Times*. 333
Müller (H.). — De la géométrie des surfaces du second ordre........ 132
— Etude synthétique d'une faisceau de surfaces du second ordre..... 136
Nawratil. — Sur la construction d'un polygone simple à la fois inscrit et circonscrit à un polygone de même espèce................... 100
Olivier (A.). — Sur la théorie de la génération des courbes géométriques....................... 24
— Ordre d'une courbe engendrée par l'intersection des courbes correspondantes de deux faisceaux.. 26
— Sur la génération des courbes géométriques déterminées par les points d'intersection inconnus de courbes données................ 60
Orlando (d'). — Démonstration de quelques théorèmes de géométrie. 332
Ovidio (E. d'). — Note sur deux théorèmes de M. Mannheim..... 153
— *Voir* Sannia.................. 329
Reye (Th.). — Sur les axes des coniques situés sur une surface du second ordre.................. 314
— Sur les courbes gauches de quatrième ordre et de première espèce, et sur leurs points d'intersection avec les surfaces du second degré..................... 314. 315
— Propriété remarquable de l'hélice........................ 276
Sannia (A.) et d'Ovidio (E.). — Elementi di geometria............. 329
Seidelin (C.). — Démonstration de quelques propositions sur les permutations et les combinaisons. — Démonstration d'un théorème de stéréométrie 369
Smith (H.-S.). — Observation de géométrie............ 315
Smith. — Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques......................... 373
— Appendice au même Mémoire... 375
Spieker (Th.). — Sur un cercle remarquable décrit autour du centre de gravité du périmètre d'un triangle rectiligne, et analogue au cercle des neuf points................ 248
Sturm (R.). — Le problème de l'homographie et son application aux surfaces du second ordre........ 136
— Combien y a-t-il de sécantes communes à deux cubiques gauches?. 371
Unferdinger (Fr.). — Théorie du tétraèdre donné par ses six arêtes.. 279
Valeriani (V.). — Du plan, sa définition. L'axiome du plan élevé au rang de théorème............... 154
Weyr (Ed.). — Sur un théorème de Steiner........................ 24
— Sur quelques théorèmes de Steiner, etc....................... 24
— Généralisation du théorème de Desargues, avec des applications. 208
Weyr (Em.). — Sur les lignes de courbure des surfaces du second degré, et sur les systèmes confocaux de ces surfaces 208
— Sur la génération des courbes du troisième ordre................. 209
— Construction du cercle de courbure des courbes podaires....... 209

Géométrie infinitésimale. — Courbure. — Coordonnées curvilignes. — Représentation géographique.

Aoust. — Sur les lignes asymptotiques des surfaces gauches...... 228
Aoust (l'abbé). — Sur l'analyse des courbes rapportées à des coordonnées quelconques........... 28
— Théorie des coordonnées curvilignes quelconques........ 314, 372
Beltrami (E.). — Essai d'interprétation de la géométrie non euclidienne.......................... 29

Pages.

— Théorie fondamentale des espaces de courbure constante...... 29, 315
— Sur la théorie de la courbure des surfaces...... 136
— Sur un nouvel élément introduit par M. Christoffel dans la théorie des surfaces...... 189
— Sur les propriétés générales de la surface d'aire minimum...... 219
— Sur la théorie générale des paramètres différentiels...... 219
— Des variables complexes sur une surface...... 314
BRETON (de Champ). — Sur les lignes de plus grande pente à déclivité maximum ou minimum...... 314
BRIOSCHI (F.). — Sur la théorie des coordonnées curvilignes...... 311
CHELINI (D.). — De la courbure des surfaces, par une méthode directe et intuitive...... 219
— Théorie des coordonnées curvilignes dans l'espace et dans les surfaces...... 219
CHRISTOFFEL (E.-B.). — Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke. 169
— Sur la transformation des expressions différentielles homogènes entières...... 187
— Sur le problème des températures stationnaires et la représentation conforme d'une surface donnée.. 312
CODAZZI. — Sur les coordonnées curvilignes d'une surface et de l'espace...... 313
— Sur les coordonnées curvilignes d'une surface de l'espace... 314, 315
COMBESCURE (E.). — Sur quelques formes différentielles...... 320
DINI (U.). — Sur les surfaces qui ont des lignes de courbure planes.... 313
— Sur un problème qui se présente dans la théorie générale de la représentation géométrique d'une surface sur une autre...... 375
ECKARDT (F.-E.). — Théorèmes sur l'épicycloïde et l'hypocycloïde... 279
ENNEPER (A.). — Remarques sur le mouvement d'un point sur une surface...... 239
— Sur les loxodromies des surfaces coniques...... 239
EXNER (K.). — Sur la forme des éléments très-petits d'une surface.. 248
FALK (M.). — Sur les lignes de courbure des surfaces développables.. 296
GRUNERT (J.-A.). — Sur les projections conformes des cartes géographiques...... 101
HAMILTON (sir W.-R.).—Sur un nouveau système de deux équations générales de courbure...... 310
LEVY (Maurice). — Mémoire sur les coordonnées curvilignes orthogonales et en particulier sur celles qui comprennent une famille quelconque de surfaces de second degré...... 271
LINDELÖF (L.). — Théorie des surfaces de révolution à courbure moyenne constante...... 274
LIPSCHITZ.—Recherches sur les fonctions homogènes entières de n différentielles...... 187
MANNHEIM (A.). — Recherches sur les pinceaux de droites et les normalies, contenant une nouvelle exposition de la théorie de la courbure des surfaces...... 318
— Détermination du plan osculateur et du rayon de courbure de la trajectoire d'un point quelconque d'une droite que l'on déplace en l'assujettissant à certaines conditions...... 334
— Construction de l'axe de courbure de la surface développable enveloppe d'un plan dont le déplacement est assujetti à certaines conditions...... 337
NEUMANN (C.). — Application du calcul barycentrique à la courbure des courbes et des surfaces algébriques...... 313
RIBAUCOUR. — Note sur la déformation des surfaces...... 64
RIEMANN (B.). — Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie...... 377
SCHERING (E.). — Extension du théorème fondamental de Gauss, sur les surfaces à courbure continue. 238
SCHWARZ (A.). — Note sur la représentation conforme d'une aire elliptique sur une aire circulaire. 374
UNFERDINGER (Fr.). — Sur l'expression du rayon de courbure en coordonnées polaires, et sur les courbes dont l'équation est

$r^k = a^k \sin k\theta$...... 249

WEYR (Em.).— Construction du centre de courbure des courbes podaires...... 63

Méthodes de transformation. — Transformations rationnelles.

Pages.
BERTINI (E.). — Nouvelle démonstration de ce théorème : deux courbes corrélatives projectivement sont du même genre...... 153
CLEBSCH (A.). — Sur les courbes qui correspondent aux fonctions abéliennes de la classe $p = 2$.. ...: 129
— De la représentation sur le plan des surfaces algébriques, et en particulier des surfaces du quatrième et du cinquième ordre... 129
— Remarques sur la géométrie des surfaces gauches du troisième ordre.. 136
— Sur la représentation des surfaces algébriques.................. 239
CREMONA (L.). — Sur la transformation des courbes hyperelliptiques. 188
— Représentation d'une classe de surfaces gauches sur un plan, et détermination de leurs courbes asymptotiques................. 313
DARBOUX (G.). — Note sur un Mémoire de M. Dini.............. 383
— Transformation des figures et application à la construction d'une surface du deuxième ordre déterminée par 9 points............ 27
JUNG (G.) et ARMENANTE (A.). — Sur les fonctions birationnelles ou univoques (*eindeutigen*), et sur les courbes normales et sous-normales du genre p............... 154
KORNDÖRFER (G.). — De la représentation sur un plan d'une surface du quatrième ordre, avec un ou plusieurs points singuliers....... 136
LIE (S.). — Sur une transformation géométrique.................. 382
NÖTHER (M.). — Sur la théorie des fonctions algébriques de plusieurs variables complexes............ 239
PAINVIN (E.). — Note sur la transformation homographique......... 159
REGIS (D.). — Sur une application des principes d'homologie à la perspective.................... 332
WEYR (Ed.). — Étude analytique de la corrélation quadratique......... 62
ZEUTHEN. (H.-G.). — Sur les points fondamentaux de deux surfaces, dont les points se correspondent un à un...................... 156

Géométrie linéaire. — Complexes.

ASCHIERI (F.). — Sur un complexe du second degré................ 220
— Sur un complexe du second degré. — Génération géométrique des complexes du premier degré. 332
BATTAGLINI (G.). — Sur les systèmes de droites du second degré...... 153
CAYLEY (A.). — Sur les six coordonnées d'une ligne............... 217
JANNI (G.). — Exposition de la nouvelle Géométrie de Plücker...... 333
KLEIN (F.). — Sur la théorie des complexes de lignes du premier et du second degré.................... 239
PLÜCKER (J.). — Neue Geometrie des Raumes, u. s. m................ 73
— Théorie générale des surfaces réglées; leur classification et leur construction 313
ZEUTHEN (H.-G.). — Note sur un système de coordonnées linéaires dans l'espace.................. 132
— Sur un nouveau système de coordonnées dans l'espace......... 283

Géométrie descriptive, graphique.

MATZEK. — Sur la construction du plan tangent à une surface de révolution...................... 208
PANTANELLI (D.). — Dessin axonométrique......................... 288
SCHLESINGER (J.). — Les surfaces projectives. — Contribution à la constitution de la Géométrie descriptive dans le sens de la nouvelle Géométrie.................... 208
— Représentation des projections collinéaires et des principes projectifs sous une forme appropriée à la géométrie descriptive....... 209
— Représentation des projections collinéaires dans l'espace par des

Pages.
transformations orthogonales.... 210
Staudigl (R.). — Étude de quelques formes de voûte, au moyen desquelles on peut couvrir un espace de base trapézoïdale........... 60
— Constructions diverses relatives aux surfaces du second degré, exécutées à l'aide des surfaces coniques et cylindriques........... 209
— Application des projections centrales et parallèles dans l'espace à la résolution de divers problèmes sur les surfaces du second ordre. 209
Wiener (Ch.).— Epreuves stéréoscopiques du modèle d'une surface du troisième ordre à 27 droites réelles. 175

Courbes et surfaces d'une génération particulière.

Aoust (l'abbé). — Sur les roulettes en général..................... 213
Catalan (E.). — Sur les roulettes et les podaires................ 282
Cayley (A.). — Mémoire supplémentaire sur les caustiques.......... 181
Enneper (A.). — Les surfaces cycliques.......................... 62
Gilbert (Ph.). — Sur quelques propriétés des surfaces apsidales ou conjuguées.................... 282
Habich (E.). — Sur un système particulier de coordonnées. Application aux caustiques planes....... 315
Klein et Lie. — Sur une certaine famille de courbes et de surfaces. 335, 338
La Gournerie (J. de). — Mémoire sur les lignes spiriques...... 91, 92
Salmon (G.). — Sur le degré d'une surface réciproque d'une surface donnée....................... 307
Schlömilch (O.). — Sur quelques courbes dérivées des sections coniques....................... 60
Weyr (Em.). — Sur l'identité des caustiques avec les courbes podaires........................ 62

MÉCANIQUE.

Cinématique.

Dahlander (G.-R.). — Théorie géométrique de l'accélération dans le déplacement d'une figure dans son plan..................... 247
— Sur la détermination de l'axe central et de l'axe de rotation dans le mouvement d'un corps....... 247
Dillner (G.). — Détermination des accélérations par une construction géométrique.................. 178
Mannheim. — Quelques résultats obtenus par la considération du déplacement infiniment petit d'une surface algébrique............. 214
— Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable. Nouvelle méthode des normales. Applications diverses............. 297
Neumann (C.). — Recherches géométriques sur le mouvement d'un corps solide................... 129
Tychsen (C.). — Sur le mouvement de la toupie gyroscopique....... 179

Mécanique analytique. — Attraction. — Centre de gravité.

Björling Jr. (C.-F.-E.). — Sur le mouvement rectiligne d'une molécule soumise à une force attractive ou répulsive, qui est une fonction algebrique, rationnelle et entière de la distance à un centre fixe... 100
Boltzmann (L.). — Études sur l'équilibre de la force vive entre des points matériels en mouvement.. 208
— Solutions d'un problème de mécanique...................... 209
Brill (A.). — Sur le problème de la rotation des corps............. 372
Ferrers (N.-M.). — Note sur la re-

Pages.

présentation proposée par M. Sylvester pour le mouvement d'un corps rigide libre, par celui d'un ellipsoïde dont le centre est fixe, et qui roule sur un plan non poli. 365
Gretschel (H.). — Démonstration élémentaire de la formule de la durée de l'oscillation d'un pendule simple 248
Grosso (R. del). — Mémoire sur l'attraction des sphéroïdes. 153, 224, 332
Grube (F.). — Attraction d'un segment limité par une surface du second degré et par deux plans perpendiculaires à son axe...... 61
Grunert (J.-A.). — Sur le centre de gravité du trapèze, et en particulier sur sa détermination graphique 101
Hamilton (sir W.-R.). — Sur un centre général des forces appliquées........................ 310
Haton de la Goupillière (J.-N.). — Recherches sur les centres de gravité.......................... 270
Hoppe (R.). — De la courbe tautochrone dans le cas du frottement. 62
Jordan (C.). — Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants...... 313
Krumme (W.). — Problèmes sur le plan incliné................... 62
Lorenz (L.). — Sur la force centrifuge 369
Lucas (F.). — Nouvelles propriétés de la fonction potentielle....... 339
Most (R.). — Sur le centre de gravité du contour des figures planes et solides les plus simples....... 248
Mylord (H.). — Sur l'ellipsoïde central et les axes principaux....... 181
Neumann (C.). — Note sur le pendule cycloïdal..................... 135
Padova (E.). — Application de la méthode d'Hamilton au mouvement d'un point sur une surface...... 223
— Du mouvement d'un ellipsoïde dans un fluide incompressible et indéfini...................... 333

Pages.

Petersen (J.). — Application du principe des vitesses virtuelles à un cas où il existe des frottements........................ 180
— Sur les corps flottants.......... 284
Purser (J.). — Sur l'application des équations du mouvement relatif, de Coriolis, au problème du gyroscope...................... 309
Radau (R.). — Sur la rotation des corps solides.................. 29
— Considérations sur le théorème des aires 88
— Nouvelles remarques sur le problème des trois corps........... 89
— Sur une propriété des systèmes qui ont un plan invariable....... 92
Saint-Venant (de). — Rapport sur cinq Mémoires de M. *Félix Lucas*, intitulés : *Recherches concernant la Mécanique des atomes*........ 64
Schlaefli (L.). — Sur le mouvement d'un pendule, quand la droite passant par le point de suspension et par le centre de gravité est pour ce point le seul axe principal d'inertie qui soit donné de position. 312
Somof (J.). — Note sur l'attraction exercée par une couche matérielle très-mince sur un point de sa surface........................... 240
— Note sur la solution, donnée par Abel, d'un problème de mécanique.......................... 241
Tait. — Sur la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.... 161
Weiler (A.). — Sur l'élimination du nœud dans le problème des trois corps.................... 89, 90
— Note sur le problème des trois corps........................... 96
Wiener (Chr.). — Sur le mouvement d'une figure plane qui se meut en restant semblable à elle-même et de manière que trois de ses droites passent par trois points fixes..... 312

Mécanique physique et expérimentale.

Bashforth (F.). — Sur la résistance de l'air du mouvement des projectiles allongés, pour diverses formes de têtes................ 184
Boltzmann (L.). — Sur la résistance de deux cylindres creux superposés........................... 210
Cohen Stuart. — De la pression

Pages.
de sur les points d'appui... 186
s (S.). — Sur le desséche- du lac de Harlem......... 306
m Lôme.—Note sur un projet stat dirigé............... 381
et d'aérostat dirigé, muni propulseur................ 381
tième et troisième Note sur rostats dirigés............ 382
(J.-D.). — Expériences sur sion et la flexion pour dé- ner la rigidité du verre.... 181
· Sur l'affût de l'amiral La- se....................... 381
la déviation des projectiles à s....................... 383
'art de pointer et ses condi- physiologiques........... 383
e. — Sur les circonstances it pu amener Monge à s'oc- des questions relatives aux ats...................... 382
F.).—Sur l'application pra- de la théorie des figures ré- ques au calcul des efforts des dans la charpente......... 161
.). — Mémoire sur les équa- générales des mouvements urs des corps solides duc- u delà des limites où l'élas- pourrait les ramener à leur r état.................. 338
'.).— De la possibilité d'ob- les signaux de feu à longue 344
(R.). — Sur les conditions ues exigées dans la construc- e l'artillerie, et sur quel- uses inexpliquées jusqu'ici destruction des canons par ice..................... 306
de Brettes. — Détermina- l'épaisseur du blindage en peut traverser un projectile n connaît le poids, le ca- t la vitesse d'arrivée...... 339
d (Ch.-W.). — Sur la loi sistance de l'air aux pro- de carabine.............. 184
— Mémoire sur l'équilibre chines aérostatiques, sur les its moyens de les faire lre ou monter, etc........ 382
Rapport sur un Mémoire Tresca, sur le poinçonnage a théorie mécanique de la ation des corps solides.... 64

Pages.
— Note sur la première session de la Commission internationale du mètre, tenue à Paris du 8 au 13 août 1870........................ 378
Obermayer (A.). — Expériences sur l'écoulement de l'argile plastique. 209
Piarron de Mondésir. — Nouvelle méthode pour la solution des problèmes de mécanique........ 30, 32
Poncelet (V.). — *Voir* Combes..... 336
Röhrs (J.-H.). — Sur les effets qu'éprouvent les pièces d'artillerie, et sur les vibrations des corps solides en général..................... 218
Rolland (E.). — Mémoire sur l'établissement des régulateurs de la vitesse, solution rigoureuse des problèmes de l'isochronisme par les régulateurs à boules conjuguées, sans emploi de ressorts, ni de contrepoids variables; influence du moment d'inertie sur les oscillations à longue période......... 269
Saint-Venant (de). — Rapport sur un Mémoire de M. Levy sur l'équilibre des terres fraîchement remuées........................ 32
— Détermination de la poussée des terres......................... 32
— Sur une détermination rationnelle, par approximation, de la poussée qu'exercent des terres dépourvues de cohésion, contre un mur ayant une inclinaison quelconque....................... 63
— Preuve théorique de l'égalité des deux coefficients de résistance au cisaillement et à l'extension ou à la compression dans le mouvement continu de déformation des solides ductiles au delà des limites de leur élasticité............... 64
— Rapport sur un complément présenté par M. *Tresca*, à son Mémoire relatif à l'écoulement des corps solides malléables poussés hors d'un vase cylindrique par un orifice circulaire................ 64
— Sur l'établissement des équations des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état...................... 66
— Rapport sur une communication de M. Vallès.... 96
— Recherche d'une deuxième ap-

Pages.
proximation dans le calcul rationnel de la poussée exercée contre un mur dont la face postérieure a une inclinaison quelconque, par des terres non cohérentes, dont la surface supérieure s'élève en un talus plan quelconque, à partir du haut de cette face du mur....... 156
— Comparaison des évaluations de la poussée des terres par la considération rationnelle de l'équilibre limite, et par l'emploi du principe dit *de moindre résistance* de Moseley........................ 213
STONEY (B.). — Sur la flexion relative des poutres treillissées et des sommiers plats.................. 308
— Sur la résistance des longs piliers. 309

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

Magnétisme.

AIRY (G.-B.) — Comparaison des perturbations magnétiques indiquées par le magnétomètre enregistreur de l'Observatoire de Greenwich, avec les perturbations magnétiques déduites des courants galvaniques terrestres correspondants, indiqués par le galvanomètre enregistreur de l'Observatoire Royal. 184
— Sur les inégalités diurnes et annuelles du magnétisme terrestre, déduites d'observations faites à l'Observatoire royal de Greenwich, de 1858 à 1863, etc............. 186
— Sur une extension de la comparaison des perturbations magnétiques avec les effets magnétiques conclus des courants galvaniques terrestres observés, etc.......... 367
BOIS-REYMOND (DU). — Sur le mouvement apériodique des aimants.. 187
ERMAN (A.). — Sur quelques déterminations magnétiques...... 89, 90
HALL (Asaph). — Notes supplémentaires sur les observations de magnétisme et de position faites par l'expédition américaine en Sibérie pour l'observation de l'éclipse du 7 août 1869.................... 280
LLOYD (H.). — Détermination de la mesure absolue de l'intensité du magnétisme terrestre, au moyen de la boussole d'inclinaison..... 307
— Sur les courants terrestres et leur liaison avec la variation diurne de l'aiguille magnétique horizontale.......................... 308
MAXWELL (J.-C.).—Sur une méthode pour faire une comparaison directe de l'électrostatique avec la force électromagnétique, avec une Note sur la théorie électromagnétique de la lumière............. 185
WALTENHOFEN (A. VON). — Sur les limites de l'aimantation du fer et de l'acier...................... 211

Électricité.

BOLTZMANN (L.). — Sur l'action électrodynamique mutuelle des parties d'un courant électrique de forme variable.......... 211
— Sur l'action électrodynamique réciproque des parties d'un courant électrique de forme variable. 276
EDLUND (Er.). — Démonstration expérimentale de la dilatation produite par le courant électrique dans les corps solides, indépendamment de la chaleur développée. 246
HOLTEN. — Sur la théorie des machines électromagnétiques....... 285
KIECHL (Fr.). — Essais pour déterminer l'équivalent calorique de l'électricité................. ... 211
KÖTTERITSCH (Th.). — Distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs.............. 61
LORBERG (H.). — Mouvement de l'électricité dans les corps de deux ou trois dimensions............ 25
— Mouvement de l'électricité dans un courant galvanique........... 61
LOSCHMIDT (J.). — Potentiel des

Pages.
électriques en mouvement. 60
tentiel d'une masse élec-
en mouvement déduit du
el d'une masse en repos... 208
ment de l'électricité dans
ant électrique........... 208
(H.). — Détermination des
ites d'un élément galva-
.... 210
(C.). — Note sur un écrit
récemment et traitant de
odynamique............ 131

Pages.
— Résultats d'une étude sur les principes de l'électrodynamique.. 238
— Sur la décharge oscillante d'une table de Franklin.............. 239
— Théorie nouvelle des phénomènes électriques.................... 314
STEFAN (J.). — Sur les formules fondamentales de l'électrodynamique. 210
VOLPICELLI (P.). — De la distribution électrique sur les conducteurs isolés.................... 3-5

Thermodynamique.

(J.). — Rapport sur un
re de M. Massieu intitulé :
oire sur les fonctions des
fluides et sur la théorie des
s »...................... 344
h.). — Théorie mécanique
chaleur.................. 85
T D'HUART. — Leçons sur la
mathématique du mouve-
e translation et du mou-
de rotation des atomes... 304
n (G.-R.). — Sur l'effet mé-
s produit par les vapeurs
saturée pendant son ex-
n. 215
E.). — Détermination quan-
des phénomènes de cha-
ui se produisent dans le
ment de volume des métaux
équivalent mécanique de la
, indépendamment du tra-
canique du métal........ 245
DSON (H.). — Revue histo-
les théories les plus impor-
sur la vaporisation des li-
.... 177
.). — Calcul de la quantité
leur développée dans le
ment d'une météorite à tra-
tmosphère.............. 370
(C.-M.). — Sur les équa-
e l'état des corps......... 285
(Fr.). — Sur la résistance
le des liquides........... 365
. — Influence de la tempé-
sur la conductibilité de cer-
étaux pour la chaleur.... 241
(J.). — Le second théo-
s la théorie mécanique de
ur...................... 210
). — Note relative à l'état

physique des corps............. 65
MASSIEU. — *Voir* BERTRAND (J.)..... 344
MAXWELL (J.-Cl.) — Sur la théorie dynamique des gaz............ 181
PHILLIPS (E.). — Note sur les changements d'état d'un mélange d'une vapeur saturée et de son liquide, suivant une ligne adiabatique.... 154
— Relation entre les chaleurs spécifiques et les coefficients de dilatation d'un corps quelconque... 377
RANKINE (W.-J.-M.). — Sur l'énergie thermale des tourbillons moléculaires...................... 162
— Sur la théorie thermodynamique des ondes d'une perturbation longitudinale finie................ 367
SACCHETTI (L.). — Considérations sur l'origine de la théorie mécanique de la chaleur.................. 219
SCHMIDT (G.). — Sur les constantes physiques de la vapeur d'eau..... 100
THOMSON (sir William). — Sur le mouvement en tourbillons...... 160
— Sur l'équilibre convectif de température dans l'atmosphère...... 163
VALSON. — Étude sur les actions moléculaires, fondée sur la théorie de l'action capillaire........... 215
WITTWER (W.-C.). — Application de la théorie du choc des corps élastiques à quelques phénomènes calorifiques.................... 63
— Étude sur la physique moléculaire. 277
— Théorie des gaz.............. 60
ZANNOTTI (M.). — Leçons sur la thermodynamique................ 153
— Leçons de physique mathématique (thermodynamique), professées à l'Université de Naples en 1868-69...................... 223

Optique.

Pages.

Airy (G.-B.). — Calcul des longueurs des ondes lumineuses correspondantes aux raies du spectre de dispersion mesurées par Kirchhoff. 182
Brill (A.). — Sur les équations différentielles de la théorie de la lumière. 129
Burmester (L.). — Lignes d'égale intensité lumineuse. 61
Exner (S.). — Sur le temps nécessaire pour la perception visuelle. 209
Hoppe (R.). — Surfaces également illuminées. 248
Klinkerfues (W.). — Sur les applications de l'équation différentielle $\frac{d^2y}{dt^2} = \alpha^2 \frac{d^2y}{dx^2}$ à l'acoustique et à l'optique, en faisant varier les conditions aux limites. 239
Kudelka (J.). — Les lois de la réfraction de la lumière. 100
Listing (J.-B.). — Sur une nouvelle espèce de vision stéréoscopique. 239
Lloyd (H.). — Sur la lumière réfléchie et transmise par les plaques minces. 307
Lommel (E.). — Phénomènes de diffraction de Fraunhofer. 59
Mach (E.). — Observations de stéréoscopie monoculaire. 209
Neumann (C.). — Sur le mouvement de l'éther dans les cristaux. 131
Royston-Pigott (G.-W.). — Sur l'application au microscope d'un chercheur pour les images aplanétiques, et sur ses effets pour augmenter le grossissement et la netteté des images. 369
Scott (J.). — Sur les miroirs comburants d'Archimède, avec quelques propositions concernant la concentration de la lumière, produite par des réflecteurs de différentes formes. 160
Stoney (J.). — Sur des anneaux aperçus dans des échantillons fibreux de spath calcaire. 308
— Sur la propagation des ondes... 308
Strutt (J.-W.). — Sur les valeurs de l'intégrale $\int_0^1 Q_n Q_{n'} d\mu$, Q_n et $Q_{n'}$ étant des fonctions de Laplace des ordres n et n', avec une application à la théorie de la radiation. 368
Tyndall (J.). — Sur l'action des rayons d'une grande réfrangibilité sur la matière gazeuse. 368
Veltmann (W.). — Hypothèse de Fresnel pour l'explication des phénomènes d'aberration. 90
— Sur la propagation de la lumière dans les milieux en mouvement. 281

Physique mathématique générale.

Andrews (Th.). — Sur la continuité des états gazeux et liquides de la matière. 365
Ball (R.-St.). — Sur les petites oscillations des corps solides autour d'un point fixe sous l'action de forces quelconques, et, en particulier, lorsque la pesanteur est la la seule force agissante. 308
Betti (E.). — Sur la détermination des températures variables d'une plaque limitée. 314
Bjerknes (C.-A.). — Sur le mouvement simultané de plusieurs corps sphériques dans un fluide incompressible. 284
Boileau (P.). — Mémoire sur les bases de la théorie du régime uniforme des courants liquides. 91
Boussinesq. — Écoulement d'un liquide par un orifice en mince paroi. 30, 32, 338
— Étude sur les surfaces isothermes et sur les courants de chaleur dans les milieux homogènes chauffés en un de leurs points. 96
— Intégration de l'équation différentielle qui peut donner une deuxième approximation dans le calcul rationnel de la poussée exercée contre un mur par des terres dépourvues de cohésion... 157

Pages.

théorique sur les lois trou-
périmentalement par M. Ba-
sur l'écoulement uniforme
dans les canaux décou-
.... 379
complémentaire au Mémoire
s ondes périodiques. Éta-
ment de relations générales
velles entre l'énergie in-
d'un corps fluide ou solide
pressions ou forces élas-
.... 379
(sir David). — Sur le
ment, l'équilibre et les
des bulles liquides....... 160
(A.-M.). — Détermination
ique des centres de pression
rfaces immergées dans un
homogène pesant........ 153
(A. de). — Note sur les
de rendre automatique le
d'écluses de navigation
au t. IX du *Journal de Ma-*
, 2e série................. 97
sur un appareil à faire des
ments au moyen des vagues
mer..................... 97
sur les appareils hydrau-
fonctionnant au moyen de
ration résultant du mouve-
acquis d'une colonne li-
.... 98
sur un appareil propre à
l'eau au moyen des vagues
mer ou des grands lacs.... 98
. — Sur une quantité ana-
au potentiel et sur un théo-
y relatif................. 338
Stuart. — Sur les formules
de l'équilibre intérieur
cylindre creux et d'une
e creuse................. 186
- Sur une brochure nouvelle
Hirn.................. 344
(R.). — Sur la formation
culaire des cristaux........ 307
ld (A.-K.). — Sur la théorie
otentiel................. 63
A.). — Théorie du baromètre
ance..................... 209
— Détermination de la vi-
avec laquelle est entraîné un
lumineux traversant un
u en mouvement......... 187
(K.-A.). — Sur la théorie
formation des ondes sonores
les tuyaux.............. 246
ller (G.). — Sur l'applica-

Pages.

tion de la méthode de Jacobi et d'Hamilton au cas de l'attraction suivant la loi électrodynamique de Weber..................... 276
Kirchhoff (G.-R.). — Sur les forces que peuvent paraître exercer l'un sur l'autre deux anneaux rigides, infiniment minces, dans un fluide. 188
Kurz (A.). — Sur la démonstration de la propagation de l'état vibratoire........................ 62
Lorenz (L.). — Sur les soulèvements et les affaissements....... 180
Lucas (F.). — Calcul des paramètres physiques et des axes principaux en un point quelconque d'un système atomique................ 66
Mathieu (E.). — Mémoire sur le mouvement de la température dans le corps renfermé entre deux cylindres circulaires excentriques et dans des cylindres lemniscatiques........................ 92
— Sur le mouvement vibratoire des plaques..................... 95
— Mémoire sur l'équation aux différences partielles du quatrième ordre $\Delta\Delta u = 0$ et sur l'équilibre d'élasticité d'un corps solide.... 97
Miller (W.-H.). — Sur la méthode cristallographique de Grassmann, et sur son emploi dans l'étude des propriétés géométriques générales des cristaux.................... 237
Moutier. — Sur l'angle de raccordement d'un liquide avec une paroi solide........................ 154
— Sur la formule de la vitesse du son.......................... 383
— Recherches sur l'état solide..... 383
Padova (E.). — Sur deux théorèmes de M. Neumann................ 333
Perry (St.-J.). — Sur l'état magnétique de l'ouest de la France, en 1870......................... 366
Quincke (G.). — Des phénomènes de capillarité sur la surface commune à deux fluides.................. 239
Rubenson (R.). — Est-il possible de prédire le temps?............. 178
Saint-Venant (de). — Rapport sur un Mémoire de M. *Boussinesq*, relatif à la théorie des ondes liquides périodiques..................... 64
— Démonstration élémentaire de la formule de propagation d'une onde ou d'une intumescence dans un canal prismatique, et remar-

Pages.

ques sur la propagation du son et de la lumière, ainsi que sur la distinction des rivières et des torrents........................ 343

Stokes (G.-G.). — Communication des vibrations d'un corps vibrant à un milieu gazeux............. 184

PROBABILITÉS.

Crofton (N.-W.). — Sur la théorie de la probabilité locale, appliquée à des lignes droites tracées au hasard sur un plan; les méthodes sont, en outre, étendues à la démonstration de certains théorèmes nouveaux du calcul intégral. 183

— Sur la preuve de la loi des erreurs des observations................ 366

Steen (Ad.). — Récréations mathématiques. (Tours de cartes)...... 369

Hoppe. — Corollaire au théorème de M. Crofton.................... 339

Lüroth (J.). — Sur la détermination de l'erreur probable........ 88

Minding (F.). — Sur un problème du calcul des probabilités, qui se présente dans l'observation des étoiles filantes................ 241

SÉRIES.

Binômes. — Fractions continues.

Almquist (P.-W.). — Démonstration des séries pour sin x et cos x..... 296

Baillaud. — Note sur les séries à termes positifs................ 28

Björling (C.-F.-E.). — Sur quelques propriétés des séries de Fourier et de leurs coefficients....... 246

D(au)g. — Sur le reste de la série de Taylor..................... 177

Dini (U.). — Sur les produits infinis......................... 314

Dostor (G). — Exercices sur le binôme de Newton.............. 280

Enneper (A.). — Relations entre deux séries infinies............. 276

Falk (M.). — Caractère de convergence d'une fraction continue à termes alternativement positifs et négatifs...................... 296

Graves (Ch.). — Sur un théorème relatif aux coefficients binomiaux. 310

Hamilton (sir W.-R.). — Remarque sur la Note de Graves : « Sur un théorème relatif aux coefficients binomiaux. »................... 310

Jadanza (N.). — Sur les progressions à deux et à trois différences...... 152

— Sur les progressions à n différences.......................... 152

Lindman (C.-F.). — Remarques sur quelques séries................ 101

Morgan (A. de). — Théorème concernant les séries neutres. 216

Pfeiffer (Ad.). — Recherches sur la convergence de la formule du binôme........................ 180

Schlaefli (L.). — Sur le développement de la période imaginaire pour le cas où le module de la fonction elliptique est infiniment petit........................ 375

Schlömilch (O.). — Sur la série harmonique...... 60

— Sur le paradoxe de Dirichlet dans les séries infinies.......... 279

Thiele (T.-N.). — Remarques sur les fractions continues.. 180

— Théorie des fonctions qui dérivent des fractions continues..... 370

Winckler (A.). — Sur le reste de la série de Taylor. (Extrait.)....... 210

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

A

Abbadie (d'), p. 319, 335, 377.
Abonné (un), p. 228.
Adams, p. 218.
Airy, p. 182, 184, 186, 218, 367.
Allégret, p. 215.
Almqvist, p. 296.
Andræ (von), p. 89.
Andrews, p. 365.
Angström, p. 293.
Aoust, p. 28, 213, 314, 372.
Argelander, p. 90, 274, 280.
Armenante, p. 153, 154.
Aschieri, p. 220, 332.
Åstrand, p. 246.
Auwers, p. 187.

B

Bach, p. 29.
Baillaud, p. 28.
Ball, p. 308.
Baltzer, p. 80.
Bashforth, p. 184.
Battaglini, p. 152, 153, 220, 286.
Bauer, p. 25.
Baur, p. 60, 62.
Baxendell, p. 163.
Becker (J.-C.), p. 59, 61.
Beltrami, p. 29, 136, 189, 219, 314, 315.
Bertini, p. 153.
Bertrand, p. 29, 41, 63, 189, 316, 344.
Bessel (A.), p. 129.
Besso, p. 153.
Betti, p. 312, 314.
Bienaymé, p. 381.
Bierens de Haan, p. 187.
Bitonti, p. 224, 333, 334.
Bjerknes, p. 284.
Björling (C.-F.-E.) jr., p. 100, 246, 247.
Björling (E.-G.), p. 246, 297.
Boguslaw von Prondzynski, p. 90.
Boije, p. 296.
Boileau, p. 97.
Bois-Reymond (du), p. 187.
Boltzmann, p. 208, 209, 210, 211, 276.
Boncompagni, p. 98, 99.
Boole, p. 218.
Booth, 314.
Bouniakowsky, p. 240.
Bouquet, p. 340.
Bourget, p. 66.
Boussinesq, p. 30, 32, 96, 157, 338, 379.
Breen, p. 89.
Breton (de Champ), p. 214.
Bretschneider, p. 100, 104.
Brewster, p. 160.
Brill, p. 129, 132, 372.
Brioschi, p. 66, 188, 239, 311, 313.
Briot, p. 85.
Brothers, p. 163.
Bruhns, p. 171.
Burmester, p. 61.
Bustelli, p. 153

C

Caligny (de), p. 97, 98.
Calzolari, p. 153, 154, 220.
Cantor, p. 60.
Casey, p. 307, 311, 315.
Casorati, p. 16, 188, 370.
Cassani, p. 154, 332, 334.
Catalan, p. 197, 282, 341.
Cauchy, p. 16, 105, 312.

Méthodes de transformation. — Transformations rationnelles.

Pages.
Bertini (E.). — Nouvelle démonstration de ce théorème : deux courbes corrélatives projectivement sont du même genre...... 153
Clebsch (A.). — Sur les courbes qui correspondent aux fonctions abéliennes de la classe $p = 2$.. ...: 129
— De la représentation sur le plan des surfaces algébriques, et en particulier des surfaces du quatrième et du cinquième ordre... 129
— Remarques sur la géométrie des surfaces gauches du troisième ordre.. 136
— Sur la représentation des surfaces algébriques.................... 239
Cremona (L.). — Sur la transformation des courbes hyperelliptiques. 188
— Représentation d'une classe de surfaces gauches sur un plan, et détermination de leurs courbes asymptotiques................. 313
Darboux (G.). — Note sur un Mémoire de M. Dini............... 383
— Transformation des figures et application à la construction d'une surface du deuxième ordre déterminée par 9 points............. 27
Jung (G.) et Armenante (A.). — Sur les fonctions birationnelles ou univoques (*eindeutigen*), et sur les courbes normales et sous-normales du genre p............... 154
Korndörfer (G.). — De la représentation sur un plan d'une surface du quatrième ordre, avec un ou plusieurs points singuliers....... 136
Lie (S.). — Sur une transformation géométrique.................... 382
Nöther (M.). — Sur la théorie des fonctions algébriques de plusieurs variables complexes............. 239
Painvin (E.). — Note sur la transformation homographique......... 159
Regis (D.). — Sur une application des principes d'homologie à la perspective.................... 332
Weyr (Ed.). — Étude analytique de la corrélation quadratique......... 62
Zeuthen. (H.-G.). — Sur les points fondamentaux de deux surfaces, dont les points se correspondent un à un....................... 156

Géométrie linéaire. — Complexes.

Aschieri (F.). — Sur un complexe du second degré............... 220
— Sur un complexe du second degré. — Génération géométrique des complexes du premier degré. 332
Battaglini (G.). — Sur les systèmes de droites du second degré...... 153
Cayley (A.). — Sur les six coordonnées d'une ligne................ 217
Janni (G.). — Exposition de la nouvelle Géométrie de Plücker...... 333
Klein (F.). — Sur la théorie des complexes de lignes du premier et du second degré.................... 239
Plücker (J.). — Neue Geometrie des Raumes, u. s. m................ 73
— Théorie générale des surfaces réglées; leur classification et leur construction 313
Zeuthen (H.-G.). — Note sur un système de coordonnées linéaires dans l'espace.................. 132
— Sur un nouveau système de coordonnées dans l'espace......... 283

Géométrie descriptive, graphique.

Matzek. — Sur la construction du plan tangent à une surface de révolution....................... 208
Pantanelli (D.). — Dessin axonométrique......................... 288
Schlesinger (J.). — Les surfaces projectives. — Contribution à la constitution de la Géométrie descriptive dans le sens de la nouvelle Géométrie.................... 208
— Représentation des projections collinéaires et des principes projectifs sous une forme appropriée à la géométrie descriptive....... 209
— Représentation des projections collinéaires dans l'espace par des

H

Habich, p. 315.
Hachette, p. 382.
Hall, p. 280.
Halphen, p. 65.
Hamilton (sir W.-R.), p. 309, 310.
Handl, p. 209.
Hankel, p. 60, 62, 117, 135.
Hansen (Chr.), p. 179, 180.
Hansen (P.-C.-V.), p. 180, 369, 370.
Harbordt, p. 129.
Harley, p. 163.
Haton de la Goupillière, p. 270.
Haughton, p. 306, 308, 309.
Heelis, p. 163.
Heger, p. 277.
Heis, p. 33, 364.
Helmert, p. 60.
Helmholtz, p. 238.
Hennessy, p. 308.
Hermite, p. 313, 314, 320, 373.
Hesse (O.), p. 33, 196, 303.
Hildebrandsson, p. 177.
Hochheim, p. 276.
Hoek, p. 88, 187.
Hoffmann (L.), p. 137.
Holmgren (Hj.), p. 243, 244.
Holmgren (K.-A.), p. 246.
Holten, p. 285.
Holzmüller, p. 276.
Hoppe, p. 62, 248, 339.
Horvath, p. 60.
Hoüel, p. 223, 339.
Huggins, p. 184.
Hultman, p. 177, 178, 295, 296.

I

Ianichefsky, p. 99.
Imchenetsky, p. 101, 164.
Isè, p. 219.

J

Jacobi (C.-G.-J.), p. 27.
Jacoli, p. 99.
Jadanza, p. 152.
Janni, p. 152, 287, 333.
Janssen, p. 382.
Jenkin, p. 161.
Jensen, p. 370.
Jevons, p. 368.
Jochmann, p. 63.
Jonquières (de), p. 132.
Jordan (C.), p. 64, 92, 128, 136, 215, 313, 315, 319.
Jordan (W.), p. 89, 90, 364.
Jung, p. 153, 154, 333.

K

Kayser, p. 88.
Kiechl, p. 211.
Kinkelin, p. 135.
Kirchhoff, p. 188.
Kirkman, p. 163.
Klein, p. 239, 335, 338.
Klinkerfues, p. 90, 229, 281, 302.
Knott, p. 163.
Königsberger, p. 128.
Korndörfer, p. 136.
Kötteritzsch, p. 61, 275.
Kronecker, p. 187.
Krueger, p. 274.
Krumme, p. 62.
Kudelka, p. 100.
Kurz, p. 62.

L

Lambert (G.), p. 65.
Lamé, p. 189, 224.
Lassell, p. 238.
Laussedat, p. 33, 348.
Le Besgue, p. 336.
Leffler, p. 179.
Lehmann, p. 88.
Lenz, p. 241.
Leppig, p. 90.
Le Roy, p. 99.
Le Verrier, p. 157.
Levy (M.), p. 271, 338.

Pages.
présentation proposée par M. Sylvester pour le mouvement d'un corps rigide libre, par celui d'un ellipsoïde dont le centre est fixe, et qui roule sur un plan non poli. 365
GRETSCHEL (H.). — Démonstration élémentaire de la formule de la durée de l'oscillation d'un pendule simple.................... 248
GROSSO (R. DEL). — Mémoire sur l'attraction des sphéroïdes. 153, 224, 332
GRUBE (F.). — Attraction d'un segment limité par une surface du second degré et par deux plans perpendiculaires à son axe...... 61
GRUNERT (J.-A.). — Sur le centre de gravité du trapèze, et en particulier sur sa détermination graphique........................ 101
HAMILTON (sir W.-R.). — Sur un centre général des forces appliquées.......................... 310
HATON DE LA GOUPILLIÈRE (J.-N.). — Recherches sur les centres de gravité.......................... 270
HOPPE (R.). — De la courbe tautochrone dans le cas du frottement. 62
JORDAN (C.). — Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants...... 313
KRUMME (W.). — Problèmes sur le plan incliné.................... 62
LORENZ (L.). — Sur la force centrifuge.......................... 369
LUCAS (F.). — Nouvelles propriétés de la fonction potentielle....... 339
MOST (R.). — Sur le centre de gravité du contour des figures planes et solides les plus simples....... 248
MYLORD (H.). — Sur l'ellipsoïde central et les axes principaux....... 181
NEUMANN (C.). — Note sur le pendule cycloïdal...................... 135
PADOVA (E.). — Application de la méthode d'Hamilton au mouvement d'un point sur une surface...... 223
— Du mouvement d'un ellipsoïde dans un fluide incompressible et indéfini...................... 333

Pages.
PETERSEN (J.). — Application du principe des vitesses virtuelles à un cas où il existe des frottements......................... 180
— Sur les corps flottants.......... 284
PURSER (J.). — Sur l'application des équations du mouvement relatif, de Coriolis, au problème du gyroscope......................... 309
RADAU (R.). — Sur la rotation des corps solides.................... 29
— Considérations sur le théorème des aires.......................... 88
— Nouvelles remarques sur le problème des trois corps........... 89
— Sur une propriété des systèmes qui ont un plan invariable....... 92
SAINT-VENANT (DE). — Rapport sur cinq Mémoires de M. *Félix Lucas*, intitulés : *Recherches concernant la Mécanique des atomes*........ 64
SCHLAEFLI (L.). — Sur le mouvement d'un pendule, quand la droite passant par le point de suspension et par le centre de gravité est pour ce point le seul axe principal d'inertie qui soit donné de position. 312
SOMOF (J.). — Note sur l'attraction exercée par une couche matérielle très-mince sur un point de sa surface.......................... 240
— Note sur la solution, donnée par Abel, d'un problème de mécanique.......................... 241
TAIT. — Sur la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.... 161
WEILER (A.). — Sur l'élimination du nœud dans le problème des trois corps..................... 89, 90
— Note sur le problème des trois corps............................ 96
WIENER (Chr.). — Sur le mouvement d'une figure plane qui se meut en restant semblable à elle-même et de manière que trois de ses droites passent par trois points fixes..... 312

Mécanique physique et expérimentale.

BASHFORTH (F.). — Sur la résistance de l'air du mouvement des projectiles allongés, pour diverses formes de têtes................ 184
BOLTZMANN (L.). — Sur la résistance de deux cylindres creux superposés.......................... 210
COHEN STUART. — De la pression

Petterson, p. 247.
Pfeiffer, p. 180.
Phillips (E.), 154, p. 377.
Phillips (J.), p. 184.
Phragmén, p. 178.
Piarron de Mondésir, p. 38, 32, 33.
Plücker, p. 73, 313.
Pollock, p. 184.
Poncelet, p. 336.
Potocki, p. 99.
Powalky, p. 89, 363.
Prey, p. 280.
Puiseux, p. 195.
Purser, p. 309.

Q

Quesneville, p. 212.
Quincke, p. 239.

R

Radau, p. 29, 88, 89, 92.
Rankine (M.). p. 162, 367.
Rayet, p. 341.
Regis, p. 332.
Renny, p. 306, 307.
Reye, p. 133, 276, 314, 315.
Ribaucour, p. 64.
Riefler, p. 281.
Riemann, p. 26, 377.
Roberts (M.), 312, 314, 315, 373, 377.
Roberts (W.), p. 377.
Robinson (T.-R.), p. 185.
Röhrs, p. 218.
Rolland, p. 269.
Roscoe, p. 368.
Rosén, p. 241, 292.
Royston-Pigott, p. 369.
Rubenson, p. 178.
Russel, p. 163.

S

Sabine, p. 184, 367.
Sacchetti, p. 219.
Saint-Venant (de), p. 32, 63, 64, 66, 96, 156, 213, 343.
Salicis, p. 382.
Salmon, p. 54, 307.
Sannia, p. 329.
Sardi, p. 152, 153, 154.
Savitch, p. 240, 241.
Schell, p. 61, 208.
Schering, p. 128, 238.
Schjellerup, p. 89.
Schläfli, p. 312, 313, 314, 374, 375.
Schlesinger, p. 208, 209, 210.
Schlömilch, p. 50, 60, 278, 279.
Schmidt (G.), p. 100.
Schmidt (J.), p. 88, 89, 365.
Schönfeld, p. 87, 89, 90, 364.
Schramm, p. 313, 372.
Schubert (E.), p. 89, 281, 364, 365.
Schubert (H.), p. 63, 278.
Schulhof, p. 281.
Schur, p. 88.
Schwarz, p. 374.
Scott (J.), p. 160.
Secchi, p. 30, 88, 334, 344, 378.
Sédillot, p. 99.
Seeling, p. 101.
Seidelin, p. 369.
Serret (J.-A.), p. 28, 340, 378.
Serret (P.), p. 9.
Seydler, p. 281.
Siebeck, p. 314.
Simon, p. 27.
Smith (H.-J.-St.), p. 181, 315, 373, 375.
Smith (W.-R.), p. 161.
Somof, p. 240, 241.
Sonderhof, p. 249.
Sonrel, p. 344.
Spieker, p. 248.
Spitz, p. 331.
Spörer, p. 87, 90, 280, 364.
Spottiswoode, p. 155, 163, 213, 368.
Stamkart, p. 186.
Stark, p. 281.
Staudigl, p. 60, 209.
Steen, p. 178, 179, 282, 369, 370.
Stefan, p. 210.
Stephan, p. 363.
Stern, p. 26, 239.
Stewart (B.), 185, 368.
Stokes, p. 184, 218.
Stolz, p. 209.
Stoney, p. 308, 309.
Strutt, p. 368.
Struve (O.), p. 240, 242.
Sturm (R.), p. 136, 371.
Sylow, p. 285.

T

Tait, p. 161.
Tardy, p. 377.
Thalén, p. 177, 178.
Theorell, p. 247.
Thiele, p. 180, 370.
Thomae, p. 59, 61.
Thomson (W.), p. 160, 163.
Tietjen, p. 88, 89.
Tisserand, p. 155.
Tissot, p. 272.
Todhunter, p. 216.
Toeplitz, p. 61.
Tognoli, p. 288, 331.
Trudi, p. 153, 315.
Tychsen, p. 179.
Tyndall, p. 368.

U

Unferdinger, p. 208, 210, 249, 279.

V

Valeriani, p. 154.
Valson, p. 99, 105, 215.
Vecchio, p. 152.
Veltmann, p. 90, 281.
Versluys, p. 100, 249.
Villarceau (Y.), p. 336, 339, 378, 383.
Vito, p. 288.
Volpicelli, p. 375.

W

Wackerbarth, p. 247, 296.
Waltenhofen (von), p. 211.
Warren de la Rue, p. 185, 368.
Weber (H.), p. 25, 124.
Weierstrass, p. 187.
Weiler, p. 89, 90, 96.
Weingarten, p. 87, 90.
Weiss (E.), p. 211, 363, 365.
Weyr (Ed.), p. 24, 62, 208.
Weyr (Em.), p. 62, 63, 208, 209.
Wiener, p. 59, 175, 312.
Winckler (A.), p. 209, 210, 211.
Winnecke, p. 281, 337, 363.
Wittstein, p. 89.
Wittwer, p. 60, 63, 277.
Wolf (C.), p. 334, 341.
Wolf (R.), p. 99, 156.

Y

Young, p. 311.

Z

Zachariæ, p. 180.
Zannotti, p. 153, 223.
Zeuthen, p. 132, 139, 156, 180, 283, 3 375.
Zöllner, p. 89, 363, 365.

FIN DU TOME PREMIER.

Paris. — Imprimerie de Gauthier-Villars, quai des Augustins, 55.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,

AVEC LA COLLABORATION

DE MM. ANDRÉ, LOEWY, PAINVIN, RADAU, SIMON ET TISSERAND,

SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

TOME DEUXIÈME. — ANNÉE 1871.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1871

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. CHASLES........................ *Président.*

BERTRAND.....................	*Membres du Comité.*
DELAUNAY.....................	
PUISEUX........................	
SERRET..........................	

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

CHASLES, membre de l'Institut de France. — RAPPORT SUR LES PROGRÈS DE LA GÉOMÉTRIE (¹), publication faite sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique. Paris, Imprimerie nationale; 1870. — Gr. in-8°, 381 pages. Prix : 15 fr.

Nous avons aujourd'hui la bonne fortune de signaler à nos lecteurs un nouveau livre, un ouvrage très-important de M. Chasles. On se souvient qu'à l'époque de la dernière exposition universelle, M. le ministre de l'Instruction publique avait demandé aux savants les plus autorisés un Rapport d'ensemble sur les progrès qu'avait faits, en France, la branche dont ils s'occupaient plus spécialement. C'était, en vérité, une heureuse idée, puisqu'elle nous a valu plusieurs travaux très-intéressants et, en dernier lieu, l'ouvrage dont nous venons de transcrire le titre et dont il suffit évidemment d'annoncer la publication à nos lecteurs. Nous nous contenterons de dire que le *Rapport sur les progrès de la Géométrie* peut être considéré comme une suite précieuse de l'*Aperçu historique*. Les travaux des géomètres français y sont analysés avec la clarté et la hauteur de vues qui appartiennent à M. Chasles. On voit d'ailleurs que l'illustre géomètre n'a négligé aucune occasion de citer les travaux des savants étrangers,

---

(¹) Ce Rapport fait partie du *Recueil de Rapports sur l'état des Lettres et les progrès des Sciences en France*.

toutes les fois qu'ils se rapportent au sujet dont il a à s'occuper. Par sa nature même, la nouvelle œuvre de M. Chasles nous sera très-utile; nous aurons l'occasion de lui faire de fréquents emprunts et d'indiquer bien des questions historiques dont M. Chasles nous a donné la solution. G. D.

PONCELET (J.-V.). — INTRODUCTION A LA MÉCANIQUE INDUSTRIELLE, PHYSIQUE ET EXPÉRIMENTALE; 3e édition, publiée par M. Kretz, ingénieur en chef des Manufactures de l'État. Paris, Gauthier-Villars; 1870. — In-8°, avec 3 planches sur cuivre, XIII-755 pages. Prix : 12 fr.

La première édition de l'*Introduction à la Mécanique industrielle* (1829), formant un petit in-8°, n'était guère, en substance, que la reproduction des leçons professées aux ouvriers par l'auteur, à l'Hôtel de ville de Metz. Des considérations physiques et philosophiques d'une grande netteté, des méthodes géométriques originales et assez simples pour faire connaître les principes fondamentaux de la Mécanique à des personnes peu versées dans les Mathématiques, l'heureuse définition du travail, tel est, à peu près, le contenu de cette édition qui n'eut pas, au delà de Metz, un grand retentissement.

Il n'en fut pas de même de la seconde, et, quoique bien jeune alors, je me rappelle la sensation que son apparition produisit chez les professeurs et les ingénieurs.

L'élégance et la simplicité des démonstrations, appuyées par des exemples habilement choisis parmi les faits les plus connus de tous, la clarté des développements relatifs à la nature du travail, à sa transformation en force vive, la profondeur des considérations sur la constitution intime des corps, sur le mode d'action des forces, le soin minutieux avec lequel ont été rapportées les données expérimentales, ont fait de ce livre un modèle qui souvent a été imité, sans avoir été jamais égalé. Aujourd'hui encore, soit qu'on relise les cours professés dans nos grandes écoles, soit que l'on parcoure les traités les plus élémentaires, on rencontre partout des emprunts à l'ouvrage du maître; il a été l'une des causes les plus puissantes de la vulgarisation des notions exactes de la Mécanique industrielle et des progrès de la Mécanique appliquée. D'un autre côté, les Tables des coefficients

de dilatation, des densités, des résistances ou de l'élasticité des matériaux, du frottement dans ses diverses conditions, du travail des moteurs animés, de l'effet utile des machines motrices, de la résistance des milieux, etc., présentent un ensemble de documents qui ont été le point de départ, et, le plus souvent, la source principale de tous les recueils de données pratiques, des aide-mémoire qui se trouvent entre les mains des praticiens.

Cette deuxième édition disparut rapidement, et les bibliothèques de toute une génération d'hommes spéciaux furent privées de ce précieux ouvrage.

Enfin, une troisième édition, annotée par M. Kretz, vient de paraître à la librairie de M. Gauthier-Villars. Il serait trop long d'analyser les nombreux documents que renferme ce volume, et je ne m'occuperai que des annotations par lesquelles M. Kretz a mis l'ouvrage au niveau des connaissances acquises, jusqu'à ce jour, dans les branches de la Physique qui se rattachent à la Mécanique industrielle.

Les Tables de la deuxième édition, donnant les poids spécifiques des corps solides, ont été étendues de manière à comprendre les chiffres se rapportant aux substances qui sont le plus employées dans la pratique; les chiffres relatifs aux poids spécifiques des gaz ont été remplacés par ceux qui résultent des expériences de M. Regnault.

M. Kretz a dû accompagner l'article intitulé : « Toute production de travail suppose une consommation » d'une Note dans laquelle il fait un résumé très-précis et très-clair de la théorie mécanique de la chaleur, qui est l'une des branches les plus récentes des sciences physico-mathématiques.

Tout ce qui est relatif à *la communication du mouvement par les forces et à la transformation de travail en force vive,* l'une des plus belles créations de Poncelet, n'a pas eu à subir d'additions.

Dans le chapitre consacré aux chocs, et au sujet des applications au tir des armes à feu, M. Kretz mentionne les travaux de Piobert sur l'inflammation de la poudre, les résultats des recherches de Navez et de Duchemin sur les vitesses initiales, et enfin la formule récente de M. Sarrau pour représenter ces vitesses.

Dans la détente d'un gaz, Poncelet admettait la loi de Mariotte. M. Kretz rappelle à ce sujet la loi déduite de la Thermodynamique qui doit être substituée à la précédente, lorsque le fluide n'éprouve ni perte ni gain de chaleur. Il appelle l'attention sur une Note qui

prouve que, dès 1830, Poncelet se préoccupait de la corrélation qui existe entre la chaleur et la quantité de travail qu'elle peut produire.

La belle méthode de quadrature par approximation de Poncelet, telle qu'il l'a donnée dans ses leçons à la Sorbonne, et la modification qu'y a apportée M. Parmentier, ont été ajoutées au texte, à la suite de la démonstration géométrique de la formule de Simpson.

L'article intitulé : « Du travail produit par l'action mécanique de la vapeur d'eau » est accompagné de Notes très-intéressantes sur l'application de la Thermodynamique à la théorie des machines à vapeur, sur les machines considérées en elles-mêmes, et enfin sur les résultats des expériences les plus récentes dont elles ont été l'objet.

Le chapitre relatif au travail développé par les moteurs animés n'a reçu, et n'avait à recevoir aucune annotation. Toutes les idées émises à ce sujet par Poncelet sont devenues classiques.

Le chapitre consacré à la résistance des matériaux a été l'objet de plusieurs Notes relatives aux résultats des expériences sur l'élasticité et la résistance à la rupture des métaux (Wertheim), des bois (MM. Chevandier et Wertheim), de la fonte et du fer (M. Hodgkinson), des tôles (M. Fairbairn), des courroies en cuir (M. Kretz). Les expériences de M. Kirchhoff sur l'acier fondu et de M. Cornu sur le cristal sont également indiquées dans les Notes. Ce chapitre, l'un des plus beaux de l'ouvrage, est relatif à la traction et à la compression longitudinale des prismes, aux vibrations résultant de la mise en charge, à la *force vive élastique*, etc.

Dans le dernier chapitre, M. Kretz fait connaître les résultats auxquels sont arrivés M. Hirn sur l'influence des enduits dans le frottement de glissement, et Dupuit dans le frottement de roulement; il fait connaître un procédé pratique très-simple pour apprécier le frottement dans les tourillons, et la valeur relative des divers enduits; il mentionne les recherches de Darcy sur le mouvement de l'eau dans les tuyaux, de MM. de Saint-Venant et Wantzel et de M. Pecqueur sur l'écoulement des gaz; les formules de M. Didion, de M. Hélie, de la Commission du tir (1856-1857), de M. Boulangé sur la résistance de l'air, et dit quelques mots des recherches de MM. Magnus, Rutzky, Mayewski.

L'essai sur une *Théorie de la résistance des fluides indéfinis*, qui termine l'ouvrage, a été reproduit tel qu'il se trouvait dans la seconde édition.

En résumé, les idées philosophiques, si justes et si profondes, émises par l'auteur, les questions importantes traitées par lui, les documents si nombreux qui sont empruntés à l'expérience, rendent l'ouvrage de Poncelet, annoté par M. Kretz, indispensable aux ingénieurs et aux professeurs de Mécanique pure et appliquée.

H. RESAL.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

SIMON (CH.), professeur au lycée Louis-le-Grand. — MÉMOIRE SUR LA ROTATION DE LA LUNE ET SUR LA LIBRATION RÉELLE EN LATITUDE (*Annales de l'École normale*, t. III, p. 253). — MÉMOIRE SUR LA ROTATION DE LA LUNE (*Annales de l'École normale*, t. VI, p. 69).

PREMIER MÉMOIRE.

Le phénomène de la rotation de la Lune consiste essentiellement en ce que l'axe instantané de rotation reste toujours compris dans l'un des plans principaux du sphéroïde lunaire : c'est un cas singulier de la théorie générale de la rotation des corps, qui se trouve réalisé dans la nature.

Soient OX_1, OY_1, OZ_1 les axes principaux du sphéroïde lunaire; OX_1 étant l'axe du plus petit moment d'inertie, qui se dirige vers la Terre; OZ_1 étant l'axe du plus grand moment d'inertie, ou l'axe de l'équateur géométrique, et OY_1 l'axe moyen. L'axe instantané de rotation oscille, de part et d'autre de OZ_1, dans le plan Z_1Y_1; mais cette oscillation se décompose en deux autres, dont la première joue le rôle de variation séculaire, par rapport à la seconde.

La première a pour argument la distance moyenne du périgée lunaire au nœud ascendant de l'orbite, pour demi-amplitude $94'',15$, et pour période 2191 jours.

La seconde a pour argument la distance moyenne de la Lune au nœud ascendant de son orbite, pour demi-amplitude $42'',8$, et pour période $27^j,218$.

De sorte que, si l'on appelle E et φ ces deux arguments, et si l'on

représente par OU l'axe instantané de rotation, on a

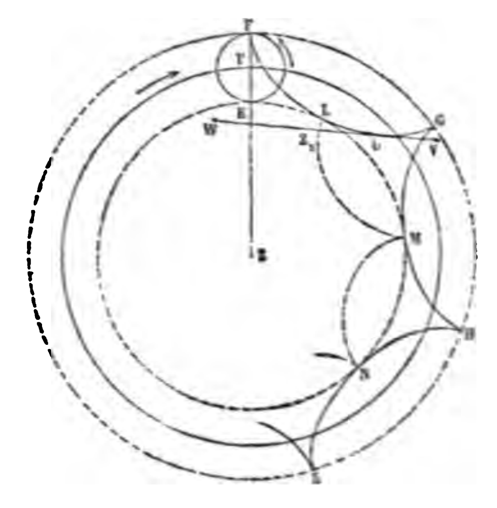
$$\text{angle } Z_1OU = -(94'',15)\cos E - (42'',8)\cos\varphi.$$

Il résulte de là les conséquences suivantes :

Prenons pour centre de la sphère céleste le centre de gravité O de la Lune ; soit Z le pôle boréal de l'écliptique ; soit $h = 1^\circ 28' 45''$ l'inclinaison moyenne de l'équateur lunaire sur l'écliptique ; posons, pour abréger, $2\zeta = 42'',8$, et de Z, comme pôle, décrivons un cercle avec la distance polaire $h + \frac{3\zeta}{2}$. Le pôle instantané U décrira sur la sphère céleste une suite de cycloïdes ayant pour bases des arcs

$$FG = GH = HK = \ldots = \pi\zeta,$$

que l'on peut regarder comme rectilignes ; et, par conséquent, l'axe instantané OU décrira un cône ayant pour directrice cette suite de cycloïdes. (L'inclinaison moyenne de l'équateur *apparent* n'est pas h, mais $h + \zeta$.)



$ZF = h + \frac{3\zeta}{2}$;

$h = 1^\circ 28' 45''$ est l'inclinaison moyenne de l'équateur *géométrique* sur l'écliptique ;

$h + \zeta = 1^\circ 28' 45'' + 21'',4$ est l'inclinaison moyenne de l'équateur *apparent* ou instantané ;

ζ est le diamètre du cercle générateur de l'épicycloïde.

Pour nous rendre compte de la manière dont le mouvement s'accomplit, imaginons d'abord que, pendant la moitié de la période de $27^j,218$, l'argument E reste constant : l'axe OU décrira, pendant ce temps, dans le plan mobile Z_1Y_1, un secteur VOW, correspondant à un arc $VW = 4\zeta$. On produira le mouvement qui a lieu pendant ce temps, en faisant rouler, sans glisser, ce secteur plan sur le cône cycloïdal; le pôle instantané U sera le point de contact de l'arc VW et de la base du cône.

Mais l'argument E varie d'une manière continue. On aura égard à cette variation en faisant rouler et glisser en même temps le secteur plan VOW sur le cône cycloïdal. La vitesse angulaire du glissement est facile à calculer.

M. Simon montre dans son Mémoire que les anciennes observations de la libration sont tout à fait insuffisantes pour vérifier cette théorie, et indique les observations qu'il faudrait faire. Elles sont difficiles, mais nous ne les croyons pas impossibles.

DEUXIÈME MÉMOIRE.

Il résulte du premier Mémoire que, si l'on appelle A, B, C les moments d'inertie du sphéroïde lunaire, par rapport aux axes principaux OX_1, OY_1, OZ_1;

n le moyen mouvement de révolution ou de rotation;

γ l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique;

θ l'inclinaison de l'équateur lunaire sur l'écliptique;

ω la longitude du nœud ascendant de l'orbite,

on a dû avoir à l'origine du mouvement (plus exactement, au moment où la coïncidence des nœuds de l'orbite et de l'équateur s'est établie) la relation

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{3}{2} n \frac{C-A}{B}\left(1+\frac{\gamma}{\theta}\right), \tag{1}$$

sinon rigoureusement, du moins à très-peu près. Car, si cette condition n'eût pas été remplie, le nœud ascendant de l'équateur oscillerait de part et d'autre du nœud descendant de l'orbite, dans une période de 8740 jours environ; mais cette oscillation est nulle ou insensible.

D'un autre côté, on sait depuis longtemps que, si les deux moyens

mouvements de révolution et de rotation n'eussent pas été égaux à l'origine (rigoureusement ou à très-peu près), il y aurait dans la libration en longitude une inégalité dont la période serait de 665 jours environ. Cette inégalité, comme la précédente, est nulle ou insensible.

Voilà donc deux relations qui se rapportent à l'état initial et qui doivent être satisfaites dans toute hypothèse qu'on voudra imaginer. Il paraît naturel d'examiner si elles sont ou non satisfaites dans l'hypothèse de Laplace.

La condition relative à l'égalité des moyens mouvements de révolution et de rotation ne présente pas de difficulté; mais il n'en est pas de même de l'équation (1).

M. Simon a été conduit à discuter avec rigueur (ce qui n'avait jamais été fait) la principale objection qu'on a élevée contre l'hypothèse de Laplace, à savoir la grande inclinaison des équateurs des planètes sur le plan du maximum des aires. Après avoir levé cette objection, il montre que les conditions initiales précédemment énoncées sont des conséquences naturelles de l'hypothèse, en ayant égard, bien entendu, à tous les faits observés et aux lois de la Mécanique. Mais la démonstration ne paraît guère susceptible d'être analysée : c'est une question de calcul, traitée d'ailleurs d'une manière qui ne laisse prise à aucune objection.

C'est surtout à cause de cette dernière partie que nous avons jugé utile de revenir sur les Mémoires importants de M. Ch. Simon. Ces travaux nous paraissent réellement intéressants : l'hypothèse de Laplace [1] n'a jamais été examinée d'une manière aussi rigoureuse. L'étude qui précède, indépendamment des résultats importants pour la théorie de la Lune, nous paraît une des plus sérieuses qui aient été publiées sur cette hypothèse, qui a tenu jusqu'ici plus de place dans les rêveries des philosophes que dans les études des savants.

G. D.

---

(1) Le premier auteur de cette hypothèse est, en réalité, le philosophe Kant, qui était, comme on sait, très-versé dans les Mathématiques.

TIDSSKRIFT FOR MATHEMATIK, udgivet af H.-G. ZEUTHEN. Tredie Række [1].

T. I, 1871, nos 1-4.

ZEUTHEN (H.-G.). — *Sur le principe de dualité.* (11 p.)

Dans ce premier article, l'auteur traite de la dualité dans les propriétés descriptives des figures.

OPPERMANN (L.). — *Sur les quadratures.* (16 p.)

L'auteur expose, avec des modifications qui lui sont propres, la méthode de Gauss pour le calcul des intégrales définies.

TYCHSEN (C.). — *Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients variables.*

Intégration de l'équation

$$y'' + \frac{k}{x}y' + \left[a + \frac{k(k-2) - 4n(n+1)}{x^2}\right]y = 0,$$

dans le cas de n entier et positif.

MYLORD (H.). — *Application des coordonnées elliptiques à la détermination du système des trajectoires obliquangles pour certains systèmes de courbes et de surfaces.* (17 p.)

L'auteur applique sa méthode aux systèmes suivants : coniques confocales ; lignes de courbures d'une surface de second degré ; surfaces confocales du second degré.

STEEN (Ad.). — *Note sur les surfaces de révolution.* (3 p.).

Si l'on considère une surface de révolution comme engendrée par une sphère mobile, dont le rayon est l'ordonnée par rapport à l'axe de révolution d'une certaine courbe directrice, les positions successives de la sphère ne se coupent pas toujours, et le point de rencontre de la directrice avec l'axe ne se trouve pas toujours sur la courbe méridienne.

LORENZ (L.). — *Sur un problème du jeu de cartes.*

---

[1] *Journal de Mathématiques*, publié par H.-G. ZEUTHEN, 3e série. Copenhague, chez E. Jespersen, successeur de O. Schwartz. (Voir *Bulletin*, t. I, p. 179 et 369.)

Zeuthen (H.-G.). — *Rectification d'une remarque de Jacobi.*

Il s'agit d'une assertion relative au mouvement d'un point sur une surface de révolution animée d'un mouvement de rotation uniforme sautour de son axe (« De motu puncti singulari »; *Journal de Crelle*, t. **24**, p. 18). Jacobi dit, à tort, qu'il suffit, pour tenir compte du mouvement de la surface, d'ajouter à la composante de la force motrice perpendiculaire à l'axe, la force centrifuge, proportionnelle à la distance du point à l'axe.

Mylord (H.). — *Détermination du système des trajectoires obliquangles pour certains systèmes de courbes et de surfaces.* (5 p.)

Suite d'un article précédent.

Tychsen (C.). — *Sur une intégrale multiple, qui se rencontre dans la méthode des moindres carrés.* (3 p.)

Petersen (J.). — *Sur un problème du jeu de cartes.* (2 p.)

Petersen (J.). — *Sur l'équation indéterminée* $x^2+cy^2=A$. (10 p.)

Möller (C.-F.-C.). — *Quelques remarques sur l'enseignement de la stéréométrie élémentaire.* (3 p.)

Steen (Ad.). — *Démonstration élémentaire de la formule de Simpson.* (2 p.)

Oppermann (L.). — *Augustus de Morgan.* (2 p.)

Notice sur ce géomètre philosophe, né le 27 janvier 1806, à Madura (Inde), mort le 18 mars 1871, à Camden-town (faubourg de Londres).

Lorenz (L.). — *Sur la théorie des nombres.* (18 p.)

Recherches sur le nombre des solutions de l'équation indéterminée $m^2+cn^2=N$, c et N étant des entiers donnés, m et n des entiers inconnus.

L'auteur cherche à déterminer, par une voie purement analytique, le nombre des solutions de l'équation indéterminée

$$m^2+cn^2=N,$$

pour certaines valeurs données de c, savoir, $c=1, 2, 3, 4$. Il exprime

d'abord la série

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{m^2+cn^2}, \quad (q<1),$$

au moyen du produit infini connu

$$\prod_1^{\infty}{}_k \frac{(1-q^{2k})(1+q^{2k-1})(1-q^{2kc})(1+q^{(2k-1)c})}{(1+q^{2k})(1-q^{2k-1})(1+q^{2kc})(1-q^{(2k-1)c})},$$

puis il développe ce produit en une série d'une autre forme que la série primitive. Il y parvient à l'aide de la décomposition de ce produit infini sous forme de fractions. La fraction

$$\frac{1}{2-x}\prod_1^{\infty}{}_k \frac{1-q^{2k-1}x+q^{4k-2}}{1-q^{2k}x+q^{4k}} = \mathrm{P}(x)$$

donne, par sa décomposition,

$$\mathrm{P}(x) = \prod_1^{\infty}{}_k \left(\frac{1-q^{2k-1}}{1+q^{2k}}\right)^2 \left[\frac{1}{2-x} + \frac{q(1+q^2)}{1-q^2x+q^4} + \frac{q^2(1+q^4)}{1-q^4x+q^8} + \ldots\right],$$

d'où l'on déduit, en posant $x=-2$ et $x=0$, la solution du problème pour les cas de $c=1$ et de $c=2$.

De la comparaison des séries ainsi obtenues, on tire immédiatement des propositions sur le nombre des solutions de l'équation indéterminée en question. Pour $c=3$, l'auteur a trouvé ainsi la proposition suivante :

« Quand un nombre N renferme des facteurs premiers $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots$ de la forme $3m+1$, et que les facteurs premiers de la forme $3m+2$, ne s'y trouvent qu'à des puissances paires, le nombre des solutions de l'équation

$$m^2+3n^2=\mathrm{N}$$

sera déterminé par la formule

$$\rho_{\mathrm{N}} = 2(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots,$$

si N est un nombre impair, et par la formule

$$\rho_{\mathrm{N}} = 6(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots,$$

si N est pair. Si au contraire il entre dans N un facteur de la forme

$3m+2$ à une puissance impaire, on a alors

$$\rho_N = 0. \text{ »}$$

On déduit encore de là des formules pour la sommation de diverses séries. Ainsi la dernière proposition conduit à l'équation

$$\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(m^2+3n^2)^p}$$
$$=\left(1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots\right)\left(1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}-\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}-\ldots\right)\left(1+\frac{2}{4^p}\right),$$

qui a lieu pour toutes les valeurs de p pour lesquelles le développement est convergent.

Le cas de $c=-1$ est traité d'une autre manière. On transforme d'abord la série

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum q^{m^2-n^2},$$

où m prend toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, et n seulement toutes les valeurs numériquement moindres que m, dans la suivante

$$\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty} q^{n^2}\frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n}},$$

que l'on transforme à son tour à l'aide des deux équations

$$\sum_{1}^{\infty} q^{n^2}x^{2n-1}\frac{1+q^n x}{1-q^n x}=\sum_{1}^{\infty}\frac{q^n x^n}{1-q^n x},$$
$$\sum_{1}^{\infty} q^{(2n-1)^2}x^{2n-1}\frac{1+q^{4n-2}x}{1-q^{4n-2}x}=\sum_{1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}x^n}{1-q^{4n-2}x}.$$

On conclut de là la proposition suivante :

« Le nombre des solutions de l'équation $m^2-n^2=N$ est égal au double du nombre des diviseurs de N ou de $\frac{1}{4}N$, suivant que N est impair ou divisible par 4. Si, au contraire, N est divisible seulement par 2, l'équation n'a point de solution. »

De cette proposition, résulte la formule de sommation

$$\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum\frac{1}{(m^2-n^2)^p}=\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{6^p}+\ldots\right)^2+\left(1+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}+\ldots\right)^2.$$

STEEN (Ad.). — *Sur la loi fondamentale de l'extension et de la compression des corps.* (5 p.)

ATTI DELL' ACCADEMIA PONTIFICIA DE' NUOVI LINCEI [1].

T. XX, 1866-67.

CATALAN (E.). — *Note sur un problème d'Analyse indéterminée.* (4 p.; fr.)

Trouver plusieurs cubes entiers consécutifs, dont la somme soit un carré.

SECCHI (A.). — *Recherches sur les taches solaires et leurs mouvements.* (18 p.; it.)

De l'ensemble de ses recherches, combinées avec celles de Spörer, le P. Secchi conclut, pour l'inclinaison de l'équateur solaire, $6^\circ 57'$, et pour la durée de la rotation, $25^j\,5^h\,37^m$.

PROJA (S.). — *Sur la proposition de M. Mädler pour la réforme du calendrier russe.* (8 p. it.)

CATALAN (E.). — *Rectification et addition à la « Note sur un problème d'Analyse indéterminée ».* (4 p.; fr.)

RESPIGHI (L.). — *Sur les comètes et sur les étoiles filantes.* (3 p.; it.)

CHELINI. — *Rapport sur le concours pour le prix Carpi en 1865.* (4 p.; it.)

Le sujet du concours était : « Exposer une méthode qui puisse servir à déterminer *toutes* les valeurs rationnelles de x, propres à rendre carré ou cube parfait le polynôme

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4,$$

A, B, C, D, E étant des nombres entiers, toutes les fois qu'il existe de pareilles valeurs, et qui, dans le cas contraire, fasse connaître l'impossibilité de la solution. » Le prix n'a pas été décerné.

RICHAUD (C.). — *Note sur la solution de l'équation*

$$x^3 + (x + r)^3 + (x + 2r)^3 + \ldots + [x + (n-1)r]^3 = y^2.$$

(20 p.; fr.)

---

[1] Publié chaque année en six livraisons in-4°; Rome. En italien et en français.

Mainardi (G.). — *Remarques sur divers sujets.* (17 p.; it.)

Premier article : « Sur la résolution des équations algébriques au moyen de fonctions irrationnelles ». — Ayant remarqué que le système conjugué des puissances d'une substitution cyclique d'ordre composé est le produit de systèmes analogues, tous permutables entre eux, dont les ordres sont les facteurs premiers de l'ordre composé; que chacun de ces systèmes arithmétiques partiels admet un système géométrique permutable avec lui et décomposable, parce qu'il est d'ordre composé; considérant ce qu'Abel (1) a démontré sur la forme des fonctions irrationnelles qui peuvent être racines d'une équation algébrique; l'auteur a pensé que, lorsque la substitution cyclique primitive se rapporte à toutes les racines d'une équation algébrique résoluble par radicaux, le système complexe de substitutions dont il vient d'être question appartient exclusivement à l'équation elle-même; en sorte que toute fonction algébrique des racines, invariable pour ces substitutions, doit être symétrique, et partant, exprimable au moyen des coefficients. Effectivement, cette conclusion donne immédiatement, dans toute sa généralité, une première répartition des racines en groupes, indiquée par Galois, et démontrée par Betti (2); elle fournit la résolution des équations du cinquième degré telle qu'elle a été indiquée par Abel (3), et conduit à des équations algébriques de degré quelconque, résolubles par radicaux.

Catalan (E.). — *Sur quelques questions relatives aux fonctions elliptiques.* (10 p.; fr.)

Démonstration de nouveaux théorèmes découverts par Tortolini, et analogues à celui de Legendre.

Volpicelli (P.). — *Analyse et rectification de quelques idées et de quelques expériences relatives à l'électrostatique.* (37 p.; it.)

Suite d'un travail dont la première partie a paru dans le tome XIX des Ann.

---

(1) [illegible]

(2) Annali di Matematica, tomo [illegible]

(3) [illegible]

ANNALI DELLE UNIVERSITA TOSCANE. — T. X. Pisa, 1868 [1].

BETTI (E.). — *Sur la détermination des températures variables d'un cylindre.* (14 p.)

Ce travail contient une application des résultats publiés par l'auteur dans les *Memorie della Società Italiana delle Scienze* (3e série, t. I, deuxième partie) où il a donné une formule générale pour exprimer les températures variables d'un corps solide, quelles que soient les températures initiales et les conditions à la surface. M. Betti traite ici le cas particulier où le corps a la forme d'un cylindre de révolution, et où les températures initiales sont symétriques par rapport à l'axe de ce cylindre. Il démontre pour la première fois le théorème suivant :

« Si les quantités en nombre infini g_1, g_2, g_3,... sont les infinis réels et du premier ordre d'une fonction transcendante monodrome, qui n'ait pas d'infinis complexes à partie imaginaire négative, et qui ait un infini à l'*infini réel,* on pourra toujours déterminer une série convergente de fonctions de Bessel,

$$\sum_1^\infty a_s \mathrm{I}(g_s r),$$

dont la somme s'annule pour toutes les valeurs réelles de r différentes d'une quantité ρ, et devienne infinie pour $r = \rho$.

MÉLANGES.

SUR LA CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DE L'ÉQUATION RELATIVE A L'ADDITION DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES DE PREMIÈRE ESPÈCE;

PAR M. HERMITE.

La première construction connue de cette équation et qui a été donnée par Lagrange, résulte du rapprochement de la relation :

$$\cos \mathrm{am}\, a = \cos \mathrm{am}(x+a) \cos \mathrm{am}\, x + \sin \mathrm{am}(x+a) \sin \mathrm{am}\, x \Delta \mathrm{am}\, a$$

avec la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique. On en

[1] Il paraît chaque année un volume in-4°. En langue italienne.

déduit aussi une construction plane en posant,

$$X = \cos \operatorname{am}(x + a),$$
$$Y = \sin \operatorname{am}(x + a),$$

et déterminant les points de rencontre de la droite

$$\cos \operatorname{am} a = X \cos \operatorname{am} x + Y \sin \operatorname{am} x \,\Delta \operatorname{am} a$$

avec le cercle

$$X^2 + Y^2 = 1.$$

Cette droite est une tangente à l'ellipse

$$\left(\frac{X}{\cos \operatorname{am} a}\right) + \left(\frac{Y \Delta \operatorname{am} a}{\cos \operatorname{am} a}\right)^2 = 1,$$

dont les axes ont pour valeurs

$$A = \cos \operatorname{am} a,$$
$$B = \frac{\cos \operatorname{am} a}{\Delta \operatorname{am} a} = \sin \operatorname{am}(K - a).$$

Ayant donc construit cette ellipse ainsi que le cercle, l'un des poi
d'intersection aura pour coordonnées

$$X = \cos \operatorname{am}(x + a),$$
$$Y = \sin \operatorname{am}(x + a),$$

et l'autre, en remarquant que l'équation de la droite ne change p
si l'on change a en $-a$, les quantités

$$X_0 = \cos \operatorname{am}(x - a),$$
$$Y_0 = \sin \operatorname{am}(x - a).$$

On voit donc qu'en menant l'une des deux tangentes à l'ellipse
le point

$$X_0 = \cos \operatorname{am}(x - a),$$
$$Y_0 = \sin \operatorname{am}(x - a),$$

cette construction donnera d'abord celui-ci

$$X = \cos \operatorname{am}(x + a),$$
$$Y = \sin \operatorname{am}(x + a),$$

puis, en continuant dans le même sens,

$$X_1 = \cos \operatorname{am}(x + 3a),$$
$$Y_1 = \sin \operatorname{am}(x + 3a);$$

et, en général, le $n^{ième}$ côté du polygone inscrit au cercle et circonscrit à l'ellipse conduira à la construction des quantités

$$\cos\mathrm{am}[x + (2n+1)a],$$
$$\sin\mathrm{am}[x + (2n+1)a].$$

En opérant en sens inverse, on trouverait, pour les coordonnées des sommets, les expressions

$$\cos\mathrm{am}[x - (2n+1)a],$$
$$\sin\mathrm{am}[x - (2n+1)a].$$

Ces résultats pourraient, sans doute, se démontrer directement, en déterminant, sur la figure, le rapport des variations des coordonnées des points de rencontre, avec le cercle, de deux tangentes infiniment voisines, mais je ne m'y arrêterai point, m'étant seulement proposé de rapprocher l'une de l'autre deux constructions géométriques de nature bien différente.

SUR UNE MÉTHODE NOUVELLE POUR L'ÉTUDE DES COURBES TRACÉES SUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES.

Nous avons déjà parlé à nos lecteurs (1) des travaux récents de quelques géomètres, MM. Clebsch, Cremona, Nöther, Zeuthen, etc., sur une méthode nouvelle dont l'origine et la première application se trouvent dans les travaux de M. Chasles, sur les courbes algébriques tracées sur les surfaces du second degré. Cette méthode devant conduire à des conséquences très-importantes, il nous a paru utile de la faire connaître et d'en développer les principes, en ce moment surtout où elle est encore récente, et où son exposition ne nous entraînera pas dans des développements dépassant les limites de ce Recueil.

C'est dans les *Comptes rendus* (2) que se trouvent réunis les tra-

---

(1) Voir *Bulletin*, t. I, p. 130.

(2) *Sur les six droites qui peuvent être dans l'espace les directions de six forces en équilibre. — Propriétés de l'hyperboloïde à une nappe et d'une certaine surface du quatrième ordre.* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LII, 1861, p. 1094-1104.)

Description des courbes gauches de tous les ordres sur les surfaces réglées du troisième et du quatrième ordre. (*Comptes rendus*, t. LIII, p. 884-889.)

Théorie analytique des courbes à double courbure de tous les ordres tracés sur l'hyperboloïde à une nappe. (*Comptes rendus*, t. LIII, p. 985-996, 1077-1086, 1203-1210.)

vaux de M. Chasles sur les courbes de tous les ordres tracées sur les surfaces du second degré et sur quelques autres surfaces réglées. M. Chasles fait remarquer qu'au lieu de déterminer les courbes par deux équations entre les coordonnées de ces points, il y a le plus souvent de grands avantages à les étudier sur des surfaces déterminées, dont la surface plane ne sera plus qu'un cas particulier.

Il est facile de comprendre, en effet, quoique les idées proposées par l'illustre géomètre soient entièrement nouvelles, que la nature et les propriétés d'une courbe algébrique dépendent, en grande partie, des surfaces simples sur lesquelles elle est située. Considérons, par exemple, les courbes d'ordre déterminé n. Celles de ces courbes qui peuvent être tracées sur une surface du second ordre se distinguent des autres courbes de même ordre par des propriétés spéciales : par exemple, elles sont coupées par tout plan suivant n points situés sur une conique. Si les génératrices d'un système coupent la courbe en n' points, celles de l'autre système la couperont en $n - n'$ points : par exemple, une courbe du dixième ordre sera coupée au moins en cinq points par les génératrices de l'un des systèmes, ce qui constitue une propriété distinctive de la courbe, puisque, en général, on ne peut trouver qu'un nombre limité de droites rencontrant une courbe en quatre points.

M. Chasles étudie les courbes tracées sur l'hyperboloïde au moyen d'un système particulier de coordonnées. Ce système est un système rectiligne formé des deux séries de génératrices qu'on peut tracer sur toute surface du second ordre. La considération de ce système de coordonnées donne une théorie complète, qui se résume en de nombreux et importants théorèmes, pour l'étude desquels nous renvoyons au Mémoire original. Les principales questions étudiées par M. Chasles sont les suivantes : 1° propriétés d'une courbe gauche d'ordre $p + q$ pouvant posséder des points multiples ; 2° étude de la la développable formée par les plans osculateurs de la courbe ; 3° d'un cône mené par la courbe ; 4° de la développable circonscrite à l'hyperboloïde suivant la courbe ; 5° la génération des courbes gauches par les faisceaux de courbes d'ordre inférieur, génération pour laquelle M. Chasles crée une théorie toute semblable à celle qu'il a développée dans le plan.

On doit encore à M. Chasles des études sur les courbes gauches de tous les ordres, tracées sur des surfaces réglées, d'une nature

spéciale, comprenant comme cas particulier l'hyperboloïde à une nappe. Voici comment on définit ces surfaces réglées. Traçons dans un plan une courbe *rationnelle* d'ordre k, ayant un point multiple d'ordre $k-1$. Si l'on prend sur une droite de l'espace les points qui correspondent anharmoniquement au point de la courbe (ou, si l'on veut, à la droite du faisceau ayant son centre au point multiple, passant par le point simple considéré sur la courbe), ces droites, qui joignent les points correspondants, sont les génératrices de la surface d'ordre k. M. Chasles généralise cette construction d'une surface réglée en prenant, au lieu de la courbe rationnelle ayant un seul point multiple d'ordre $k-1$, une courbe rationnelle quelconque.

Les travaux précédents ont conduit les géomètres à de très-nombreuses recherches. Ne pouvant tout citer, nous indiquerons cependant un article de M. Cremona sur les courbes tracées sur l'hyperboloïde ([1]). Rappelons aussi, avec M. Chasles ([2]), que déjà Plücker ([3]) et M. Cayley ([4]) avaient conçu l'idée du système de coordonnées rectilignes qu'on peut employer sur l'hyperboloïde, mais sans en faire l'application aux questions si variées que comporte l'étude des courbes gauches tracées sur les surfaces du second degré.

La théorie de M. Chasles peut être exposée d'une autre manière, et cette exposition, que nous allons indiquer en quelques mots, nous permettra de faire saisir la transition entre les travaux de M. Chasles et les travaux récents de M. Clebsch.

Soient une surface S du second degré et un plan P. Si par un point fixe a de la surface S on mène une droite, cette droite coupera la surface S en un nouveau point m et le plan P en un point μ, qui est la perspective ou projection stéréographique du point m. Si donc on regarde le plan P comme la perspective de la surface, à tout point du plan correspondra un seul point de la surface, et réciproquement. La surface sera, suivant une expression de M. Clebsch, *représentée* ou *appliquée* sur le plan. On peut exprimer les coordonnées d'un point quelconque de la surface en fonction de deux paramètres, qui sont les coordonnées du point qu'il a pour projection.

([1]) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LII, p. 1319-1323.

([2]) *Rapport sur les progrès de la Géométrie*, p. 253.

([3]) *Die analytische Geometrie der Curven auf den Flächen zweiter Ordnung und Classe.* (*Journal de Crelle*, 1847, t. 34, p. 341.)

([4]) *Philosophical Magazine*, juillet 1861.

Quand on cherche les formules dont nous venons de parler, on trouve qu'elles sont de la forme suivante.

Désignons par X_1, X_2, X_3, X_4 les coordonnées homogènes du point de la surface, et soient ξ, ξ_1, ξ_2, les coordonnées homogènes du point du plan. Les formules qui donnent X_i en fonction des ξ sont de la forme

$$(1) \quad \begin{cases} \rho X_1 = f_1(\xi, \xi_1, \xi_2), \\ \rho X_2 = f_2(\xi, \xi_1, \xi_2), \\ \rho X_3 = f_3(\xi, \xi_1, \xi_2), \\ \rho X_4 = f_4(\xi, \xi_1, \xi_2), \end{cases}$$

où les symboles f désignent des fonctions homogènes et du second degré de ξ, ξ_1, ξ_2. (Ce sont, au fond, les formules de la transformation par rayons vecteurs réciproques, quand on passe d'un plan à une sphère.) ρ désigne un facteur arbitraire, indiquant que les rapports seuls de X_1, X_2, X_3, X_4 déterminent un point.

Dans ce cas, toute section plane de la surface dont l'équation est

$$(2) \qquad \Sigma m X = m_1 X_1 + m_2 X_2 + m_3 X_3 + m_4 X_4 = 0$$

sera représentée sur le plan par la conique dont l'équation est

$$(3) \qquad \Sigma m f = m_1 f_1 + m_2 f_2 + m_3 f_3 + m_4 f_4 = 0.$$

Supposons que les formules (1) nous aient été données *a priori* et cherchons le degré de la surface. Si par une droite D on fait passer deux plans, les sections de la surface par ces deux plans seront représentées par deux coniques, dont les points d'intersection correspondent aux points de la surface situés dans les deux sections planes, c'est-à-dire sur la droite D. Deux coniques se coupant en quatre points, on voit que toute droite coupera la surface en quatre points; la surface sera du quatrième ordre.

Cette conclusion est parfaitement rigoureuse, si les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 sont les plus générales du second degré, mais nous n'avons pas tenu compte d'un fait important. Les courbes

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0, \quad f_4 = 0$$

ont, dans le cas qui nous occupe, *deux points communs*; c'est cette propriété qui caractérise les formules relatives aux surfaces du second degré.

Mais alors se présente une difficulté, dont la solution constitue un des résultats les plus curieux et les plus importants de la nouvelle methode. Soient α, β, γ les coordonnées homogènes de l'un des deux points communs aux quatre courbes. Si l'on substitue ces coordonnées à la place de ξ, ξ_1, ξ_2, dans les formules (1), les valeurs des fonctions f deviennent nulles, les rapports des coordonnées X_1, X_2, X_3, X_4 deviennent indéterminés, et d'ailleurs, pour chacun de ces rapports, l'indétermination est effective; car on sait bien que si un quotient dépendant de deux variables,

$$\frac{f(x,y)}{\varphi(x,y)},$$

se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ pour les valeurs des variables x_0, y_0 des variables, lorsque x, y tendront vers x_0, y_0 respectivement, le quotient pourra tendre vers toutes les limites possibles. Si l'on considère, par exemple, y comme une fonction de x dont la dérivée est y', et qui se réduit à y_0 pour $x = x_0$, la valeur limite du quotient sera

$$\frac{f'_x + f'_y \cdot y'}{\varphi'_x + \varphi'_y \cdot y'}.$$

Cette valeur limite dépendra donc, en général, de y', c'est-à-dire de la manière dont y tend vers y_0 quand x tend vers x_0.

On voit donc que les coordonnées X_1, X_2, X_3, X_4, ou plutôt les rapports de ces coordonnées sont réellement indéterminés, si on les prend individuellement. Considérons leur ensemble, et employons la méthode suivante.

Si α, β, γ sont les coordonnées du point considéré, que M. Clebsch appelle *point fondamental,* les coordonnées de tout point infiniment voisin seront données par les formules

$$\xi = \alpha + \varepsilon x, \quad \xi_1 = \beta + \varepsilon\lambda, \quad \xi_2 = \gamma,$$

où l'on a laissé, pour fixer les idées, l'une des coordonnées homogènes constante.

Les formules (1), développées d'après la série de Taylor, donnent

$$\rho X_1 = \varepsilon\left(\frac{\partial f_1}{\partial\alpha}x + \frac{\partial f_1}{\partial\beta}\lambda\right) + \varepsilon^2 \ldots,$$

$$\rho X_2 = \varepsilon\left(\frac{\partial f_2}{\partial\alpha}x + \frac{\partial f_2}{\partial\beta}\lambda\right) + \varepsilon^2 \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et, en se bornant au premier terme et supprimant le facteur commun ε, on voit que les coordonnées des points limites seront données par les formules

$$\begin{aligned}\rho X_1 &= A x + B\lambda,\\ \rho X_2 &= A' x + B'\lambda,\\ \rho X_3 &= A'' x + B''\lambda,\\ \rho X_4 &= A''' x + B'''\lambda.\end{aligned}$$

Ces formules, contenant une arbitraire, le rapport $\frac{x}{\lambda}$, déterminent une infinité de points correspondant au point fondamental, et ces points forment évidement une ligne droite.

Donc, en général, à un point fondamental correspondent tous les points d'une ligne droite située sur la surface. A une courbe infiniment petite, tracée autour du point fondamental, correspond sur la surface une ligne voisine de la droite. Chaque point de la droite correspond à une direction particulière menée par le point fondamental. Deux courbes qui se couperont dans le plan au point fondamental correspondront à deux courbes de la surface rencontrant la droite, mais *ne se rencontrant pas* sur la droite, à moins que leurs représentations sur le plan ne soient tangentes l'une à l'autre au point fondamental où elles passent toutes les deux.

Les méthodes géométriques rendent parfaitement compte aussi de ce fait remarquable. Reprenons la représentation d'une surface du second ordre sur le plan. Si l'on projette d'un point a les points de la surface sur le plan, à tout point μ du plan correspond un point m de la surface; mais il faut faire une exception pour les points α, β, où les génératrices rectilignes de la surface passant en a coupent le plan. Au point α du plan correspondent tous les points de la surface situés sur la droite $a\alpha$, et l'on voit sans peine que toute section plane de la surface se projettera suivant une conique passant par les deux points α, β.

Ajoutons que, dans certains cas spéciaux, au point fondamental peuvent correspondre des courbes plus compliquées que les lignes droites; il peut arriver que les premières dérivées des fonctions f s'annulent; mais ce que nous avons dit suffit, nous l'espérons, pour donner une idée de la méthode qu'on doit suivre dans tous les cas.

Revenons aux formules (1) et supposons que les fonctions f y soient du second degré, mais qu'égalées à zéro elles représentent

des coniques passant par deux points fixes α, β. Alors deux sections planes de la surface se représenteront sur le plan suivant deux coniques se coupant en α et β, et en deux autres points variables μ, ν. Aux premiers points α, β, nous l'avons vu, ne correspondent pas, sur la surface, des points communs aux deux sections planes; les deux courbes de l'espace n'auront donc que deux points communs correspondant aux points μ, ν du plan; en d'autres termes, la surface est coupée en deux points par une droite; elle est du second degré.

Cela posé, traçons une courbe quelconque sur le plan; supposons qu'elle soit de l'ordre m et qu'elle ait α' de ses branches passant en a, β' en b. Cette courbe sera coupée en $2m - \alpha' - \beta'$ points par toute conique passant en α et β. Cette conique étant la représentation d'une section plane de la surface, on voit que la courbe tracée sur la surface et correspondante à la courbe plane sera coupée par un plan en $2m - \alpha' - \beta'$ points; en d'autres termes, elle sera de l'ordre indiqué par ce nombre. On déterminera toutes les singularités de cette courbe par une méthode due à M. Clebsch et dont nous parlerons plus loin. C'est ainsi qu'aux droites passant par α correspondent les génératrices rectilignes d'un système, aux droites passant par β les génératrices d'un second système, etc., etc. La droite qui joint les points α, β mérite un examen spécial : tous ses points correspondent à un seul point de la surface, mais nous ne pouvons qu'indiquer tous ces faits, intéressants au plus haut degré.

Si, dans les formules (1), les fonctions f, restant du second degré, s'annulaient toutes les quatre pour un seul système de valeurs, les coniques qui représentent sur le plan toute section plane de la surface passeraient par un seul point fixe α. La surface serait du troisième ordre, et elle serait engendrée par des droites correspondant dans le plan aux droites passant par le point fondamental α.

Enfin, si les fonctions f sont des fonctions générales du deuxième ordre, on a la *surface de Steiner*, dont toutes les sections planes sont représentées par des coniques. On voit bien ainsi que toute section de la surface par le plan tangent ayant un point double au point de contact, la représentation devra avoir un point double, c'est-à-dire se décomposer en deux droites. A chacune de ces deux droites correspond une conique appartenant à la surface. C'est ainsi que M. Clebsch a appliqué sa méthode à la surface de Steiner (¹). Nous

(¹) Voir *Journal de Borchardt*, t. 67, p. 1-23.

nous contenterons de renvoyer à son Mémoire, en mentionnant l'intégration de l'équation des lignes asymptotiques faite par MM. Clebsch et Gordan. Ces lignes sont du quatrième ordre et de la deuxième espèce.

Une année auparavant, M. Clebsch avait donné (1) une première et importante application de sa méthode à la surface générale du troisième ordre. C'est donc un des savants qui ont le plus contribué à faire honneur à la prédiction d'un géomètre illustre. On sait que Steiner affirmait que, dans un petit nombre d'années, la géométrie des surfaces du troisième ordre paraîtrait presque aussi facile que celle des surfaces du second degré. Nous n'en sommes pas là encore; cependant on ne peut méconnaître que des progrès très-sérieux aient été réalisés dans la voie que Steiner croyait nouvelle, et qui avait déjà été explorée avec succès par MM. Salmon et Cayley.

La méthode de M. Clebsch s'applique avec la plus grande facilité aux surfaces du troisième ordre. Les formules (1) contiennent alors des fonctions f du troisième degré. Ces fonctions s'annulent simultanément pour six systèmes de valeurs. En d'autres termes, les sections planes de la surface sont représentées par la série complète des courbes du troisième ordre passant par six points quelconques. Disposez six points au hasard dans le plan : au moyen de ces six points, on peut construire une surface du troisième ordre (et les surfaces homographiques), dont les propriétés dépendent exclusivement de la disposition relative des six points. Par exemple, si ces six points sont sur une conique, ou si trois sont en ligne droite, la surface a un point double. Nous signalerons encore ce fait curieux, qui est peut-être nouveau, et que nous avons rencontré dans nos recherches : si l'on a neuf points d'inflexion d'une courbe du troisième ordre, deux des systèmes de trois droites contenant les neuf points forment deux triangles. Les six sommets de ces triangles déterminent une surface du troisième ordre, dont la ligne d'inflexion se décompose en quatre courbes planes, etc. (2).

Les vingt-sept droites de la surface correspondent : 1° aux six

---

(1) *Die Geometrie auf den Flächen dritter Ordnung.* (Journal de Borchardt, t. 65, p. 359-380.)

(2) Si les six points sont les six sommets d'un quadrilatère complet, la surface a quatre points doubles ; ses lignes asymptotiques correspondent aux coniques inscrites dans le quadrilatère.

points fondamentaux; 2° aux quinze droites joignant deux à deux ces six points; 3° aux six coniques passant par cinq des six points. La situation respective de ces droites s'étudie sans la moindre difficulté.

M. Clebsch a examiné aussi ([1]) les surfaces du quatrième ordre ayant une ligne double du second ordre. Les formules (1) sont encore du troisième degré par rapport aux ξ; seulement les courbes du troisième ordre qui correspondent aux sections planes de la surface ne passent plus que par cinq points; il y a seize droites sur la surface dont on peut indiquer la disposition en disant qu'elles forment un ensemble tout pareil à celui des seize droites d'une surface du troisième ordre qui rencontrent une conique de cette surface. M. Clebsch retrouve les dix séries de sections coniques qui avaient été signalées par M Kummer, ainsi que les courbes du troisième et du quatrième ordre qui se trouvent sur la surface.

On peut se rendre compte géométriquement de ce fait important, que, pour les surfaces précédentes, les points, selon l'expression de M. Chasles, se déterminent individuellement : si l'on considère, par exemple, une surface du troisième ordre, on peut toujours choisir sur cette surface une droite D et une conique C rencontrant cette droite en un point. Alors, si d'un point de l'espace on mène la droite unique qui rencontre la droite D et la conique C, cette droite coupera la surface en trois points, l'un situé sur C, l'autre sur D et le troisième m quelconque. Elle coupe, en outre, un plan fixe en un point μ, qu'on peut considérer comme correspondant au point m de la surface. A un point μ du plan correspond un seul point de la surface, et réciproquement.

La représentation d'une surface du quatrième ordre ayant une conique double s'effectuera évidemment de la même manière par des droites assujetties à couper la conique double et une des droites de la surface. Par tout point m de la surface, on pourra mener une telle droite, qui coupera un plan fixe en un point μ correspondant au point m.

Ces modes de représentation ne sont pas d'ailleurs uniques pour chaque surface. Prenons, par exemple, une surface du troisième ordre. On peut, nous l'avons vu, projeter un point de la surface sur

---

([1]) *Ueber die Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen.* (*Journal de Borchardt*, t. 69, p. 142.)

le plan par des droites variables assujetties à rencontrer une conique C et une droite D de la surface; on pourrait, au lieu de prendre la conique et la droite, prendre deux droites D, D′ de la surface, ne se rencontrant pas. On peut aussi, conme l'a fait M. Clebsch, considérer la surface du troisième ordre comme engendrée par l'intersection de trois plans appartenant à des *réseaux projectifs*. Si l'on considère, en effet, les trois plans représentés par les équations

$$\varkappa a + \lambda b + c = 0,$$
$$\varkappa a' + \lambda b' + c' = 0,$$
$$\varkappa a'' + \lambda b'' + c'' = 0,$$

où a, b, c, a',... désignent des fonctions linéaires des coordonnnées, il est clair que l'intersection de ces trois plans, quand on fera varier λ et $\varkappa$, décrira une surface du troisième ordre.

Parmi les représentations différentes d'une surface, on distingue comme la plus simple celle pour laquelle les sections planes sont représentées par des courbes de moindre degré. D'ailleurs, si l'on a deux représentations de la surface sur le plan, il en résulte évidemment, en faisant correspondre les deux points du plan m, m' qui correspondent à un même point de la surface, un mode de transformation des figures planes dans lequel à un point d'une des figures correspond un seul point de l'autre. C'est par là que les recherches de M. Clebsch se lient aux études générales de M. Cremona sur les transformations géométriques planes [1].

M. Clebsch a résumé et développé la méthode précédente, dans un travail considérable inséré au tome I des *Mathematische Annalen*. C'est dans ce Mémoire qu'il expose, pour la première fois, les principes généraux qui l'ont guidé dans l'étude relativement facile des cas précédents.

G. D.

(*A suivre.*)

---

[1] *Sulle trasformazioni geometriche delle curve piane.* (*Mémoires de l'Académie de Bologne*, t. V.)

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, publié par M. LIOUVILLE. 2e série, T. XV; 1870 (1).

DE LA GOURNERIE. — *Note sur les singularités élevées des courbes planes.* (6 p.)

Cet article est la suite d'une Note publiée dans le tome précédent. M. de la Gournerie complète l'exposition du mode de discussion qu'il a proposé pour les singularités, et il en fait l'application à des courbes des ordres 30 et 32.

PUISEUX (V.). — *Mémoire sur l'accélération séculaire du mouvement de la Lune* (2). (98 p.)

MATHIEU (E.). — *Sur la généralisation du premier et du second potentiel.* (26 p.)

Dans un Mémoire inséré dans le tome précédent (3), M. Mathieu avait donné d'importants théorèmes sur l'équation $\Delta\Delta u = 0$, où le signe Δu représente

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2},$$

et il avait été amené à considérer deux potentiels définis par les formules

$$v = \int\int\int \frac{\varphi(a, b, c)}{r} da\,db\,dc, \quad w = \int\int\int r\varphi(a, b, c)\, da\,db\,dc,$$

où les intégrales s'étendent à tous les éléments d'un volume Π et où r indique la distance à un point (x, y, z).

D'après les conseils de M. de Saint-Venant, l'auteur généralise sa théorie, en considérant, au lieu des distances à un point, des fonctions de la forme

$$\sqrt{\frac{(x-a)^2}{A} + \frac{(y-b)^2}{B} + \frac{(z-c)^2}{C}},$$

(1) Voir *Bulletin*, t. I, p. 91.
(2) Voir *Bulletin*, t. I, p. 30.
(3) Voir *Bulletin*, t. I, p. 97.

qu'on substitue à r. Alors le second potentiel satisfait à une équation linéaire aux dérivées partielles du quatrième ordre, qui se rencontre dans les études de M. de Saint-Venant sur l'équilibre d'élasticité des corps.

LIOUVILLE (J.). — *Extrait d'une Lettre adressée à M. V.-A. Le Besgue.* (4 p.)

Dans cette Lettre, M. Liouville communique un théorème important dont voici l'énoncé :

« Soit m un nombre entier de la forme $4l+1$. Posons d'abord, de toutes les manières possibles,

$$m = i^2 + \varpi^2 + 16s^2,$$

i désignant un entier impair et positif, ϖ un entier pair et positif. Puis cherchons la somme

$$(\text{A}) \qquad \Sigma(-1)^{s+\frac{i^2-1}{8}} \mathfrak{F}(\varpi),$$

relative à tous les systèmes de valeurs (i, ϖ, s) pour lesquelles notre équation a lieu; $\mathfrak{F}$ indique ici une fonction algébrique ou numérique quelconque.

» D'un autre côté, faisons aussi, de toutes les manières possibles,

$$m = i_1^2 + \varpi_1^2 + 8s_1^2,$$

i_1 désignant un entier impair et positif, ϖ_1 un entier pair, positif, nul ou négatif, enfin s_1 un entier indifféremment pair ou impair, positif, nul ou négatif. Puis cherchons, pour tous les systèmes (i_1, ϖ_1, s_1), la somme

$$(\text{B}) \qquad \Sigma(-1)^{s_1} \mathfrak{F}(\varpi_1),$$

où la fonction $\mathfrak{F}$ est la même que ci-dessus.

» Les deux sommes (A) et (B) sont toujours égales entre elles. »

LUCAS. (F.). — *Étude sur la mécanique des atomes.* (56 p.)

Dans ces recherches, qui ont un très-grand degré de généralité, M. Lucas considère des systèmes formés de corps absolument quelconques auxquels il assigne respectivement les indices $1, 2, \ldots, N$. Ces corps sont disposés d'une manière quelconque dans l'espace; on suppose seulement que leurs dimensions soient négligeables devant

les distances qui les séparent. Ces corps sont des centres d'attraction s'attirant ou se repoussant suivant des lois déterminées.

Le Mémoire se divise en plusieurs parties.

I. *Définition d'un système atomique.* — Données analytiques. — Notations. — Action totale en un point. — Effort total. — Effort de déplacement. — Effort de déformation. — Déplacement auxiliaire. — Relations entre les efforts. — Formules au potentiel.

II. *Statique atomique.* — Objet de ce paragraphe. — Équations fondamentales. — Équations inverses. — Ellipsoïde. — Axes principaux des coordonnées. — Divers modes d'équilibre. — Paramètres physiques. — Constitution des corps. — Phénomènes calorifiques. — Mouvements infinitésimaux.

III. *Les paramètres physiques.* — Mouvement rapporté à des axes quelconques. — Intégration. — Équation intégrante. — Détermination des paramètres physiques. — Formules. — Application. — Action pouvant donner lieu à des changements d'état physique.

IV. *Efforts engendrés par une déformation infinitésimale.* — Rappel de formules. — Nouvelles notations. — Système d'équations linéaires. — Propriété du déterminant. — Forme symétrique. — Équations différentielles. — Intégration générale. — Réalité des racines S.

V. *Les paramètres dynamiques.* — Nullité de trois racines S. — Intégration correspondante. — Interprétation cinématique. — Équation simplifiée. — Cas particulier. — Formule d'analyse. — Considérations générales. — Vibrations calorifiques.

VI. *Détermination des paramètres dynamiques au moyen des potentiels.* — Équations aux potentiels. — Équivalence analytique. — Déterminant fonctionnel. — Forme hessienne de ce déterminant. — Équation intégrante. — Forme hessienne de cette équation. — Résumé.

LAGUERRE. — *Sur un problème de Géométrie relatif aux courbes gauches du quatrième ordre.* (20 p.)

On doit à M. Chasles le théorème suivant : Étant données dans l'espace une surface du second ordre et deux droites fixes, si une droite mobile est assujettie à rencontrer les deux droites fixes en s'appuyant sur la surface, la courbe de contact des droites mobiles est une courbe du quatrième ordre, de l'espèce de celles par lesquelles on peut faire passer une infinité de surfaces du second ordre.

L'auteur se propose, étant donnée une courbe du quatrième ordre, de reconnaitre si elle peut toujours être engendrée de la manière indiquée par M. Chasles et de déterminer tous les systèmes de surfaces associés à deux droites qui donnent la solution de la question.

M. Laguerre résout complétement cette question et obtient ce résultat remarquable qu'il faut choisir la surface du second degré parmi six surfaces déterminées. La surface étant choisie, on peut déterminer d'une infinité de façons les droites fixes.

La courbe gauche du quatrième ordre ne dépendant que de seize constantes, et le mode de génération indiqué par M. Chasles en comportant dix-sept, il était facile de prévoir, qu'à moins de circonstances extraordinaires, on pouvait réaliser ce mode de génération d'une infinité de manières. Le résultat trouvé par M. Laguerre est donc très-remarquable, parce qu'il montre que les surfaces qui permettent de réaliser le procédé de génération des courbes du quatrième ordre, indiqué par M. Chasles, sont en nombre limité, l'indétermination ne portant que sur les droites qu'il faut associer à chaque surface.

Nous citerons encore le théorème suivant que M. Laguerre rencontre dans ses études : « Si l'on considère une courbe du troisième ordre, dans le plan, et des droites qui la coupent en trois points A, B, C, on peut trouver des courbes algébriques qui touchent ces droites au point A', conjugué harmonique de A par rapport au segment BC. » La solution de ce problème s'obtient par la considération des surfaces réglées nommées *quadricuspidales* et étudiées par M. de la Gournerie.

P. Pépin. — *Sur la décomposition d'un nombre entier en une somme de deux cubes rationnels.* (20 p.)

Étant donnée l'équation

$$x^3 + y^3 = Az^3$$

à résoudre en nombres entiers, le P. Pépin se propose de trouver les formes générales des valeurs de A qui rendent cette équation impossible. Citons les théorèmes suivants :

Désignons par p et q deux nombres premiers des formes $18m+5$, $18m+11$; il est impossible de décomposer en deux cubes rationnels aucun des nombres compris dans les formules suivantes

p^n, q^n, $2p^{[illegible]}$, $4p^{[illegible]}$, $4q^{[illegible]}$,

$9p^{[illegible]}$, $9q^{[illegible]}$, $9p^{[illegible]}$, $5p^{[illegible]}$, $5q^{[illegible]}$, $25p^{[illegible]}$, $25q^{[illegible]}$,

dans lesquelles *m* désigne un entier quelconque, nul ou positif.

Le double d'un nombre triangulaire est toujours la somme de deux cubes rationnels.

Si la somme ou la différence de deux cubes est un cube, leur produit est la somme algébrique de deux cubes rationnels.

De Saint-Venant. — *Rapport fait à l'Académie des Sciences sur un Mémoire de M. Maurice Levy, présenté le* 3 *juin* 1867, *reproduit le* 21 *juin* 1869 *et intitulé :* Essai sur une théorie rationnelle de l'équilibre des terres fraîchement remuées et ses applications au calcul de la stabilité des murs de soutènement; par MM. Combes, Serret, Bonnet, Philipps, de Saint-Venant rapporteur. (4 p.)

Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXX, séance du 7 février 1870.

De Saint-Venant. — *Sur une détermination rationnelle par approximation de la poussée des terres dépourvues de cohésion contre un mur ayant une inclinaison quelconque.* (14 p.)

De la Gournerie. — *Note sur les quadricuspidales.* (3 p.)

M. de la Gournerie donne un mode nouveau et très-intéressant de génération de ces surfaces. Si l'on fait passer un hyperboloïde par une courbe gauche du quatrième ordre, d'un point A de cette courbe partiront deux génératrices de l'hyperboloïde allant rencontrer la courbe en deux nouveaux points B, C; la droite BC engendre une quadricuspidale.

Boussinesq (J.). — *Intégration de l'équation différentielle qui peut donner une deuxième approximation, dans le calcul rationnel de la poussée exercée contre un mur par des terres dépourvues de cohésion.* (4 p.)

De Saint-Venant. — *Recherche d'une deuxième approximation dans le calcul de la poussée exercée contre un mur dont la face postérieure a une inclinaison quelconque, par des terres non cohérentes dont la surface supérieure s'élève en un talus plan quelconque à partir du haut de cette face du mur.* (10 p.)

Brisse (Ch.). — *Mémoire sur le déplacement des figures.* (34 p.)

On sait que M. Chasles a publié, en 1843 [1], un Mémoire sur le

---

[1] Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace. (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XVI.)

déplacement des figures, où se trouvent énoncés des théorèmes importants et très-nombreux sur le déplacement infiniment petit d'un corps solide libre. Ce Mémoire avait été précédé d'une Note insérée au *Bulletin de Férussac*, en 1831 ([1]). M. Brisse s'est proposé de démontrer les théorèmes énoncés par M. Chasles, mais en commençant par les établir pour un déplacement fini. Ce résultat nous paraît avoir été atteint de la manière la plus satisfaisante. Les théorèmes de M. Chasles sont démontrés dans les différentes parties du Mémoire avec une grande simplicité. Le Mémoire se divise en plusieurs parties.

Propriétés relatives au mouvement hélicoïdal. — Foyers des plans. — Caractéristiques. — Propriétés relatives à deux droites conjuguées. — Relations métriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps. — Construction de l'axe de rotation quand on connaît les directions des trajectoires de trois points du corps. — Propriétés de l'hyperboloïde à une nappe. — Analogies entre les rotations d'un corps autour de divers axes et les systèmes de forces. — Sur le principe des vitesses virtuelles. — Diverses autres équations analogues exprimant les conditions d'équilibre, soit d'un système de forces, soit d'un système de rotations.

Villarceau (Yvon). — *Étude sur le mouvement des meules horizontales de moulins à blé, et méthodes pour les équilibrer*. (60 p.)

« On sait qu'une meule ayant été préalablement équilibrée *au repos*, c'est-à-dire de manière qu'en cet état sa face inférieure, qui est plane, soit horizontale, cette face prend ordinairement une inclinaison plus ou moins prononcée dès qu'on fait tourner la meule autour de la verticale qui passe par le point de suspension. Ce résultat, nuisible à la bonne fabrication de la farine, est dû tant aux irrégularités de figure de la meule qu'au défaut d'homogénéité des matériaux dont elle formée; mais on peut obvier à ces inconvénients en déplaçant convenablement certaines masses mobiles dans le sens perpendiculaire au plan de la face inférieure, qu'on appelle *masses réglantes*. La condition à remplir, et d'ailleurs bien connue, consiste à faire que la droite passant par le centre de gravité et le point de

([1]) Notes sur les propriétés générales de deux corps semblables entre eux et placés d'une manière quelconque dans l'espace, et sur le déplacement fini ou infiniment petit d'un corps solide libre. (*Bulletin de Férussac*, t. XIV.)

suspension soit un axe principal d'inertie pour ce dernier point. On ne peut songer à y satisfaire en ayant recours aux formules qui concernent les moments d'inertie; les mêmes causes qui produisent l'inclinaison de la meule pendant son mouvement s'opposent à l'emploi de ces formules, et l'on est conduit à rechercher, dans les mouvements observés, la mesure des causes d'irrégularité qu'il s'agit de faire disparaître.

» Il m'a semblé « dit M. Villarceau » qu'une étude analytique du mouvement des meules horizontales devait conduire à la solution la plus complète du problème, et indiquer le genre et le mode des observations à effectuer, ainsi que les changements à faire subir aux positions des masses réglantes. D'ailleurs une pareille étude ajoute aux applications, encore peu nombreuses, de la théorie du mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, applications qui se réduisent à la toupie, au gyroscope et aux projectiles; trop longtemps on s'est borné à celles que nous offre la Mécanique céleste. »

Nous ne pouvons guère entrer dans les détails de la solution du problème important que s'est proposé M. Villarceau. Ce problème de rotation se distingue d'une manière remarquable de ceux que l'on traite habituellement. Comme on ne peut prendre pour axes coordonnés les axes principaux du corps, on ne peut employer les formules d'Euler; il faut avoir recours aux formules générales données par Lagrange. En se bornant à une approximation du deuxième ordre, les équations différentielles s'intègrent par le seul emploi des fonctions circulaires.

Table des matières contenues dans les quinze premiers volumes. (16 p.)

Table des matières par noms d'auteur. (14 p.)

MÉLANGES.

SUR UNE SURFACE DU CINQUIÈME ORDRE ET SA REPRÉSENTATION SUR LE PLAN;

PAR M. G. DARBOUX.

Je me propose d'étudier dans cette Note une courbe et une surface remarquables, toutes deux du cinquième ordre, qu'on rencontre dans la théorie des surfaces homofocales du second degré. Si d'un point A on mène des plans tangents à une série de surfaces homofocales, ou plus généralement inscrites dans une même développable, le lieu des points de contact est la surface du cinquième ordre, dont nous donnons les principales propriétés. Elle admet cinq séries de coniques et se rapproche par là des surfaces du quatrième ordre à ligne double, auxquelles elle se réduit d'ailleurs dans quelques cas particuliers. Elle a un point triple, le point A, et une courbe double qui a été considérée par M. Chasles dans la Note XXVI de l'*Aperçu historique*, qui a créé la théorie des surfaces homofocales. Cette courbe double est du cinquième ordre, elle est le lieu des pieds des normales abaissées du point A sur toutes les surfaces homofocales. C'est à la surface précédente que j'essaye d'appliquer les méthodes de M. Clebsch, en donnant sa représentation sur un plan. Cette représentation peut s'effectuer soit par l'analyse, soit par des considérations géométriques.

1. *Remarques préliminaires sur les surfaces homofocales.*— Appelons, avec M. *Reye* (¹), *axe* d'une surface du second ordre toute droite perpendiculaire à sa polaire. On reconnaît sans difficulté que tout diamètre de la surface, toute droite parallèle à un axe de symétrie, tout axe d'une section plane d'un cône circonscrit, toute perpendiculaire abaissée d'un point sur son plan polaire sont des *axes* de la surface. Ces axes demeurent les mêmes pour toute surface homofocale ou homothétique à la proposée. Si l'on prend, par exemple, un système de surfaces homofocales, l'ensemble des axes est formé de toutes les normales aux différentes surfaces, et, d'après une proposition maintenant bien connue, le lieu des pôles d'un plan P par rapport à

(¹) REYE, *Geometrie der Lage*. Hannover, Carl Rümpler, 1866, p. 146.

toutes les surfaces est une droite normale au plan P et passant par le point de contact de ce plan et de la surface homofocale qui lui est tangente. L'ensemble de ces droites a été étudié d'abord par M. Chasles ([1]), puis par MM. Reye, Klein et Lie ([2]).

On peut définir de la manière suivante l'ensemble ou *complexe* des axes, indépendamment de toute surface du second degré.

Considérons un tétraèdre (qui, dans le cas des surfaces homofocales, est formé des trois plans de symétrie et du plan de l'infini). Toute droite faisant partie du complexe de rayons considéré satisfait aux deux conditions suivantes, dont l'une entraîne l'autre : elle coupe les quatre faces du tétraèdre en quatre points dont le rapport anharmonique est constant; les quatre plans menés par la droite et les quatre sommets du tétraèdre ont un rapport anharmonique constant, dont la valeur est égale à celle du rapport précédent.

Quelle est la nature de la courbe enveloppée par ceux des rayons qui sont situés dans un plan P? Ces rayons doivent couper les quatre droites, intersections du plan P et du tétraèdre, en quatre points dont le rapport anharmonique est constant. Ils envelopperont, par conséquent, une conique tangente aux quatre faces du tétraèdre. [Dans le cas des surfaces homofocales, cette conique sera une parabole tangente aux trois plans de symétrie ([3]).]

De même, celles des droites du complexe passant par un point décriront un cône du second degré, contenant les quatre sommets du tétraèdre. (Ce cône, dans le cas des surfaces homofocales, passe par le centre et a trois génératrices parallèles aux axes.)

L'ensemble des droites forme donc ce que Plücker appelle un *complexe du second degré*. Ce complexe se distingue des complexes généraux par cette propriété caractéristique, que toute ligne passant par un des sommets ou située dans une des faces d'un tétraèdre appartient au complexe ([4]).

Revenons maintenant au système des surfaces homofocales. Dans ce cas on est conduit à adjoindre aux rayons, ou axes, de nouveaux éléments géométriques. Chaque rayon R étant normal à l'une des

---

([1]) *Aperçu historique*, Note XXVI, p. 412 de l'édition allemande.
([2]) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXI, 6 et 13 juin 1870.
([3]) *Aperçu historique*, Note XXVI, § 3.
([4]) *Voir* les Notes déjà citées de MM. *Klein* et *Lie*.

surfaces homofocales, le pied r de cette normale et le plan tangent en r doivent être considérés. Le rayon R sera le lieu des pôles du plan P par rapport à toutes les surfaces homofocales. Le point r donne lieu d'ailleurs à un rapport anharmonique constant avec trois quelconques des quatre points d'intersection du rayon et des faces du tétraèdre.

Si un plan P contient l'axe d'un plan P′, réciproquement le plan P′ contiendra l'axe du plan P.

Quand des plans P sont tangents à une surface non développable, les axes correspondants forment un système de rayons rectilignes, ou ce que Plücker appelle une *congruence*, c'est-à-dire qu'il passe un nombre limité de rayons par chaque point de l'espace. Nous avons déjà dit quelques mots, dans un travail précédent [1], de ces systèmes de rayons, ou plutôt de leurs polaires réciproques. Nous n'examinerons ici que les problèmes simples dont la solution nous est indispensable.

Supposons que des plans P soient assujettis à passer par une droite D : quel sera le lieu de leurs axes ? Pour résoudre ce problème, cherchons le lieu des pôles des plans passant par D, par rapport à toutes les surfaces homofocales.

Prenons d'abord une de ces surfaces S et faisons tourner le plan P autour de la droite D, le lieu des pôles sera une droite Δ polaire de D par rapport à S; si l'on prend successivement les différentes surfaces S′, S″,..., on voit que le lieu cherché est une surface réglée, engendrée par les droites Δ′, Δ″,..., polaires de D par rapport aux différentes surfaces homofocales.

Supposons, au contraire, qu'on laisse fixe le plan P passant par D : le lieu de ses pôles par rapport aux différentes surfaces homofocales sera une droite, axe du plan P. Le lieu cherché peut donc, d'une seconde manière, être considéré comme une surface réglée, engendrée par les axes des plans passant par la droite D. Puisque la surface admet deux systèmes de génératrices rectilignes, elle est du second degré, et l'on peut énoncer ce théorème de M. Chasles :

Le lieu des axes des plans passant par une droite D est un paraboloïde hyperbolique dont les génératrices du second système sont les polaires de la droite D par rapport aux différentes surfaces homofocales.

---

[1] Voir *Bulletin*, t. I, p. 348.

Ce paraboloïde est tangent aux trois plans de symétrie.

Les pieds des différents rayons forment une courbe, lieu des points de contact des plans tangents menés par la droite D aux différentes surfaces. Cette courbe, située sur le paraboloïde, lieu des axes, est coupée en un point par ces axes, en deux points par les génératrices de l'autre système. C'est donc une cubique gauche. On voit donc que :

Si par un point d'une droite on mène des plans tangents à toutes les surfaces homofocales, le lieu des points de contact est une cubique gauche coupant en deux points la droite, le cercle de l'infini, les trois focales.

Cette cubique gauche se décompose, dans quelques cas particuliers, en une droite et une conique, ou même en trois droites. Elle devient une courbe plane, dans le cas suivant.

Imaginons que la droite D par laquelle on mène tous les plans P soit un *axe*. Dans ce cas, tous les plans passant par cet axe R ont leurs axes R' dans le plan P correspondant au rayon R et le coupant en *r*. Ces axes R' enveloppent, on l'a vu, une parabole; le lieu cherché est la podaire du point *r* par rapport à cette parabole. On a donc la proposition suivante (¹) :

Quand une droite D *est axe des surfaces, les axes des plans passant par cette droite enveloppent une parabole située dans le plan conjugué à cet axe; les points de contact de ces plans ou les pieds des axes situés dans un plan forment une courbe du troisième ordre podaire de parabole, ayant un point double au point de rencontre du plan et de la droite* D.

Cette courbe du troisième ordre est la *focale à nœud*.

Dans le cas général où la droite D n'est pas axe, la cubique est gauche; mais si la droite D est dans l'un des plans tangents K à toutes les surfaces homofocales, la cubique se décompose. En effet, quand le plan variable P passant par la droite D coïncidera avec le plan K, il y aura une infinité de points de contact sur la génératrice L de contact du plan K et de la développable Π circonscrite à toutes les quadriques. Par suite, la cubique gauche se décomposera en une droite L et en une conique rencontrant cette droite et tangente au plan K. Cette conique devra rencontrer en un point les trois focales, le cercle de l'infini.

(¹) Voir *Aperçu historique*, l. c.

Enfin, si la droite D est tangente double de la développable Π : pour deux positions du plan P, on aura deux droites de contact, L, L'; la troisième droite qui complète la cubique sera la droite D elle-même, génératrice rectiligne de l'une des surfaces.

Ces propositions s'appliquent au cas où la cubique est plane. Ainsi lorsqu'un axe est situé dans un plan tangent à la développable Π suivant la droite L, la cubique se décomposera dans la droite L et dans une conique touchant L en un point.

Supposons maintenant que les plans P soient simplement assujettis à passer par un point A. Dans ce cas, à chaque plan correspond un axe dépendant des deux variables qui fixent la direction du plan. On a donc un système de rayons rectilignes. Nous allons montrer que ces rayons sont les tangentes doubles d'une développable du quatrième ordre formée par les plans osculateurs d'une cubique gauche.

En effet, considérons le cône C des axes passant par A. A toute génératrice du cône correspond le plan dont elle est un axe. Ce plan peut être considéré comme le plan polaire du point A par rapport à l'une des surfaces homofocales. Les plans correspondant aux axes passant par A sont donc les plans polaires du point A par rapport à toutes les surfaces homofocales. Soit Ψ la développable qu'ils enveloppent.

Soit maintenant un plan P passant par A, il coupe le cône des normales suivant deux droites R, R_1, et son axe est l'intersection des plans correspondants à ces axes R, R_1. Donc :

Les axes correspondants à tous les plans passant par un point sont les intersections de deux plans tangents à la développable Ψ, c'est-à-dire ce sont les tangentes doubles et les génératrices de cette surface.

Ce théorème, sans proposition nouvelle, va nous permettre de reconnaître la nature de la développable Ψ. Nous avons vu que les axes des plans P, passant par une droite, engendrent une surface du second degré. Donc, avec les tangentes doubles de la développable Ψ, on peut former une infinité de surfaces du second degré. Cette développable Ψ, étant formée par les plans tangents communs à une série de surfaces du second degré dépendant de deux paramètres, ne peut être qu'une développable formée des plans osculateurs d'une cubique gauche. On a donc le théorème suivant (¹) :

(¹) Voir *Aperçu historique*, l. c.

Les axes correspondants à tous les plans P passant par un point A sont les tangentes doubles d'une surface développable Ψ, enveloppe des plans polaires de A par rapport à toutes les surfaces homofocales. Les génératrices de cette surface sont les axes des plans tangents au cône des normales menées par A. Cette surface développable est formée par les plans osculateurs d'une cubique gauche. Elle est tangente aux quatre faces du tétraèdre conjugué commun aux trois plans tangents aux quadriques homofocales passant en A, et elle est coupée par les plans tangents suivant les paraboles enveloppes des axes dans ce plan.

2. Nous avons déjà trouvé le lieu des pieds des axes situés dans un plan; cherchons maintenant le lieu des pieds des normales menées par un point. Cette courbe est sur le cône des normales, et elle peut être aussi définie comme le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de A sur les plans polaires de A. C'est donc ce qu'on peut appeler une *podaire de cubique gauche,* et, par conséquent, la transformée par rayons vecteurs réciproques d'une autre cubique gauche, polaire réciproque de la première par rapport à une sphère ayant son centre en A. La première cubique gauche ayant un plan tangent à l'infini, la seconde passera au point A, et sa transformée par rayons vecteurs réciproques sera du cinquième ordre. Cette transformée passe aussi au point A et y a un point triple, les trois branches étant normales respectivement aux trois surfaces homofocales passant en A.

Cette courbe, d'après sa construction, appartient à la classe de celles dont les points se déterminent individuellement. C'est ce que confirme le calcul suivant.

Soient :

$$\frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}+\frac{z^2}{c-\lambda}+\frac{t^2}{d-\lambda}=0 \tag{1}$$

l'équation en coordonnées homogènes des surfaces homofocales; x', y', z', t' les coordonnées du point A. Le plan polaire de ce point par rapport à l'une des surfaces aura pour équation

$$\frac{xx'}{a-\lambda}+\frac{yy'}{b-\lambda}+\frac{zz'}{c-\lambda}+\frac{tt'}{d-\lambda}=0. \tag{2}$$

Les coordonnées d'un point de la perpendiculaire menée par le

point A s'expriment par les formules

$$(3)\qquad kx = x' - \frac{ux'}{a-\lambda},\quad ky = y' - \frac{uy'}{b-\lambda},\ldots,$$

k étant un facteur de proportionnalité et u étant une arbitraire dépendant de la position du point sur la droite, et que nous allons déterminer en exprimant que le point se trouve dans le plan polaire. Posons, pour abréger,

$$(4)\qquad \frac{x'^2}{a-\lambda} + \frac{y'^2}{b-\lambda} + \frac{z'^2}{c-\lambda} + \frac{t'^2}{d-\lambda} = \mathrm{L};$$

l'équation qui détermine u peut s'écrire

$$(5)\qquad \mathrm{L} - u\frac{d\mathrm{L}}{d\lambda} = 0,$$

et, par suite, on aura, pour l'expression de l'une quelconque des coordonnées,

$$(6)\qquad k_1\frac{x}{x'} = \frac{\frac{d\mathrm{L}}{d\lambda}}{\mathrm{L}} + \frac{1}{\lambda - a} = \frac{d}{d\lambda}\log \mathrm{L}(\lambda - a),\ldots.$$

Transformons la valeur du polynôme L, en introduisant à la place des constantes x', y', z', t' les paramètres α, β, γ des surfaces homofocales passant en A. On peut poser

$$(7)\qquad x'^2 = \frac{\varphi(a)}{f'(a)},\quad y'^2 = \frac{\varphi(b)}{f'(b)},\ldots,$$

où

$$(8)\qquad \begin{cases} f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d), \\ \varphi(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma); \end{cases}$$

alors, d'après un théorème de la théorie des fractions rationnelles, L prendra la forme

$$(9)\qquad \mathrm{L} = -\frac{\varphi(\lambda)}{f'(\lambda)},$$

et les formules qui donnent les coordonnées pourront s'écrire définitivement

$$(10)\quad k\frac{x}{x'} = \left(\frac{1}{\lambda-\alpha} + \frac{1}{\lambda-\beta} + \frac{1}{\lambda-\gamma} - \frac{1}{\lambda-b} - \frac{1}{\lambda-c} - \frac{1}{\lambda-d}\right)f(\lambda)\varphi(\lambda),\ldots,$$

qui sont bien, comme on le voit, du cinquième ordre en λ.

Cette courbe peut encore être définie comme le lieu des pieds des normales abaissées de A sur toutes les coniques, intersections de chaque surface par le plan polaire de A par rapport à cette surface.

3. *De la surface Σ, lieu des points de contact des plans tangents menés par un point.*

Si d'un point A on mène des plans tangents aux surfaces homofocales, le lieu des points de contact constitue une surface qu'on peut engendrer de la manière suivante.

Soit S une des surfaces du second degré. Le lieu des points de contact pour cette surface est une conique. L'ensemble de ces coniques forme la surface Σ, qui peut être considérée comme formée de trois nappes, correspondant aux trois séries de focales et se réunissant l'une à l'autre aux deux focales réelles.

La surface Σ contient les trois focales, le cercle de l'infini, les six génératrices des surfaces passant en A et situées deux à deux dans les trois plans tangents aux surfaces passant en A. On sait que ces six génératrices sont les focales des cônes circonscrits à toutes les surfaces homofocales et ayant le point A pour sommet. Elles sont les six arêtes de l'angle tétraèdre formé par les quatre plans tangents communs à toutes les surfaces menées par le point A. Ces plans sont aussi les plans menés par A tangentiellement à la développable Π circonscrite à toutes les surfaces homofocales; ils touchent cette développable suivant quatre génératrices qui appartiennent encore à la surface Σ. *Cette surface contient donc au moins dix droites.*

La surface Σ a évidemment une ligne double, qui est le lieu des pieds des normales menées de A. Considérons, en effet, un point M de cette courbe; la droite AM étant normale à une quadrique sera tangente à la ligne d'intersection des deux autres surfaces passant en M. Les coniques correspondantes à ces surfaces passeront au point M et s'y couperont à angle droit. La tangente à la courbe lieu des pieds des normales déterminera, avec les tangentes aux deux coniques, les deux plans tangents aux deux nappes passant en M.

Le degré de Σ peut se déterminer de la manière suivante. Considérons une droite quelconque passant par A. Cette droite coupe, au point A, les trois nappes de la surface; d'ailleurs elle est tangente à deux surfaces homofocales en deux points qui appartiennent aussi à Σ. La surface est donc coupée par toute droite passant par A en cinq points; elle est du cinquième ordre.

Cette conclusion se confirme par l'étude d'une série de sections planes. Soit P le plan polaire de A par rapport à une des quadriques S. Ce plan contient une conique K, intersection de S et de P. Cherchons les autres points de la surface Σ contenus dans P. Soit *m* un de ces points. Le plan tangent à une des trois quadriques passant par *m* devra aller passer en A. Ce plan a pour axe la perpendiculaire qui lui est menée en *m*; cet axe doit, d'ailleurs, passer par le pôle du plan par rapport à S, pôle qui est dans le plan P. L'axe du plan doit donc être tout entier dans le plan P, et l'on a à chercher le lieu des pieds des axes situés dans ce plan. Ce lieu est une courbe du troisième ordre F, déjà considérée. La section complète de la surface se compose donc d'une conique et d'une courbe du troisième ordre, la focale à nœud de Quetelet.

Dans le plan P se trouvent plusieurs courbes remarquables déjà considérées : 1° la parabole Q enveloppe des axes; 2° la conique K, section de la quadrique S par P; 3° la focale à nœud F, podaire du pied *p* de l'axe de P, par rapport à la parabole P; 4° la section I, hyperbole équilatère du cône des normales par le plan P. Ces différentes courbes donnent lieu à des relations géométriques; signalons les plus importantes : 1° le point *p* se trouve sur la directrice de la parabole Q; 2° cette directrice est le lieu des centres des sections faites dans les quadriques par le plan P; 3° la parabole Q et l'hyperbole équilatère I sont polaires réciproques par rapport à la conique K; 4° la focale à nœud est le lieu des pieds des normales ou des points de contact des tangentes menées de *p* à la conique K et à toutes les courbes homofocales; 5° en chaque point de la focale F, deux des coniques, sections de quadriques qui passent en ce point, sont tangentes entre elles et perpendiculaires à la troisième; 6° en ce qui concerne la surface Σ, les pieds des normales abaissées de *p* sur la conique K sont des points de la courbe double; le plan P est plan tangent double de la surface, et ses points de contact sont ceux des tangentes menées de *p* à la conique K; 7° la polaire du point *p* par rapport à la conique K est la génératrice de Ψ située dans le plan P.

4. *Application de la surface sur un plan.* — Nous avons vu que, si par le point A on mène un plan P, l'axe de ce plan est une tangente double d'une développable de troisième classe Ψ. Cet axe coupe le plan en un point de la surface Σ. *Les points de cette surface se déterminent donc individuellement.* Si l'on considère un plan quel-

conque U, à toute droite de ce plan correspondra un plan passant par A et par cette droite et le point de la surface déterminé par ce point. *La surface est donc représentée sur le plan.*

Considérons l'axe d'un plan P passant par A; cet axe R coupe le plan en un point M de la surface. Il importe d'expliquer comment le point M se distingue des quatre autres points d'intersection de la droite et de Σ. C'est que par l'axe R on peut mener deux plans tangents à la surface Ψ. Ces plans contiennent deux coniques de Σ coupant R en quatre points distincts. Le point M se distingue donc des précédents par une propriété géométrique qui permet de le déterminer individuellement.

Au moyen de la représentation précédente de la surface, on peut étudier sans difficulté la nature des courbes tracées sur cette surface et reconnaître l'existence de plusieurs séries de coniques et de cubiques gauches ou planes. Prenons, par exemple, tous les plans passant par une droite D menée par A. A tous ces plans correspondront une série de points de la surface situés sur une cubique gauche. Il y a donc sur la surface une première série de cubiques. On peut faire passer une de ces courbes par deux points quelconques de la surface MM'. En effet, les plans passant par A et donnant ces deux points M, M' se couperont suivant une droite; tous les plans passant par cette droite donneront une cubique passant par les deux points M, M'.

Ces cubiques deviennent planes toutes les fois que la droite D fait partie du cône des normales, elles sont alors les sections de la surface déjà considérée par les plans polaires de A.

A toutes les droites D situées dans un plan correspond sur la surface un faisceau de cubiques gauches, déterminées par un point et passant par un point fixe. Parmi les plans passant par A se trouvent quatre plans remarquables : Q, Q_1, Q_2, Q_3. Ce sont ceux qui sont tangents à toutes les surfaces et à leur développable circonscrite Π. Ils contiennent leur axe, qui est la génératrice de contact du plan et de la développable Π. Pour toutes les droites passant par le point A et situées dans l'un de ces plans Q, par exemple, la cubique gauche se décompose en : 1° la droite δ, génératrice de contact du plan Q et de Π; 2° une conique rencontrant la droite δ et tangente au point de rencontre avec cette droite au plan Q (1). On obtient donc *quatre*

(1) *Voir* plus haut, 3.

séries nouvelles de sections coniques, correspondant aux droites des plans Q, Q_1, Q_2, Q_3. Étudions la disposition de l'une quelconque de ces séries, celle qui correspond aux droites situées dans le plan Q et passant par A.

Ce plan Q coupe la surface : 1° suivant trois droites α, α', α'', qui sont trois génératrices des surfaces quadriques passant en A; 2° il est tangent en tous les points de la droite δ, génératrice de contact du plan Q et de Π. Les trois autres génératrices β, β', β'' des trois quadriques sont les intersections des autres plans Q_1, Q_2, Q_3 et forment un trièdre. Par toute droite D passant par A dans le plan Q, on pourra faire passer trois plans contenant β, β', β''. Ces trois plans seront tangents aux surfaces qui admettent ces droites pour génératrices en un point de ces génératrices, et il est évident que, lorsque la droite D variera dans le plan, les trois plans tangents, et par conséquent leurs points de contact, formeront trois séries homographiques. On a donc la proposition suivante :

Les plans des coniques correspondantes aux droites du plan Q *enveloppent une développable de troisième classe, tangente aux trois faces du trièdre* $Q_1Q_2Q_3$. *Les coniques coupent la droite* δ *et sont tangentes au plan* Q, *à leur point de rencontre avec cette droite* δ (¹).

Deux coniques appartenant à la même série n'ont aucun point commun (si ce n'est sur la courbe double); deux coniques appartenant à des séries différentes se coupent toujours en un point.

Les plans tangents doubles enveloppent cinq cubiques gauches. Parmi les droites D situées dans le plan Q, s'en trouvent deux remarquables : ce sont les axes situés dans ce plan D_1, D_2, coupant la droite δ en deux points a_1, a_2, qui sont des points de la courbe double pour lesquels les plans tangents aux deux nappes se confondent. A chacune de ces droites correspondent deux plans passant par δ et coupant la surface suivant δ, et deux coniques appartenant à deux séries différentes et tangentes en a_1, a_2 à la droite δ. Nous bornerons là ce que nous avons à dire, pour ne développer que la méthode analytique.

(¹) Il y a une proposition analogue pour les cubiques gauches correspondantes aux droites situées dans un plan : elles coupent les six droites passant par A en six séries de points homographiques.

5. *Étude analytique de la surface* Σ.

Soit

$$(11)\qquad \frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}+\frac{z^2}{c-\lambda}+\frac{t^2}{d-\lambda}=0$$

l'équation générale des surfaces inscrites dans une même développable Π, et désignons par x', y', z', t' les coordonnées du point A. Les formules (7) donnent les valeurs de ces coordonnées en fonction des paramètres α, β, γ des trois surfaces du système passant en A. Le plan polaire du point A par rapport à la surface (λ) aura pour équation

$$(12)\qquad \frac{xx'}{a-\lambda}+\frac{yy'}{b-\lambda}+\frac{zz'}{c-\lambda}+\frac{tt'}{d-\lambda}=0;$$

son équation étant du troisième degré en λ, on voit que ce plan polaire enveloppe une développable Ψ du troisième ordre et de la troisième classe. D'ailleurs, pour les valeurs de λ,

$$\lambda=a,\quad \lambda=b,\quad \lambda=c,\quad \lambda=d,$$

on obtient les quatre plans

$$x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad t=0.$$

Cette développable Ψ sera donc tangente aux quatre faces du tétraèdre conjugué à toutes les surfaces, ce qui confirme les résultats que nous avons déjà obtenus.

L'équation de la surface Σ s'obtiendra en éléminant λ entre les deux équations (11), (12). On obtiendra ainsi une équation du neuvième ordre, qui se réduira au cinquième après la suppression du facteur $xyzt$. On peut écrire cette équation sous la forme d'un déterminant du sixième ordre, qui est

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} x & ax & a^2x & x' & ax' & a^2x' \\ y & by & b^2y & y' & by' & b^2y' \\ z & cz & c^2z & z' & cz' & c^2z' \\ t & dt & d^2t & t' & dt' & d^2t' \\ \sum\frac{x^2}{a} & 0 & 0 & \sum\frac{xx'}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma x^2 & 0 & 0 & \Sigma xx' \end{vmatrix}=0.$$

Cette équation montre que la surface se réduira au quatrième ordre si

$x' = 0$, c'est-à-dire si le point A se trouve sur une des faces du tétraèdre, et au troisième ordre si $x' = y' = 0$, c'est-à-dire si le point se trouve sur une des arêtes du tétraèdre. Nous ne considérons que le cas général, celui où le point A n'est dans aucune des faces du tétraèdre conjugué.

Au lieu de faire l'élimination, on peut chercher à exprimer les coordonnées d'un point de la surface Σ en fonction de deux variables indépendantes. C'est ce qu'il est possible d'effectuer à l'aide du procédé suivant.

Imaginons que, dans l'équation (12), on regarde x, y, z, t comme connus. Cette équation fournira pour λ trois valeurs, qui seront les paramètres des plans tangents à la développable Ψ et passant par le point considéré. On obtient ainsi un nouveau système de coordonnées, dans lequel on détermine un point de l'espace par les paramètres des plans tangents à la développable Ψ et passant par ce point. Soient ρ, ρ_1, ρ_2 les paramètres des trois plans passant par un point (x, y, z, t). Ces trois paramètres seront racines de l'équation (12), et l'on pourra, d'après la théorie des fractions rationnelles, exprimer, à un facteur constant près, dont la valeur est indifférente, x, y, z, t en fonction de ρ, ρ_1, ρ_2. On a ainsi

$$(14)\qquad \begin{cases} kxx' = \dfrac{(a-\rho)(a-\rho_1)(a-\rho_2)}{f'(a)}, \\ kyy' = \dfrac{(b-\rho)(b-\rho_1)(b-\rho_2)}{f'(b)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

où

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c(x-d) \text{ [1]}.$$

Pour obtenir l'équation de la surface Σ, il faudra exprimer qu'une racine de l'équation (12), ρ par exemple, satisfait à l'équation (11), c'est-à-dire que l'on a

$$(15)\qquad \sum \frac{x^2}{a-\rho} = 0.$$

Si nous remplaçons x, y, z, t par leurs valeurs tirées des for-

---

[1] *Voir* la formule (8) : nous conservons les mêmes notations.

mules (14), nous obtenons la condition

$$(16)\quad \sum \frac{(a-\rho)(a-\rho_1)^2(a-\rho_2)^2}{x'^2 f'^2(a)} = 0 = -\sum_{\alpha,\beta,\gamma} \frac{(\alpha-\rho)(\alpha-\rho_1)^2(\alpha-\rho_2)^2}{f(\alpha)\varphi'(\alpha)},$$

qui peut être considérée comme l'équation de la surface dans le système de coordonnées (ρ, ρ_1, ρ_2). Cette équation étant du premier degré en ρ, si l'on en déduit la valeur ρ et qu'on substitue cette valeur dans les équations (14), on a les expressions de x, y, z, t en fonction de deux paramètres ρ_1, ρ_2. Ces deux paramètres sont les deux racines de l'équation (12) qui ne sont pas communes à l'équation (11). Chacun de ces paramètres déterminant un plan, leur ensemble déterminera une droite tangente double de la développable Ψ, en sorte que la représentation de la surface revient à celle que nous avons déjà donnée § 4.

Posons, pour abréger,

$$(17)\qquad A = \frac{(a-\rho_1)(a-\rho_2)}{x'f'(a)},\quad B = \frac{(b-\rho_1)(b-\rho_2)}{y'f'(b)},\ldots;$$

$$(18)\quad E = \frac{(\alpha-\rho)(\alpha-\rho_1)}{x_0\varphi'(\alpha)},\quad F = \frac{(\beta-\rho)(\beta-\rho_1)}{y_0\varphi'(\beta)},\quad G = \frac{(\gamma-\rho)(\gamma-\rho_1)}{z_0\varphi'(\gamma)},$$

en introduisant les notations

$$(19)\qquad x_0 = \sqrt{\frac{f(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}},\quad y_0 = \sqrt{\frac{f(\beta)}{\varphi'(\beta)}},\quad z_0 = \sqrt{\frac{f(\gamma)}{\varphi'(\gamma)}};$$

soit encore

$$(20)\quad \begin{cases} S = a.A^2 + b.B^2 + c.C^2 + d.D^2 = -\alpha.E^2 - \beta.F^2 - \gamma.G^2, \\ T = A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = -E^2 - F^2 - G^2, \end{cases}$$

on aura

$$(21)\qquad \rho = \frac{S}{T},$$

et les coordonnées d'un point de la surface seront données par les formules

$$(22)\qquad \begin{cases} NX = A(S - aT), \\ NY = B(S - bT), \\ NZ = C(S - cT), \\ NT_1 = D(S - dT), \end{cases}$$

où N désigne un facteur indéterminé dont l'introduction provient de ce que les coordonnées x, y, z, t sont homogènes. On déduit facilement, des formules précédentes, la suivante, où entre une arbitraire u et qui les contient toutes :

$$(23)\qquad N\sum \frac{Xx'}{a-u} = \frac{(\rho-u)(\rho_1-u)}{f(u)}(-S+uT).$$

Les formules qui précèdent ont un inconvénient assez grave. Pour un système de valeurs de ρ_1 et de ρ_2, les coordonnées du point de la surface sont bien déterminées, mais la réciproque n'est pas vraie. A un point de la surface correspondront deux systèmes de valeurs pour ρ_1, ρ_2, à cause de la symétrie des formules qui ne changent pas quand on y change ρ_1 en ρ_2 ; mais, si l'on effectue la transformation

$$(24)\qquad y = \rho_1 + \rho_2, \quad x = \rho_1\rho_2,$$

les fonctions A, ..., E, ... prennent la forme

$$(25)\qquad A = a^2 - ay + x, \ldots.$$

Si l'on considère y et x comme les coordonnées d'un point dans un plan, ces fonctions A, ..., E, ..., égalées à zéro, représentent des droites tangentes à la parabole

$$(26)\qquad y^2 - 4x = 0.$$

Les fonctions A, ..., E, ... étant linéaires, les formules (21) sont du troisième ordre en y et x ; elles donnent *une* des représentations les plus simples dont la surface soit susceptible.

Les sept fonctions A, B, C, ... et toute autre fonction linéaire peuvent être exprimées en fonction de trois d'entre elles. On a, par exemple,

$$(27)\qquad \frac{x'f'(a)}{\varphi(a)}A = \frac{x_0 E}{a-\alpha} + \frac{y_0 F}{a-\beta} + \frac{z_0 G}{a-\gamma}.$$

Plus généralement, l'équation

$$(28)\qquad u^2 - uy + x = (\rho - u)(\rho_1 - u) = 0,$$

qui représente une tangente quelconque à la parabole (26), peut être écrite

$$(29)\qquad \frac{(\rho-u)(\rho_1-u)}{\varphi(u)} = \frac{x_0 E}{u-\alpha} + \frac{y_0 F}{u-\beta} + \frac{z_0 G}{u-\gamma} = 0.$$

L'équation de la parabole (26), en fonction de E, F, G, serait

$$(30)\quad (\beta-\gamma)\sqrt{\mathrm{E}x.\varphi'(\alpha)}+(\gamma-\alpha)\sqrt{\mathrm{F}y.\varphi'(\beta)}+(\alpha-\beta)\sqrt{\mathrm{G}z.\varphi'(\gamma)}=0.$$

Dans la suite, nous emploierons tantôt les variables E, F, G, tantôt ρ_1 et ρ_2, dont la signification géométrique nous est connue, et dont l'emploi permet de simplifier les calculs et de dédoubler certaines équations.

Si l'on prend les coordonuées x, y, ou E, F, G, les équations

$$S=0,\quad T=0$$

représentent deux coniques très-importantes que nous appellerons S, T, et qui sont conjuguées aux triangles E, F, G. Les côtés de ce triangle, ainsi que les droites A, B, C, D, sont tangents à la parabole ou conique (30). Les coniques S et T se coupent en quatre points, définis par les équations

$$(31)\qquad \frac{\pm \mathrm{E}}{\sqrt{\beta-\gamma}}=\frac{\pm \mathrm{F}}{\sqrt{\gamma-\alpha}}=\frac{\pm \mathrm{G}}{\sqrt{\alpha-\beta}}.$$

6. *De la correspondance entre les points du plan et ceux de la surface* Σ.

A toute courbe de la surface correspondra sur le plan une certaine courbe; aux sections planes définies par l'équation

$$mX+nY+pZ+qT_1=0,$$

correspondront sur le plan les courbes du troisième ordre dont l'équation est

$$(32)\quad m\mathrm{A}(\mathrm{S}-a\mathrm{T})+n\mathrm{B}(\mathrm{S}-b\mathrm{T})+p\mathrm{C}(\mathrm{S}-c\mathrm{T})+q\mathrm{D}(\mathrm{S}-d\mathrm{T})=0.$$

Ces courbes passent par quatre points fixes déjà déterminés, les quatre points d'intersection des coniques S et T. Mais ces quatre points ne suffisent pas évidemment à définir le réseau des courbes du troisième ordre. On sait, en effet, que les courbes passant par quatre points peuvent encore être assujetties à cinq conditions distinctes, ce qui donne des courbes du troisième ordre beaucoup plus générales que celles qui sont représentées par l'équation (32). Nous donnerons plus loin les propriétés caractéristiques du réseau (32).

Les quatre points d'intersection des coniques S, T, et que nous

appellerons points *fondamentaux*, sont ceux auxquels correspondent sur la surface tous les points d'une ligne droite. En effet, pour un de ces points S, T sont nuls, les valeurs de X, Y, Z, T fournies par les équations (22) sont indéterminées. Soient $A_0, B_0, \ldots$ les valeurs que prennent A, B,... pour un de ces points, la droite qui leur correspond sera évidemment déterminée par les équations

$$(33)\quad \left\{ \begin{aligned} X_1 &= A_0(\lambda - a\lambda'),\\ Y_1 &= B_0(\lambda - b\lambda'),\\ Z_1 &= C_0(\lambda - c\lambda'),\\ T_1 &= D_0(\lambda - d\lambda'); \end{aligned} \right.$$

en éliminant λ, λ' entre ces équations, on aurait les équations de la droite. A chacun des quatre points d'intersection correspondront quatre droites δ, δ', δ'', δ'''. D'ailleurs, pour ces points fondamentaux, les valeurs de ρ_1, ρ_2 sont parfaitement déterminées; c'est la valeur de ρ donnée par l'équation (16) qui est indéterminée. En d'autres termes, ces droites sont des tangentes doubles de la développable Ψ. Ce sont les axes des plans menés par le point A de l'espace et qui sont tangents à toutes les surfaces homofocales.

Les plans tangents menés par la droite δ à la développable Ψ sont donnés par l'équation

$$\sum \frac{Xx'}{a-u} = 0,$$

où il faut remplacer u successivement par les deux racines de l'équation

$$(34)\quad \frac{x_0\sqrt{\beta-\gamma}}{u-\alpha} + \frac{y_0\sqrt{\gamma-\alpha}}{u-\beta} + \frac{z_0\sqrt{\alpha-\beta}}{u-\gamma} = 0.$$

En laissant de côté les quatre points fondamentaux auxquels correspondent des droites de la surface, à tout point du plan correspondra par les formules (22) un seul point de la surface. Réciproquement, si l'on considère un point M de la surface, les valeurs correspondantes de ρ, ρ_1, ρ_2 seront données par l'équation (12). La racine ρ se distinguera des deux autres, parce qu'elle satisfait aussi à l'équation de la surface (11). En la supprimant, on aura une équation du second degré, donnant ρ_1, ρ_2. Les valeurs de x, y, coordonnées du point m du plan, seront données par les formules

$$x = \rho_1\rho_2,\quad y = \rho_1 + \rho_2,$$

qui sont rationnelles. Donc, en général, à un point de la surface correspond un seul point du plan.

Cette conclusion sera en défaut dans un cas seulement. C'est celui où les équations (11) de la surface et celles (12) du plan polaire ont plus d'une racine commune.

Elles ont, par exemple, trois racines communes pour le point A :

$$X = x', \quad Y = y', \ldots,$$

et ces racines sont α, β, γ. Pour ce point A, on ne saura pas distinguer les valeurs de ρ, ρ_1, ρ_2 les unes des autres. On aura donc trois points du plan correspondants au point A :

1° $\quad y = \alpha + \beta, \quad x = \alpha\beta, \quad E = F = 0;$

2° $\quad y = \alpha + \gamma, \quad x = \alpha\gamma, \quad E = G = 0;$

3° $\quad y = \beta + \gamma, \quad x = \beta\gamma, \quad F = G = 0.$

Ce sont les trois sommets du triangle conjugué EFG. Ce fait indique l'existence de trois nappes de la surface se coupant au point A. Suivant que ce point sera considéré comme appartenant à l'une des trois nappes, il aura pour correspondant l'un ou l'autre des trois points.

Un deuxième cas d'exception se présente quand les équations de la surface et du plan polaire (11), (12) ont deux racines communes. Dans ce cas, soient ρ, ρ_1 ces deux racines que rien ne distingue l'une de l'autre; on pourra prendre :

soit

$$y = \rho_1 + \rho_2, \quad x = \rho_1\rho_2;$$

soit

$$y = \rho + \rho_2, \quad x = \rho\rho_2.$$

A tout point de la surface pour lequel ce fait de deux racines communes se présente, correspondent deux points du plan. Les points de cette nature forment la ligne double de la surface, et nous allons en premier lieu chercher la nature de cette courbe double et de sa représentation sur le plan.

De la courbe double. — Reprenons l'équation (16) de la surface, qu'on peut écrire, en vertu d'un théorème relatif aux fractions rationnelles,

$$(35)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{(\alpha-\rho)(\alpha-\rho_1)^2(\alpha-\rho_2)^2}{f(\alpha)\varphi'(\alpha)} + \frac{(\beta-\rho)(\beta-\rho_1)^2(\beta-\rho_2)^2}{f(\beta)\varphi'(\beta)} \\ &\qquad + \frac{(\gamma-\rho)(\gamma-\rho_1)^2(\gamma-\rho_2)^2}{f(\gamma)\varphi'(\gamma)} = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour tous les points de la courbe double, ρ, ρ_1 étant les deux racines communes aux équations (11), (12), on peut les permuter, ce qui donne une nouvelle équation qui, avec l'équation (35), définit la courbe double. En retranchant ces deux équations, on trouve

$$(36)\qquad \frac{(\alpha-\rho)(\alpha-\rho_1)(\alpha-\rho_2)^2}{f(\alpha)\varphi'(\alpha)}+\ldots=0,$$

ou

$$(37)\qquad \frac{(S-\alpha T)E^2}{\alpha-\rho_1}+\frac{(S-\beta T)F^2}{\beta-\rho_1}+\frac{(S-\gamma T)G^2}{\gamma-\rho_1}=0.$$

Remplaçons S et T par leurs valeurs en E, F, G, et nous trouverons, après quelques réductions,

$$(38)\quad \frac{x_0^2}{(\alpha-\rho_1)(\alpha-\rho_2)^2}+\frac{y_0^2}{(\beta-\rho_1)(\beta-\rho_2)^2}+\frac{z_0^2}{(\gamma-\rho_1)(\gamma-\rho_2)^2}=0.$$

Il y a plusieurs remarques à faire sur cette dernière équation, qui donne la relation entre ρ_1 et ρ_2, convenant à tous les points de la courbe double.

D'abord, elle est du second degré en ρ_1. Les deux racines sont les valeurs de ρ_1 et de ρ correspondantes à ρ_2; car tout est symétrique par rapport à ρ et ρ_1. On peut donc déduire les expressions de ρ, ρ_1, et par conséquent de celles de y, x ou de E, F, G en fonction de ρ_2, et ces expressions ne contiendront qu'un radical carré du huitième degré, ce qui prouve, conformément à la théorie générale, que la courbe plane représentative de la courbe double est du *genre* 3. La quantité Ω, sous le radical, se décompose en quatre facteurs du second degré; on peut l'écrire

$$(39)\qquad \Omega=\Pi\left(\pm\frac{x_0\sqrt{\beta-\gamma}}{\alpha-\rho_2}\pm\frac{y_0\sqrt{\gamma-\alpha}}{\beta-\rho_2}\pm\frac{z_0\sqrt{\alpha-\beta}}{\gamma-\rho_2}\right).$$

Ainsi, pour huit points de la courbe double, les deux points du plan qui représentent en général le point de cette courbe viennent se réunir. Les huit points sont, nous le verrons, situés deux à deux sur les quatre droites δ.

En second lieu, on peut déduire de l'équation (38) un mode de génération de la courbe plane, image de la courbe double.

Soit, en effet,

$$\rho_2^2-\rho_2 y+x=0$$

l'équation d'une tangente à la parabole (26) au paramètre ρ_2. Cette équation peut encore s'écrire, en vertu de l'équation (29),

$$(40) \qquad \frac{x_0 E}{\rho_2 - \alpha} + \frac{y_0 F}{\rho_2 - \beta} + \frac{z_0 G}{\rho_2 - \gamma} = 0;$$

soit en outre

$$(41) \quad S - \rho_1 T = 0 = (\alpha - \rho_1) E^2 + (\beta - \rho_1) F^2 + (\gamma - \rho_1) G^2 = 0$$

l'équation d'une conique au paramètre ρ_1, passant par les points fondamentaux. L'équation (28) est la condition de contact de la conique (41) et de la droite (40). Donc :

Si l'on mène une tangente quelconque à la parabole (26), *et que, par les quatre points fondamentaux, on fasse passer les deux coniques tangentes à la droite, les deux points de contact de ces coniques sont les deux points qui correspondent à un même point de la surface.*

Il résulte de ce mode de génération que :

La courbe plane correspondante à la courbe double sera du sixième ordre; elle aura pour points doubles les quatre points fondamentaux, et, pour tangentes en ces points, les tangentes menées de ces points à la parabole; elle aura, en outre, pour points doubles, les points E, F, G, *et pour tangentes en ces points les côtés du triangle* EFG.

Les deux points de contact d'une conique et de la droite ne se réuniront que lorsque la droite tangente à la parabole viendra passer en un des points fondamentaux, ce qui montre que les points de la surface correspondants seront deux à deux sur les quatre droites, correspondant aux quatre points fondamentaux. On vérifie en même temps que la courbe est bien du genre 3.

Il reste à trouver l'équation de la courbe. Pour cela, il faudra remplacer, dans l'équation (38), ρ_1, ρ_2 par leurs valeurs tirées des équations

$$\rho_1 + \rho_2 = y, \quad \rho_1 \rho_2 = x;$$

seulement, l'équation (40), n'étant pas symétrique en ρ_1, ρ_2, contiendrait le radical $\sqrt{y^2 - 4x}$. Pour éviter ce radical, permutons-y ρ_1 et ρ_2, et faisons le produit des deux équations, ce qui donnera l'équation rationnelle de la courbe double [1]. On obtient ainsi

[1] Des faits de même genre se présentent toutes les fois qu'on change de coordon-

l'équation

$$(42)\qquad \frac{x_0(\beta-\gamma)}{E(S-\alpha T)}+\frac{y_0(\gamma-\alpha)}{F(S-\beta T)}+\frac{z_0(\alpha-\beta)}{G(S-\gamma T)}=0,$$

qui représente une courbe du sixième ordre ayant les propriétés que nous venons de signaler. Ainsi se trouve résolue la question de la correspondance entre les points de la surface et ceux du plan. La théorie générale permet maintenant de faire l'étude complète des courbes tracées sur la surface Σ.

On peut facilement, au moyen de l'équation précédente, prouver que la courbe double est l'intersection complète de la surface Σ et du cône des normales.

Car, si l'on désigne par P, P_1, P_2 les plans tangents aux trois surfaces homofocales passant en A, on aura

$$P=\sum\frac{xx'}{\alpha-a}=\frac{x_0\varphi'(\alpha)}{f(\alpha)}(\alpha T-S)E,$$

et des équations semblables pour P_1, P_2. L'équation (42) pourra donc s'écrire

$$\frac{\varphi'(\alpha)}{P}+\frac{\varphi'(\beta)}{P_1}+\frac{\varphi'(\gamma)}{P_2}=0.$$

Sous cette forme, on voit facilement qu'elle représente le cône des normales ayant son sommet en A.

7. *Étude des courbes tracées sur la surface* Σ.

Nous avons déjà vu qu'à toute section plane de la surface correspond une courbe du troisième ordre, dont l'équation est

$$(43)\quad m(S-aT)A+nB(S-bT)+pC(S-cT)+qD(S-dT)=0.$$

Ces courbes se distinguent de toutes les autres courbes du troisième ordre, par la propriété suivante : elles coupent la courbe double en dix points, disposés par paires, correspondantes aux cinq points doubles de la section plane.

Les courbes passant par l'intersection de deux d'entre elles correspondent à une section plane passant par une droite. Comme on sait que, dans tout faisceau de courbes du troisième ordre, il y en a

---

nées. Par exemple, une équation en coordonnées rectilignes peut se décomposer quand on passe aux coordonnées polaires.

douze ayant un point double, on peut conclure que *la surface Σ est de la douzième classe*, comme la surface générale du troisième ordre.

Parmi les sections planes, on rencontre plusieurs séries remarquables, déjà étudiées en partie par la géométrie. Cherchons la section par l'un des plans polaires du point A,

$$\sum \frac{X x'}{a-u} = 0.$$

En vertu de l'équation (23), cette section est représentée par la courbe

$$(\rho - u)(\rho_1 - u)(S - uT) = 0,$$

qui se compose : 1° d'une droite

$$(44) \qquad (\rho - u)(\rho_1 - u) = 0,$$

à laquelle correspond dans la surface une courbe à point double du troisième ordre, la focale à nœud F; 2° d'une conique

$$(45) \qquad S - uT = 0,$$

à laquelle correspond la conique, section d'une surface du second ordre par le plan polaire.

Si l'on dispose des coefficients m, n, p, q de telle manière que la courbe du troisième ordre ait un point double en l'un des points fondamentaux, le plan de section passera par la droite correspondante de la surface. Nous avons déjà vu que, par chaque droite, passent deux plans tangents de la développable Ψ, ou deux plans polaires de A :

$$\sum \frac{X x'}{a-h} = 0, \quad \sum \frac{X x'}{a-h'} = 0,$$

où h et h' sont racines de l'équation (34). L'équation générale des plans passant par la droite sera

$$\sum \frac{X x'}{a-h} + \lambda \sum \frac{X x'}{a-h'} = 0,$$

et les sections auront pour représentation

$$(46) \quad (h - \rho_1)(h - \rho_2)(S - hT) + \lambda(h' - \rho_1)(h' - \rho_2)(S - h'T) = 0.$$

On reconnaît sans peine que la courbe du troisième ordre ayant

pour point double le point fondamental a, y est tangente aux deux branches de la courbe du sixième ordre. Par suite, les sections seront des courbes du quatrième ordre, à trois points doubles, tangentes à la droite δ, aux deux points a_1, a_2, où celle-ci est coupée par la courbe double. On doit remarquer les valeurs $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$, pour lesquelles la courbe du quatrième ordre se décompose en deux coniques. Ainsi: *Les huit plans tangents à la développable Ψ passant par les droites δ coupent la surface suivant deux coniques et la droite correspondante.*

Soient a, a_1, a_2, a_3 les quatre points fondamentaux. Pour une valeur particulière de λ, la courbe du troisième ordre (46) acquiert un point triple, et se décompose en trois droites, aa_1, aa_2, aa_3. Dans ce cas, la section passe par le point a et la droite δ. Elle se compose: 1° de la droite δ, prise deux fois; 2° des trois focales des cônes circonscrits situées dans ce plan.

Des droites. — A toute courbe d'ordre m, tracée sur le plan, correspond une courbe d'ordre $3m - \alpha$ sur la surface, α désignant le nombre de fois que la première courbe passe par les points fondamentaux. Il en résulte que, si l'on désigne par a, a_1, a_2, a_3 les quatre points fondamentaux, les quatre côtés et les diagonales du quadrilatère donneront six droites nouvelles de la surface. Les six droites du plan passant par un des sommets du triangle conjugué, les droites correspondantes passeront par le point triple A de la surface. Ce sont les six focales déjà trouvées. Il n'y a pas d'autre droite sur Σ.

Des coniques. — Toutes les coniques de la surface correspondent soit aux coniques passant par les quatre points fondamentaux, soit aux droites passant par l'un des points. Deux coniques appartenant à des séries différentes se coupent en un point; deux coniques de la même série ne se rencontrent pas. Les plans de ces coniques sont des plans tangents doubles, distribués en cinq séries et enveloppant cinq développables de troisième classe. Il y a deux plans tangents communs aux quatre séries représentées par des droites et à la série représentée par des coniques, etc.

Des cubiques gauches. — Il y a aussi cinq séries de cubiques gauches correspondant: 1° aux droites quelconques du plan; 2° aux coniques quelconques passant par trois des points fondamentaux. Ces cubiques peuvent devenir planes, et elles complètent alors les sections de la surface par les plans des coniques. Deux cubiques appartenant à des séries différentes se coupent en deux points.

Des courbes du quatrième ordre. — Les courbes du quatrième ordre correspondent : 1° aux coniques passant par deux des points fondamentaux ; 2° aux courbes du troisième ordre ayant un point double en un des points fondamentaux : ce qui fait en tout dix séries de courbes du quatrième ordre. Ces courbes, étant rationnelles, ne se trouvent sur plusieurs surfaces du second ordre que si elles ont un point double, ce qui arrivera toutes les fois que la courbe qui les représente sur le plan passe par un couple de points conjugués de la courbe double.

De l'intersection de la surface avec une surface donnée. — Il est inutile de développer cette théorie, conséquence immédiate des travaux de M. Clebsch. Nous ferons cependant remarquer qu'il y a une série de surfaces du troisième ordre passant par la courbe double et coupant la surface suivant une courbe du cinquième ordre. Cette courbe du cinquième ordre est représentée par toute courbe du troisième ordre passant par les quatre points fondamentaux.

Considérons enfin l'intersection de Σ avec quelques surfaces remarquables :

1° Avec la développable Ψ :

Cette développable est définie par les équations

$$\rho = \rho_1 \quad \text{ou} \quad \rho = \rho_2 \quad \text{ou} \quad \rho_1 = \rho_2.$$

Les équations $\rho = \rho_1$, $\rho = \rho_2$ donnent, en remplaçant ρ par $\frac{S}{T}$, l'équation

$$(S - \rho_1 T)(S - \rho_2 T) = 0, \tag{47}$$

ou

$$S^2 - yTS + T^2 x = 0, \tag{48}$$

qui représente une courbe du cinquième ordre ayant pour points doubles les quatre points fondamentaux. Cette courbe correspond, sur la surface, à la courbe lieu des points de contact des plans tangents doubles, plans polaires de A par rapport à toutes les surfaces homofocales. En tous ses points, Σ et Ψ sont tangentes, et elle est du septième ordre.

La courbe

$$\rho_1 = \rho_2$$

est la parabole

$$y^2 - 4x = 0,$$

qui correspond à une courbe du sixième ordre, tracée sur la surface.

2° Intersection de Σ avec la développable Π, circonscrite à toutes les surfaces homofocales.

Cette intersection se compose : 1° des quatre droites δ, suivant lesquelles les deux surfaces sont tangentes; 2° des trois focales et du cercle de l'infini, qui sont lignes doubles de la surface Π; 3° d'une courbe qu'on peut définir ainsi : c'est le lieu des points de contact des plans tangents menés par A à chaque surface, et contenant une des génératrices de la surface, qui vont rencontrer le cercle de l'infini. La représentation de cette courbe s'obtient sans difficulté; elle a pour équation

$$\frac{A}{x'}\sqrt{\frac{b-c}{(b-d)(c-d)}}\sqrt{S-aT}+\frac{B}{y'}\sqrt{\frac{c-a}{(c-d)(a-d)}}\sqrt{S-bT}$$
$$+\frac{C}{z'}\sqrt{\frac{a-b}{(c-d)(b-d)}}\sqrt{S-cT}=0.$$

Elle est du huitième ordre, et appartient à la classe des courbes appelées *polyzomales* par M. Cayley (¹). Elle a pour points doubles les quatre points fondamentaux, et correspond à une courbe du seizième ordre tracée sur la surface Σ. Cette courbe du seizième ordre complète, avec les quatre droites et les quatre coniques comptées chacune pour deux, la courbe du quarantième ordre, intersection de Σ et de Π.

La méthode précédente s'applique sans difficulté à la surface générale du cinquième ordre ayant une ligne double de même ordre, dont les sections planes sont représentées par des courbes du troisième ordre. Les résultats obtenus ne subissent pas de modification essentielle.

(¹) Voir *Bulletin*, t. I, p. 159.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

CLAUSIUS, professeur à l'Université de Bonn. — DE LA FONCTION POTENTIELLE ET DU POTENTIEL. Traduit de l'allemand par F. FOLIE, professeur à l'École industrielle de Liége. — Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-libraire, 1870. Prix : 4 fr.

Cet Ouvrage est un traité didactique, qui peut servir d'introduction à la Physique mathématique, et principalement à la partie de cette science qui s'occupe de la distribution de l'électricité et du magnétisme.

Laplace a remarqué, le premier, que les composantes de l'attraction exercée par un corps m sur un point sont proportionnelles aux dérivées partielles de la fonction $V=\sum\frac{dm}{r}$, où r désigne la distance de l'élément de masse au point attiré; mais ce n'est pas seulement dans les problèmes relatifs à l'attraction des corps pondérables que cette fonction, ou une fonction analogue, joue un rôle important. On la retrouve dans toutes les questions où l'on a à considérer des forces naturelles, attractives ou répulsives, qui agissent en raison inverse du carré de la distance. L'étude des propriétés de cette fonction forme donc le préliminaire obligé d'un grand nombre de théories physiques. Poisson et Green en ont fait la base de leurs recherches sur l'électricité et le magnétisme. Plus tard, Gauss, reprenant la question à un point de vue analytique, aborda directement des difficultés que ses prédécesseurs avaient négligées. C'est la théorie de Gauss, étendue et simplifiée, que M. Clausius nous présente sous une forme élégante et rapide.

Les difficultés analytiques de cette théorie se rencontrent surtout dans le cas important où, l'agent étant distribué d'une manière quelconque dans un espace fermé ou sur une surface, le point qui subit l'action est situé dans l'intérieur de cet espace ou sur cette surface, dans le voisinage des limites. Il s'agit de savoir, dans ce cas où la distance r passe par zéro, et où l'homogénéité fait défaut, si la fonction V et ses dérivées partielles du premier et du second ordre conservent des valeurs finies et déterminées, et comment l'on pourra calculer ces valeurs. M. Clausius traite les différentes parties de ce problème par une méthode uniforme, avec une rigueur et une précision qui ne laissent rien à désirer.

M. Clausius distingue le potentiel de la fonction potentielle. Il conserve à la fonction $V = \sum \frac{dm}{r}$ ce dernier nom, que Green lui a donné; et il appelle *potentiel* d'un système sur un autre, ou d'un système sur lui-même, la somme des fonctions V qui déterminent toutes les actions d'un système sur les différents points d'un autre système, ou les actions mutuelles des différents points d'un même système. On voit que le potentiel se déduit de la fonction potentielle par une intégration. C'est le potentiel qui s'introduit, en Mécanique, dans les équations fondamentales que fournissent les principes des vitesses virtuelles, de d'Alembert, et des forces vives. Pour faire saisir exactement la raison de ce fait, M. Clausius expose, en peu de mots, ces principes généraux, sans chercher à les démontrer de nouveau, mais en s'attachant à en préciser le sens et la portée. On lira avec intérêt cette partie de l'Ouvrage, soit dans le texte original, soit dans l'élégante traduction de M. Folie.

Nous regrettons que le cadre, trop étroit, dans lequel l'éminent auteur a cru devoir se renfermer, ne lui ait pas permis de rappeler les beaux théorèmes sur les surfaces de niveau, que M. Chasles a fait connaître il y a plus de trente ans. Ces théorèmes, qui comprennent comme cas particulier l'attraction des ellipsoïdes, et qui s'appliquent si naturellement aux actions attractives ou répulsives des couches électriques, nous auraient paru tout à fait à leur place dans un traité comme celui-ci. On nous reproche, à nous Français, de négliger de parti pris les travaux qui s'exécutent au delà de nos frontières. La publication de ce *Bulletin* peut servir à prouver que ce reproche n'est pas toujours mérité; en tous cas, il doit nous être permis de signaler une omission si considérable dans un ouvrage, excellent d'ailleurs, et signé d'un nom qui n'est pas célèbre seulement en Allemagne.

Ch. S.

SCHLOEMILCH (Dr Oscar), königl. sächs. Hofrath, Professor an der Polytechnischen Schule zu Dresden. — Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. — 2 Bde. 8; 1868-1870. Leipzig, Verlag von B.-G. Teubner. Pr. : 5 Thlr. 18 Ngr. (1).

Le premier volume de cet Ouvrage (264 p.), publié en 1868, con-

(1) Schlömilch (Dr O.), conseiller aulique du royaume de Saxe, professeur à l'École

tient des problèmes sur le Calcul différentiel. Après avoir donné, dans le premier Chapitre des exercices sur la différentiation des fonctions explicites d'une seule variable, l'Auteur traite, dans les deux Chapitres suivants, du calcul direct des différentielles d'ordres supérieurs des mêmes fonctions, et de la différentiation des équations entre deux ou plusieurs variables. Les Chapitres IV et V sont consacrés à la discussion et aux diverses propriétés des courbes planes, le Chapitre VI à la discussion des courbes à double courbure, et le Chapitre VII à celle des surfaces. Le Chapitre VIII contient des exercices sur les courbes et les surfaces enveloppes. Dans le Chapitre IX, il est question de la détermination des valeurs-limites des fonctions qui se présentent sous forme indéterminée, et, dans le Chapitre X, de la théorie des maxima et minima. Le Chapitre XI renferme les exercices relatifs à la théorie des séries, et, en particulier, aux séries de Taylor et de Maclaurin : représentation approximative des fonctions; résolution des équations transcendantes. Le Chapitre XII traite des fonctions et des séries de variables complexes, au point de vue élémentaire.

Le second volume (338 p.) est consacré aux exercices sur le Calcul intégral. Le premier Chapitre contient des exemples des diverses méthodes d'intégration des fonctions explicites. Les Chapitres II et III ont pour objet les applications géométriques de l'intégration simple : quadrature et rectification des courbes planes, cubature et complanation des surfaces cylindriques et de révolution, etc. Dans les Chapitres IV et V, l'Auteur traite des intégrales définies simples et des principales méthodes pour les calculer : intégrations indéfinies, transformations, différentiations et intégrations sous le signe $\int$; développement en séries et en produits infinis; sommation des séries par les intégrales définies. Les Chapitres VI et VII renferment des exercices sur les intégrales doubles et triples, et sur leurs applications géométriques et mécaniques. Le Chapitre VIII traite des valeurs moyennes des fonctions et de leur évaluation approximative. Les deux derniers Chapitres sont relatifs à l'intégration des équations différentielles : équation du premier ordre; applications aux problèmes des développantes, des trajectoires, des roulettes; équations différentielles

---

Polytechnique de Dresde. — *Recueil d'Exercices pour l'étude de l'Analyse supérieure.* — 2 vol. in-8°, 1868-1870. Leipzig, Teubner.

du second ordre, équations linéaires, équations homogènes, équations fonctionnelles.

On voit que le cadre de cet Ouvrage est le même que celui que l'Auteur a adopté dans le premier volume de son *Compendium der höheren Analysis,* dont nous avons rendu compte ailleurs (¹). Il serait à désirer que M. Schlömilch donnât une suite à son *Recueil d'Exercices,* et qu'il y introduisît, outre les matières du second volume de son *Compendium,* les théories que nous regrettons de ne pas voir traitées dans ce livre, telles que celles des équations différentielles simultanées, des équations aux dérivées partielles, le calcul des variations, etc. Les deux volumes que nous possédons seront certainement d'un précieux secours dans l'enseignement supérieur des mathématiques, où le bon choix des exercices proposés aux étudiants est un élément de succès, parfois trop négligé. J. H.

KOSSAK (Ernst). — Das Additionstheorem der ultra-elliptischen Functionen erster Ordnung. — Berlin, Nicolai'sche Verlagsbuchhandlung, 1871 (²).

M. Rosenhain, dans son beau *Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes, qui sont les inverses des intégrales ultra-elliptiques de la première classe* (*Mém. des Sav. étr.* t. XI), avait établi un théorème général relatif à l'addition des arguments pour les transcendantes hyperelliptiques de la première classe; un tableau, placé à la fin du Mémoire, réunit les formes diverses que ce théorème peut revêtir.

En 1864, M. Kœnigsberger a donné les formules analogues pour les fonctions hyperelliptiques d'une classe quelconque (*Journal de Crelle,* t. 64); celles qui se rapportent à la première classe sont présentées d'une manière assez complète et sous une forme qui rappelle la formule fondamentale de la théorie des fonctions elliptiques,

$$\sin\operatorname{am}(u+v)=\frac{\sin\operatorname{am}u\cos\operatorname{am}v\,\Delta\operatorname{am}v+\sin\operatorname{am}v\cos\operatorname{am}u\,\Delta\operatorname{am}u}{1-k^2\sin\operatorname{am}u\sin\operatorname{am}v}.$$

(¹) *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 2ᵉ série, t. IX, p. 385, 1870.

(²) Kossak (E.). *Le théorème d'addition des fonctions hyperelliptiques de la première classe.* Berlin, Nicolaï, brochure in-4°.

M. Kossak, l'un des élèves distingués de M. Richelot, avait établi, à la même époque, plusieurs de ces formules dans une thèse d'agrégation, restée inédite, en faisant usage du tableau de M. Rosenhain. Dans le théorème qu'il vient de publier, les mêmes résultats sont déduits directement du théorème fondamental qui concerne les transcendantes de la première classe. M. Rosenhain définit la transcendante φ_{33} en posant

$$\varphi_{33}(v, w) = \sum_{-\infty}^{+\infty} m \sum_{-\infty}^{+\infty} n\, e^{m^2 \log p + n^2 \log q + 4mnA + 2mv + 2nw},$$

et il en déduit, à l'aide de certaines transformations, quinze autres transcendantes $\varphi_{r,s}$ (où il faut prendre pour r, s deux des nombres 0, 1, 2, 3). On a, notamment,

$$\varphi_{00}(v, w) = \varphi_{33}(v + \tfrac{1}{2}i\pi, w + \tfrac{1}{2}i\pi).$$

Les quinze rapports $\frac{\varphi_{rs}}{\varphi_{00}}$ constituent les fonctions hyperelliptiques de la première classe, auxquelles correspondent les fonctions elliptiques sin am, cos am, Δ am. Le théorème de M. Rosenhain a la forme suivante

$$P_{33} + P_{32} + P_{23} + P_{22} = P'_{33} + P'_{32} + P'_{23} + P'_{22},$$

où les P sont des produits de quatre facteurs

$$P_{33} = \varphi_{33}(v, w).\varphi_{33}(v', w').\varphi_{33}(v'', w'').\varphi_{33}(v''', w'''),$$

et les P' des produits analogues dans lesquels les arguments v, v', v'', v''' et w, w', w'', w''' sont remplacés par les huit combinaisons $v \pm v' \pm v'' \pm v'''$ et $w \pm w' \pm w'' \pm w'''$. En attribuant à ces arguments des valeurs particulières pour lesquelles l'une ou l'autre des transcendantes φ s'évanouit, M. Kossak obtient les expressions des seize produits

$$\varphi_{rs}(y + y', z + z').\varphi_{00}(y - y', z - z')$$

par les transcendantes $\varphi_{r,s}(y, z)$ et $\varphi_{r,s}(y', z')$; en les divisant par le produit

$$\varphi_{00}(y + y', z + z').\varphi_{00}(y - y', z - z'),$$

on a les expressions des fonctions hyperelliptiques

$$\Phi_{rs}(y + y', z + z') = \frac{\varphi_{rs}(y + y', z + z')}{\varphi_{00}(y + y', z + z')}.$$

Afin d'abréger, nous écrirons avec l'auteur

$$\begin{array}{lll} rs \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{pour} & \varphi_{rs}(y, z), \\ rs_1 \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{pour} & \varphi_{rs}(y', z'), \\ rs_0 \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{pour} & \varphi_{rs}(0, 0), \\ [rs] \ldots\ldots\ldots & \text{pour} & \varphi_{rs}(y+y', z+z'), \\ (rs) \ldots\ldots\ldots & \text{pour} & \varphi_{rs}(y-y', z-z'). \end{array}$$

On trouve ainsi, par exemple,

$$\begin{aligned} 00_0^2[00](00) &= 00^2.00_1^2 - 10^2.10_1^2 - 31^2.31_1^2 + 21^2.21_1^2 \\ &= 00^2.00_1^2 - 01^2.01_1^2 - 13^2.13_1^2 + 12^2.12_1^2. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} 33_0.00_0[33](00) &= 00\,.33\,.00_1.33_1 + 10\,.23\,.10_1.23_1 \\ &\quad + 31\,.02\,.31_1.02_1 + 21\,.12\,.21_1.12_1 \\ &= 00\,.33\,.00_1.33_1 + 01\,.32\,.01_1.32_1 \\ &\quad + 13\,.20\,.13_1.20_1 + 12\,.21\,.12_1.21_1, \\ 20_0.30_0[10](00) &= 00\,.10\,.20_1.30_1 - 01\,.11\,.21_1.31_1 \\ &\quad + 00_1.10_1.20\,.30 - 01_1.11_1.21\,.31, \\ 02_0.03_0[01](00) &= 00\,.01\,.02_1.03_1 - 10\,.11\,.12_1.13_1 \\ &\quad + 00_1.01_1.02\,.03 - 10_1.11_1.12\,.13, \end{aligned}$$

et ainsi de suite. La division donne pour la fonction Φ_{10}, qui correspond au sin am,

$$\begin{aligned} &\Phi_{10}(y+y', z+z') \\ &\quad = \frac{\Phi_{10}\Phi'_{20}\Phi'_{30} - \Phi_{01}\Phi_{11}\Phi'_{21}\Phi'_{31} + \Phi'_{10}\Phi_{20}\Phi_{30} - \Phi'_{01}\Phi'_{11}\Phi_{21}\Phi_{31}}{\Phi^0_{20}\Phi^0_{30}(1 - \Phi^2_{10}\Phi'^2_{10} - \Phi^2_{31}\Phi'^2_{31} + \Phi^2_{21}\Phi'^2_{21})}, \end{aligned}$$

où nous avons écrit

$$\Phi \text{ pour } \Phi(y, z), \quad \Phi' \text{ pour } \Phi(y', z'),$$

et

$$\Phi^0 \text{ pour } \Phi(0,0).$$

Si l'on ajoute d'abord $\frac{1}{2}i\pi$ à tous les arguments et que l'on fasse ensuite $y' = z' = 0$, les formules relatives aux produits $[rs](00)$ donnent encore une série d'équations telles que la suivante :

$$20_0.30_0.00.10 = 23_0.33_0.03.13 - 22_0.32_0.12.02.$$

Pour comparer les formules de M. Kossak à celles de M. Kœnigsberger, on a la correspondance des indices

Rosenhain. — Kossak.

33, 10, 20, 31, 32, 00, 23, 13, 02, 01, 30, 21, 22, 11, 12, 03.

Kœnigsberger.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 01, 02, 03, 04, 12, 13, 14, 23, 24, 34.

On trouve alors que, parmi les expressions des seize produits $[rs](00)$ données par M. Kœnigsberger, dix seulement coïncident avec les expressions adoptées par M. Kossak; mais les tableaux de M. Rosenhain permettent de représenter chacun de ces produits de six manières différentes, et M. Kossak développe subsidiairement les six expressions de quelques-uns des produits $[rs](00)$, parmi lesquels se rencontrent alors les formes adoptées par lui et par M. Kœnigsberger.

M. Kossak s'occupe ensuite des dérivées partielles des fonctions Φ, prises par rapport aux arguments y et z. Il termine par l'indication des formules relatives à l'addition des arguments des intégrales de deuxième et de troisième espèce. R. R.

NICOLAIDÈS (N.), Docteur ès Sciences mathématiques de la Faculté de Paris. — ANALECTES ou *Série de Mémoires sur les diverses parties des Mathématiques.* — 1re et 2e livraison, in-8; Athènes, Imprimerie nationale, 1871. — Paris, Gauthier-Villars. Prix de chaque livraison : 80 cent.

Le titre de l'Ouvrage que nous annonçons indique que M. Nicolaïdès publiera d'une manière régulière les résultats de ses travaux si variés. Les deux premières livraisons contiennent plusieurs Mémoires dont nous donnons les titres :

Mémoire sur le mouvement d'un point matériel. (25 p.)
Sur la théorie des surfaces. (6 p.)
Note sur la théorie des nombres. (5 p.)
Sur le mouvement d'un point matériel. (15 p.)
Sur quelques articles des Nouvelles Annales de Mathématiques. (4 p.)

Dans le *Mémoire sur le mouvement d'un point matériel,* l'auteur se

propose de généraliser le théorème des aires, et il obtient la proposition suivante : Toutes les fois qu'un point se meut dans l'espace, et que la force accélératrice est située dans un plan perpendiculaire au plan mené par la vitesse du mobile et le rayon vecteur, l'aire parcourue par ce rayon est proportionnelle au temps. G. D.

KLEIN ET LIE. — *Sur les lignes asymptotiques de la surface de Kummer du quatrième ordre à seize points singuliers* (¹).

Nous avons déjà rendu compte (²) d'une théorie nouvelle dont Plücker, vers la fin de sa vie, a enrichi la science. Cet illustre géomètre, à qui la Géométrie analytique doit l'étude approfondie des coordonnées tangentielles et la première idée des coordonnées homogènes, était revenu aux études de Géométrie ; ses derniers travaux présentés à la Société Royale de Londres, et qu'il a réunis en un volume (³), paraissent devoir exercer une très-grande influence sur les progrès ultérieurs de la Géométrie. Plücker a eu l'heureuse idée de considérer la ligne droite comme un élément de l'espace ; il désigne et réunit sous le nom de *complexes* l'ensemble des lignes droites assujetties à une seule condition ; les lignes droites assujetties à deux conditions forment une *congruence* ; celles qui sont soumises à trois conditions, une *surface réglée*. Si l'on étudie toutes les droites d'un complexe, qui passent par un point de l'espace, on reconnaît que ces droites forment, en général, un cône dont l'ordre est appelé l'*ordre du complexe* ; au contraire, il ne passe par un point de l'espace ou il ne se trouve dans un plan qu'un nombre limité de droites appartenant à une congruence donnée.

La théorie des complexes du premier ordre coïncide avec une théorie due à M. Chasles, celle du déplacement d'un corps solide dans l'espace ; un des complexes du second ordre les plus importants, celui des normales aux surfaces homofocales du second ordre, avait aussi été étudié par M. Chasles dans l'*Aperçu historique* ; mais l'étude

---

(¹) Extrait des *Comptes rendus mensuels de l'Académie des Sciences de Berlin*, 15 décembre 1870.

(²) Voir *Bulletin*, p. 73.

(³) PLÜCKER, *Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement* ; Teubner, 1868-69.

des complexes généraux du second ordre est nouvelle, et elle vient de conduire MM. Klein et Lie à une conséquence extrêmement intéressante.

Soient, pour plus de simplicité,

$$x = az + p,$$
$$y = bz + q,$$

les équations d'une ligne droite. L'équation générale du second degré entre les cinq variables

$$a,\quad b,\quad p,\quad q,\quad aq - bp$$

représente le complexe du second ordre. Cette équation, étudiée par Plücker, contient 19 constantes. Toutes les droites situées dans un plan enveloppent une courbe de seconde classe; toutes celles qui passent par un point décrivent un cône du second degré.

Si l'on cherche le lieu des points de l'espace pour lesquels ce cône se décompose en deux plans, on obtient une surface remarquable du quatrième ordre, qui avait été rencontrée par M. Kummer dans ses belles études sur les systèmes de rayons rectilignes algébriques.

Cette surface est aussi l'enveloppe des plans, pour lesquels la conique du complexe se décompose en deux points.

Dans un Mémoire, inséré au tome II des *Mathematische Annalen* (²), M. Klein avait donné plusieurs propriétés importantes de la surface de Kummer. Dans le travail dont nous rendons compte, se trouve énoncé et démontré un résultat nouveau et très-important relatif à cette surface; ce résultat consiste dans l'intégration géométrique des lignes asymptotiques de la surface. Ce sont des lignes de la seizième classe et du seizième ordre dont toutes les singularités sont déterminées avec la plus grande élégance; ainsi elles ont 96 tangentes stationnaires, 16 points de rebroussement, 16 plans stationnaires, etc.

La surface de M. Kummer comprend, comme cas particulier, un très-grand nombre de surfaces remarquables, le *tétraédroïde* de M. Cayley, et par conséquent la surface des ondes de Fresnel, les surfaces du

---

(¹) KUMMER, *Ueber die algebraischen Strahlensysteme, ins besondere, über die der ersten und zweiten Ordnung.* (*Mathematische Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, année 1866.)

(²) KLEIN, *Zur Theorie der Complexen des ersten und zweiten Grades.* (*Math. Ann.* II. 2.)

quatrième ordre ayant une ligne double appelées *surfaces complexes* par Plücker, etc., etc. On voit donc combien est important le résultat trouvé par les jeunes géomètres de Gœttingue et de Christiania.

A la fin de la Note se trouve exposée une seconde méthode d'intégration indépendante de la théorie des complexes. Les auteurs, par une méthode de transformation qui fait correspondre aux points d'une droite toutes les génératrices rectilignes d'une sphère, obtiennent ce théorème important : Toutes les fois que l'on connaîtra les lignes de courbure d'une surface, on pourra obtenir les lignes asymptotiques d'une autre surface.

Dans cette méthode, à une surface de Kummer correspond une surface du quatrième ordre ayant le cercle de l'infini pour ligne double ; comme on connaît les lignes de courbure de cette dernière surface, on peut déterminer les lignes asymptotiques de la première.

Depuis, MM. Klein et Lie ont étendu les résultats précédents, et nous signalerons comme très-intéressantes deux Notes de M. Klein :

Sur un théorème de la théorie des complexes qui est analogue au théorème de M. Dupin sur les systèmes de surfaces orthogonales (1) ;

Sur la théorie de la surface de Kummer et sur les complexes du second degré (2) ;

Une Note de M. Lie (3) : *Sur la théorie des lignes de courbure étendue à un espace d'un nombre quelconque de dimensions.*

Dans ce travail M. Lie veut bien rappeler que nous avons publié sur ce sujet une Note (4) où nous considérons aussi un espace à n dimensions et où nous indiquons l'existence d'une série de surfaces algébriques, en nombre infini, dont on peut déterminer les lignes de courbure.

Enfin nous rappellerons la première Note publiée sur cet important sujet par M. Lie, qui a été imprimée dans les *Comptes rendus* (séance du 31 octobre 1870) (5).

G. D.

(1) *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G.-A. Universität zu Göttingen* ; n° 3, 8 mars 1871.

(2) Même Recueil, n° 3, même annee.

(3) Même Recueil, n° 7, 17 mai. Nous rendrons compte d'une manière plus détaillée de ces différents travaux en parlant des Memoires contenus dans les *Nachrichten*.

(4) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, août 1869.

(5) Voir *Bulletin*, t. I, p. 335 et 382.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, Journal des candidats aux Écoles Polytechnique et Normale, rédigé par MM. GERONO, professeur de Mathématiques, et J. BOURGET, ancien élève de l'École Normale, agrégé de l'Université, Dr ès sciences. 2e série, t. IX; 1870. Paris, Gauthier-Villars (1).

LAGUERRE. — *Sur une formule relative aux courbes tracées sur les surfaces du second ordre.* (8 p.)

Démonstration d'une propriété complexe qui comprend comme cas particulier les théorèmes suivants :

Le long d'une même ligne géodésique, tracée sur une surface du second ordre, le rayon de courbure de la courbe est proportionnel au cube de la normale (Joachimsthal);

Le long d'une même ligne de courbure, le rayon de courbure de la section normale tangente à la courbe varie proportionnellement au cube de la normale.

RÉALIS (S.). — *Démonstration d'une formule de trigonométrie.* (8 p.)

NIEWENGLOWSKI (B.). — *Étude de la sphère.* (3 p.)

Transformation des courbes sphériques équivalente à plusieurs transformations successives par rayons vecteurs réciproques.

ALLÉGRET. — *Note sur la propriété dont jouit le cercle osculateur en un point quelconque d'une certaine famille de courbes.* (2 p.)

Les courbes étudiées ont pour équation

$$r^m = a^m \cos m\theta.$$

BELLAVITIS (G.). — *Application du calcul des équipollences à la solution de deux problèmes.* (2 p.)

---

(1) Publication fondée en 1842 par MM. Gerono et Terquem, continuée à partir de 1863 par MM. Gerono et Prouhet. Paraît tous les mois par cahiers in-8° de 3 feuilles. La première série se compose de 20 volumes et se termine en 1861; la deuxième comprend 9 volumes. Prix, par an : 15 fr.

BRISSE (Ch.). — *Démonstration d'un théorème relatif aux séries* (2 p.).

Il s'agit d'un théorème de Gauss relatif au cas douteux dans lequel

$$\lim. \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

JOUANNE. — *Trisection de l'angle au moyen du limaçon de Pascal.* (1 p.)

LUCAS (Éd.). — *Note sur les sommes des puissances semblables des n premiers nombres entiers.* (4 p.)

Note intéressante par la nature des procédés de démonstration.

NEUBERG. — *Triangles et coniques combinés.* (12 p.)

FRANCOISE (Ém.). — *Application du calcul des équipollences à la résolution d'un problème de Géométrie élémentaire.* (8 p.)

Construire un polygone connaissant les sommets des triangles semblables à un triangle donné construits sur ses côtés.

SERRET (Paul). — *Sur un théorème de Ferrers.* (10 p.)

Enveloppe de la pédale d'un point du cercle circonscrit à un triangle.

Surface enveloppe du plan tangent au sommet des paraboloïdes inscrits à l'hexaèdre.

HOÜEL (J.). — *Note sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe des parallèles.* (3 p.)

PAINVIN. — *Note sur la transformation homographique.* (10 p.)

L'auteur démontre que deux figures de l'espace homographiques ne peuvent pas en général être amenées à être homologiques.

Pour que cette transformation réussisse, il faut et il suffit que la courbe, qui dans l'une d'elles correspond au cercle imaginaire de l'infini appartenant à l'autre, soit également un cercle.

Cette condition étant remplie, il y a deux manières, et deux seulement, d'amener les deux figures à être homologiques.

ANONYME. — *Note relative à quelques cas de convergence ou de divergence des séries.* (5 p.)

L'auteur examine le cas douteux dans lequel

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

Il donne une démonstration simple de la règle connue par laquelle on voit si la série est convergente ou divergente.

Il déduit ensuite de sa démonstration la règle de Gauss.

Campoux (P. de). — *Des invariants au point de vue des Mathématiques spéciales (suite et fin).* (10 p.)

L'auteur s'occupe de l'équation du second degré à trois variables, ramenée à la forme

$$Sx^2 + S'y^2 + S''z^2 + F = 0.$$

Il démontre que cette équation a trois invariants, et seulement trois,

$$P = -(S + S' + S''), \quad Q = S'S'' + S''S + SS', \quad R = -SS'S''.$$

Il en donne l'interprétation géométrique.

Welsch (J.). — *Démonstration élémentaire d'un théorème de Monge.* (1 p.)

Il s'agit de ce théorème : La sphère est la seule surface dont tous les points sont des ombilics.

Béziat (L.). — *Solutions de quelques problèmes célèbres par la méthode des équipollences du professeur Giusto Bellavitis.* (12 p.)

Les problèmes résolus sont les suivants :

Inscrire dans un cercle un polygone dont les côtés passent par des points donnés ou aient des longueurs données;

Circonscrire à un cercle un polygone dont les sommets soient situés sur des droites données ou aient des angles de grandeurs données;

Étant donnés trois points, trouver la base commune des triangles dont les sommets sont ces trois points, dont les différences des angles au sommet sont données et dont les rapports des quotients des côtés sont aussi donnés;

On donne un cercle et deux points : inscrire dans le cercle un triangle isoscèle, dont les deux côtés égaux passent par les deux points donnés.

Laguerre. — *Sur l'emploi des imaginaires en Géométrie.* (12 p.)

Reproduction de la première leçon d'un cours fort intéressant professé à la salle Gerson.

LAGUERRE. — *Sur la règle des signes en Géométrie.* (5 p.)

L'auteur arrive à cette conclusion :

Lorsqu'un théorème relatif à des segments et à des angles, situés d'une façon quelconque dans un plan, est convenablement et complétement énoncé, il doit toujours comporter la règle des signes.

HERMANN. — *Méthode de l'élimination des intervalles pour servir à la résolution des équations algébriques ou transcendantes.* (8 p.)

Perfectionnement de la méthode de Cauchy pour le calcul par approximations successives des racines d'une équation.

TRANSON (A.). — *Lois des coniques surosculatrices dans les surfaces* (6 p.)

Une conique osculatrice a généralement cinq points infiniment voisins, communs avec la surface; on nomme *conique osculatrice* celle qui a plus de cinq points communs. L'auteur démontre que, dans l'ensemble des sections planes contenant une même droite normale ou oblique, mais non tangente à la surface, il y a toujours neuf de ces sections qui admettent des coniques surosculatrices (ellipses ou hyperboles), et que, dans l'ensemble des sections menées par une même tangente, il y en a toujours trois qui jouissent de cette propriété.

CATALAN (E.). — *Sur quelques développements en séries.* (3 p.)

L'auteur somme quelques séries curieuses au moyen du théorème suivant, si l'on a

$$f(x) = af(bx) + \alpha\varphi(x),$$

on en déduit

$$f(x) = \lambda + \alpha \lim.[\varphi(x) + a\varphi(bx) + \ldots + a^{n-1}\varphi(b^{n-1}x)],$$

où

$$\lambda = \lim_{n=\infty}.\,[a^n f(b^n x)],$$

et où a, b, α sont des constantes données.

PAINVIN (L.). — *Note sur l'hypocycloïde à trois rebroussements.* (25 p.)

M. Painvin démontre, par l'analyse, les propriétés diverses de cette courbe dont Cremona a fait antérieurement une étude géométrique dans le *Journal de Crelle*, t. XLIV.

LINDELÖF (L.). — *Problème de Géométrie.* (5 p.)

Dans un triangle, plan ou sphérique, donné, inscrire un autre triangle de périmètre minimum.

Laisant (A.) et Beaujeux (É.). — *Mémoire sur certaines propriétés des résidus numériques.* (25 p.)

Cette étude renferme des résultats intéressants sur les caractères de divisibilité et sur les fractions périodiques.

Laguerre. — *Sur l'emploi des imaginaires en Géométrie.* (13 p.)

Cet article est la suite de celui que nous avons signalé ci-dessus. M. Laguerre indique une nouvelle méthode de représentation par deux points réels d'un point imaginaire, et il fait quelques applications de son système.

Cayley. — *Sur la construction de la courbe d'ombre ou de pénombre pendant la durée d'une éclipse de Soleil.* (3 p.).

Cet article est suivi d'une Note de M. Laguerre, indiquant que le théorème de Casey, sur lequel Cayley appuie la solution du problème précédent, avait été énoncé, en 1862, par M. Moutard.

Alexandre (R). — *Méthode et formule pour la résolution des équations du troisième degré.* (6 p.)

Simplification de la méthode de Tschirnhaus.

Lucas (Éd.). — *Note sur les coefficients du binôme de Newton.* (3 p.)

Somme des coefficients pris de trois en trois dans le cas où la puissance a l'une des formes $6n$, $6n+3$, $6n+1$, $6n+4$, $6n+5$.

Lemoine (E.). — *Note sur l'expression de la distance entre quelques points remarquables d'un triangle.* (5 p.)

Neuberg (J.). — *Théorie des indices des points, des droites et des plans par rapport à une surface du second ordre.* (33 p.)

Ce travail, remarquable par l'élégance des calculs, renferme des résultats importants et la démonstration de plusieurs théorèmes énoncés pour la première fois par le capitaine Faure.

Leclert (Ém.). — *Propriétés de la parabole.* (3 p.)

Carnoy. — *Note sur le triangle circonscrit à une conique.* (2 p.)

Laguerre. — *Sur l'équation du troisième degré.* (6 p.)

Painvin. — *Note sur la construction géométrique des normales à une conique.* (6 p.)

Lemoine (L.). — *Note sur une question d'Arithmétique.* (3 p.)

Toute puissance entière μ d'un nombre entier l peut être obtenue en prenant la somme de l^k termes consécutifs des nombres impairs μ, k, l étant entiers et positifs et $\mu \geqq 2k$.

Gilbert (Ph.). — *Sur les courbes planes à équations trinômes.* (2 p.)

Hoüel (J.). — *Article bibliographique sur le* Compendium der höheren Analysis *de M. Schlömilch.* (7 p.).

Cet article renferme des considérations fort justes sur les principes fondamentaux de la méthode infinitésimale.

Gerono. — *Note sur une application de la méthode des déterminants.* (7 p.)

Démonstration élégante des conséquences connues que l'on tire des six équations liant entre eux les neuf cosinus a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' des angles que trois axes rectangulaires font avec trois autres axes rectangulaires.

Durrande (H.). — *Note sur les surfaces du quatrième ordre.* (14 p.)

Les surfaces étudiées par l'auteur sont considérées comme lieux des intersections successives des surfaces correspondantes de deux faisceaux de surfaces du second degré, liées par une relation homographique.

Ruchonnet (Ch.). — *Expression de la distance d'une courbe à la sphère osculatrice.* (14 p.)

En nommant :

ε l'angle de contingence,

η l'angle de torsion,

ds l'élément de l'arc de la courbe,

dS l'élément de l'arête de rebroussement,

R le rayon de la sphère osculatrice,

l'auteur trouve

$$\delta = \frac{\varepsilon\eta\, ds\, dS}{24 R}.$$

Saltel (L.). — *Sur la détermination des foyers d'une section plane dans une surface du second ordre.* (6 p.)

Gerono. — *Note sur la résolution, en nombres entiers et positifs, de l'équation*

$$x^m = y^n + 1.$$

(2 p.).

Moutier (J.). — *Sur la fonction potentielle et le potentiel.* (22 p.)

Étude géométrique élémentaire avec applications, destinée aux élèves de Mathématiques spéciales.

Joachimsthal. — *Sur le nombre des normales réelles que l'on peut mener d'un point à un ellipsoïde.* (9 p.)

Cette étude, qui jouit d'une juste célébrité, est un excellent exercice sur la théorie générale des équations algébriques.

Bourget (J.). — *Note sur la théorie des racines carrées et cubiques.* (8 p.)

Dans cette Note l'auteur montre comment on peut généraliser le procédé habituellement suivi, en partageant la racine en deux parties quelconques, mille et unités, centaines et unités, dizaines et unités, etc.. Il tire, comme corollaire, les méthodes abrégées que l'on donne pour l'extraction de la racine carrée et de la racine cubique.

Lemonnier (H.). — *Étude analytique sur la cyclide.* (14 p.)

Le Besgue (V.-A.). — *Sur l'équation du troisième degré.* (2 p.)

Lemonnier (H.). — *Équation de Hesse pour la détermination des points d'inflexion.* (2 p.)

Lemonnier (H.). — *Solution d'une question géométrique.* (5 p.)

Un cône du second degré étant donné par son sommet et une section plane, en construire les axes au moyen de coniques.

Bourget (J.). — *Note sur les séries de Taylor et de Maclaurin.* (3 p.)

$\varpi(x)$ désignant une fonction arbitraire assujettie à la seule condition de $\varpi(0) = 0$, la formule de Maclaurin se met sous la forme

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{n-1}(0) + R,$$

$$R = \frac{\varpi(x)}{\varpi'[(1-\theta)x]}\,\frac{x^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}\,\varphi^n(\theta x).$$

Cette forme, du reste, comprend toutes les formes connues et pourrait en donner d'autres.

Bourget (J.). — *Note sur la racine carrée de nombres approchés.* (5 p.)

Dostor (Georges). — *Propriété des bissectrices des angles d'un triangle, avec application aux tangentes et normales de l'ellipse et de l'hyperbole.* (4 p.)

Lemonnier (H.). — *Problèmes de Géométrie analytique.* (4 p.)

ATTI dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei (¹).
T. XXI, 1868.

Respighi (L.). — *Sur la latitude de l'Observatoire romain, au Capitole.* (44 p.)

Par une discussion approfondie de ses observations, l'auteur arrive à une valeur moyenne générale de 41°53′33″,72, qui ne s'écarte que de quelques dixièmes de seconde des moyennes partielles, ainsi que des déterminations obtenues par Calandrelli et par le P. Secchi.

Secchi (A.). — *Sur les spectres prismatiques des étoiles fixes.* (3 p.)

Ces spectres se réduisent à trois types correspondant à trois classes d'étoiles : 1° étoiles blanches (Sirius, Wéga, Altaïr, etc.); 2° étoiles jaunes (le Soleil, la Chèvre, etc.); 3° étoiles fortement colorées (α d'Orion, Aldébaran, etc.).

Respighi (L.). — *Sur la vitesse de la lumière, déduite des éclipses des satellites de Jupiter et de l'aberration des étoiles.* (17 p.)

Discussion des théories proposées par Klinkerfues et par Hoek pour expliquer la différence des résultats obtenus par l'observation des éclipses des satellites de Jupiter et par l'aberration.

Respighi (L.). — *Sur le cratère lunaire de* Linné. (4 p.)

L'auteur n'admet pas comme prouvés les changements signalés par plusieurs astronomes dans la forme de ce cratère.

Secchi (A.). — *Seconde série de mesures micrométriques faites à l'équatorial de Merz, au Collége romain, de 1863 à 1866 inclusivement. Étoiles doubles et nébuleuses.* (15 p.)

(¹) Voir *Bulletin*, t. II, p. 19.

SPINA (C.). — *Sur le nombre des valeurs des fonctions algébriques rationnelles qui contiennent un nombre donné de lettres; et comment on peut former les fonctions algébriques rationnelles, pour lesquelles il existe un nombre donné de valeurs, quand on permute les lettres entre elles.* (57 p.)

Les méthodes employées par les géomètres qui ont travaillé jusqu'ici sur ce sujet manquaient de la généralité nécessaire pour embrasser le problème dans toute son étendue. L'auteur a eu l'idée de voir si, en reprenant la question au point où l'avait laissée Lagrange (*Mém. de l'Ac. de Berlin,* 1770 et 1771. — *Œuvres,* t. III, p. 205-421), il ne serait pas possible d'obtenir par une voie plus directe des conclusions plus générales et plus fécondes. Il ne s'est occupé, dans ce travail, que des fonctions algébriques rationnelles, réservant pour un second Mémoire l'application de sa méthode aux fonctions algébriques irrationnelles.

En partant de la théorie générale des combinaisons, il en déduit le nombre des valeurs d'une fonction algébrique rationnelle; il développe, d'après Poinsot, la théorie des périodes cycliques, en la rattachant à celle des polygones. Passant ensuite de la solution directe de la question à la solution inverse, c'est-à-dire à la recherche de la fonction de m lettres données qui admet un nombre donné N de valeurs, il démontre d'une manière tout à fait élémentaire le théorème de Bertrand, que si la fonction a moins de m valeurs, elle n'en a pas plus de 2, et la nouvelle démonstration ne repose sur aucun *postulatum*.

RESPIGHI (L.). — *Sur la scintillation des étoiles.* (17 p.)

ANNALEN DER PHYSIK UND CHEMIE, HERAUSGEGEBEN VON J.-C. POGGENDORFF. Bd. CXL, 1870. — Leipzig, Ambr. Barth [1].

KETTELER (Ed.). — *Sur les constantes qui entrent dans les formules de dispersion.*

En traitant d'une manière très-générale le mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, Cauchy est parvenu à établir une relation entre

(1) *Annales de Physique et de Chimie,* publiées par M. Poggendorff, 1870.

l'indice de réfraction n et la longueur d'onde l d'un rayon lumineux qui traverse un milieu isotrope. Cette relation est contenue dans la formule

$$\frac{1}{n^2} = A + \frac{B}{l^2} + \frac{C}{l^4} + \frac{D}{l^6} + \ldots.$$

En désignant par λ la longueur d'ondulation dans le vide, on a $\lambda = nl$, et, en remplaçant l par sa valeur,

$$\frac{1}{n^2} = A + B\frac{n^2}{\lambda^2} + C\frac{n^4}{\lambda^4} + \ldots.$$

Pour obtenir n en fonction de λ, Cauchy renverse la série et arrive à la formule bien connue

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4} + \ldots.$$

Toutefois, ce renversement n'est justifié que par une hypothèse sur la décroissance rapide des coefficients A, B, C,.... M. Christoffel (¹) s'est efforcé de combler la lacune que présentait le raisonnement de Cauchy; il a montré que, dans la plupart des cas, on peut attribuer aux deux coefficients A, B des valeurs finies du même ordre, et négliger tous les suivants. En outre, il établit que A est une quantité toujours positive, et B toujours négative, ce qui permet d'exprimer n en fonction de λ à l'aide de l'équation

$$\left(\frac{n_0}{n}\right)^4 - 2\left(\frac{n_0}{n}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2 = 0,$$

où n_0, λ_0 sont deux constantes qui caractérisent le milieu réfringent. On tire de là

$$\frac{n_0}{n}\sqrt{2} = \sqrt{1+\frac{\lambda_0}{\lambda}} + \sqrt{1-\frac{\lambda_0}{\lambda}}.$$

M. Briot a repris la question dans ses *Essais sur la théorie mathématique de la lumière* (1864); il adopte en définitive une formule qui coïncide avec celle de Christoffel. M. Redtenbacher (²) a proposé, de son côté, la formule suivante :

$$\frac{1}{n^2} = a + \frac{b}{\lambda^2} + c\lambda^2.$$

(¹) *Monatsberichte der Berl. Akad.*, octobre 1861.
(²) *Dynamiden System*. Mannheim, 1857.

Mise à l'épreuve par Verdet et par M. Mascart, qui l'ont comparée aux observations, elle n'a donné que des résultats peu satisfaisants, tandis que la formule de Christoffel représente assez bien les indices observés, lorsqu'on a déterminé convenablement les constantes n_0, λ_0.

M. Ketteler s'est donné pour tâche de vérifier à fond la formule primitive de Cauchy, en conservant d'abord deux, puis successivement trois, quatre et cinq termes de la série ordonnée suivant les puissances négatives de la longueur d'ondulation l, et en introduisant finalement des termes en l^2 et l^4. Les valeurs des longueurs d'onde λ qu'il emploie sont, pour la partie visible du spectre, les moyennes des déterminations d'Ångström, Van der Willigen, Ditscheiner et Mascart; pour le spectre ultra-violet, il adopte les résultats des mesures de M. Mascart (*Annales de l'École Normale supérieure*, t. I). Les déterminations d'indices de réfraction que M. Ketteler choisit pour les faire servir de pierre de touche à la théorie sont les suivantes : indices du spath d'Islande et d'un flint de Rossette, mesurés par M. Mascart pour les principales raies, depuis le rouge jusqu'à l'extrémité ultra-violette du spectre; indices de l'eau et d'un flint de Merz à forte dispersion, mesurés par M. Van der Willigen (les indices du flint sont donnés pour 52 raies de Fraunhofer dans la partie visible du spectre).

La formule de Christoffel peut s'écrire comme il suit :

$$\frac{1}{n^2} = A - \frac{B}{l^2} = A - B\frac{n^2}{\lambda^2}.$$

Pour l'appliquer au calcul des indices du rayon ordinaire du spath, M. Ketteler détermine les constantes A, B par les raies B et O; M. Mascart avait fait usage des raies D et N, M. Christoffel avait fait concourir au même but toutes les observations à la fois. Les résultats diffèrent peu :

	K.	M.	Ch.
A =	0,371875,	0,371944,	0,371956;
B =	0,0010518,	0,0010552,	0,0010551.

Les valeurs de n, calculées au moyen de ces constantes, s'accordent assez bien avec les valeurs observées à partir de la raie D (les écarts dépassent rarement l'unité de la quatrième décimale); mais, pour les raies A, B, C, l'accord est beaucoup moins satisfaisant, les écarts atteignent ici 2, 3, 4 et 5 unités de la quatrième décimale. Avec la

formule de Redtenbacher, des écarts de cet ordre se présentent partout, quoiqu'elle renferme une constante de plus que celle de Christoffel. La formule de Redtenbacher est donc à rejeter; quant à celle de Christoffel, M. Ketteler la juge au moins insuffisante, l'incertitude des indices observés n'étant, selon lui, que de 2 ou 3 unités de la *cinquième* décimale (c'est trop présumer, croyons-nous, de la perfection actuelle des moyens d'observation).

Il introduit donc, à titre d'essai, d'abord une troisième constante C, puis une quatrième D et une cinquième E. Il se trouve que les termes de la série sont alternativement positifs et négatifs

$$\frac{1}{n^2} = A - \frac{B}{l^2} + \frac{C}{l^4} - \frac{D}{l^6} + \frac{E}{l^8}.$$

En augmentant ainsi pas à pas le nombre de ses constantes, M. Ketteler obtient nécessairement, pour les indices calculés, des valeurs qui se rapprochent de plus en plus des valeurs observées; mais l'accord s'améliore très-lentement, et cinq termes ne suffisent pas encore pour rejeter tous les écarts sur la cinquième décimale. Les valeurs des coefficients B, C, D grandissent à mesure que la série s'allonge, et la convergence diminue plutôt qu'elle n'augmente. Voici les valeurs des coefficients pour chaque phase du calcul [1] :

A	B	C	D	E
0,371944,	0,10552,			
0,372192,	0,10917,	0,0108,		
0,372516,	0,11609,	0,0542,	0,0825,	
0,372833,	0,12672,	0,1732,	0,6081,	0,794.

L'auteur ne donne que les logarithmes des constantes B, C, D,..., et il ne paraît pas être bien au courant de la manière usuelle de les écrire; il donne le signe — au logarithme d'un *nombre négatif* et écrit, par exemple,

$$\log D = -0,9168761 - 8, \quad \text{au lieu de} \quad \bar{8},9168761.$$

(1) Pour éviter les zéros, nous supposerons les longueurs d'onde exprimées en dix-millièmes de millimètre : $\lambda = 7,6013$, pour la raie A, etc.; M. Ketteler les donne en millièmes de millimètre.

Dans tout son travail, il transcrit, avec *sept* décimales, les logarithmes des constantes pour lesquelles deux ou trois décimales suffiraient amplement.

Le calcul de l'indice de la raie Q par la série poussée à quatre et à cinq termes donne respectivement

$$\frac{1}{n^2} = 0,37252 - 0,03130 + 0,00394 - 0,00162,$$

$$\frac{1}{n^2} = 0,37283 - 0,03417 + 0,01260 - 0,01192 + 0,00420.$$

Il saute aux yeux que toute cette queue de termes nouveaux dont on peut allonger la formule de Christoffel ne procure pas un avantage qui compense la longueur du calcul.

M. Ketteler se décide alors à remplacer le cinquième terme $\frac{E}{l^8}$ par un terme en l^2; puis, voyant que la convergence devient meilleure, il supprime encore le terme $\frac{D}{l^6}$, et s'arrête à la formule suivante :

$$\frac{1}{n^2} = Kl^2 + A - \frac{B}{l^2} - \frac{C}{l^4}.$$

En prenant

$$K = 0,00003293, \quad A = 0,371412, \quad B = 0,10373, \quad C = 0,00034,$$

on a, par exemple, pour la raie Q,

$$\frac{1}{n^2} = 0,00012 + 0,37141 - 0,02797 - 0,00003.$$

Cette formule donne un résultat à peu près satisfaisant. L'adjonction d'un nouveau terme Ll^4 ne l'améliore en rien; M. Ketteler est donc d'avis qu'elle possède toutes les qualités d'une bonne formule d'interpolation, et qu'on peut s'y arrêter définitivement. Le coefficient C, qui est presque sans influence dans le cas du spath, prend des valeurs plus sensibles pour d'autres substances.

M. Mascart était arrivé, de son côté, à une formule empirique renfermant une puissance positive de la longueur d'onde

$$n = k\lambda^2 + a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4}.$$

M. Ketteler préfère, pour des raisons théoriques, réunir en un

seul les deux derniers termes de sa formule, en l'écrivant comme il suit :

$$\frac{1}{n^2} = Kl^2 + A - \frac{B}{l^2 - c}.$$

Pour le spath, il trouve finalement

$$K = 0,00004910, \quad A = 0,370994, \quad B = 0,10074, \quad c = 0,0641;$$

les écarts entre les indices calculés et les indices observés ne dépassent plus cinq unités de la cinquième décimale.

Des calculs analogues, exécutés sur les indices de réfraction d'un flint lourd de Rossette, paraissent confirmer la formule à laquelle M. Ketteler donne la préférence; les constantes sont ici

$$K = 0,00004214, \quad A = 0,391381, \quad B = 0,1349, \quad c = 0,4738.$$

Les indices de l'eau, mesurés par M. Van der Willigen, conduisent à un résultat analogue; les constantes sont

$$K = 0,00008030, \quad A = 0,567118, \quad B = 0,11334, \quad c = 0,4969.$$

Le même observateur avait déterminé les indices d'un flint de Merz, pour 52 raies du spectre visible. Ces mesures sont très-mal représentées par la formule de Christoffel et par la seconde série de Cauchy, qui donne n en fonction de λ; la formule de M. Ketteler les représente à 2 ou 3 unités près de la cinquième décimale. Une application assez bizarre de la méthode des moindres carrés le conduit finalement à rejeter tout à fait les séries de Cauchy et à justifier l'introduction du terme Ll^2. La formule empirique par laquelle les observations sont le mieux représentées peut donc s'écrire, en réunissant le terme Kl^2 au terme constant A,

$$\frac{1}{n^2} = \frac{A}{1 - kl^2} - \frac{B}{l^2 - c}.$$

M. Ketteler s'efforce ensuite de trouver à ses constantes une interprétation analogue à celle des constantes de la formule de Christoffel; enfin, s'appuyant sur les théories de M. Briot, il démontre que le terme Kl^2 provient de l'influence directe que les molécules pondérables exercent sur l'éther en mouvement, tandis que les termes $\frac{B}{l^2}$,

$\frac{C}{l^4}$,... sont dus aux changements de densité du fluide éthéré dans le voisinage des molécules pondérables. Ces deux influences seraient plus ou moins sensibles, suivant la nature particulière à chaque milieu réfringent.

En résumé, ces recherches prouvent que la théorie de la dispersion est encore loin de fournir l'explication complète des phénomènes élémentaires que l'observation permet de constater.

R. R.

MÉLANGES.

SUR LA PARALLAXE DU SOLEIL DÉDUITE DES OBSERVATIONS MÉRIDIENNES DE MARS EN 1862;

PAR M. CH. ANDRÉ.

Au moment où, par suite du prochain passage de Vénus, l'attention des astronomes se trouve forcément reportée sur la discussion des différentes valeurs de la parallaxe du Soleil, il nous a paru opportun de rappeler un Mémoire remarquable publié dans les *Washington astronomical Observations for* 1865, et trop peu connu en France.

L'une des meilleures méthodes de détermination de la parallaxe du Soleil consiste dans la mesure de la parallaxe de Mars, mesure que l'on effectue en comparant, au moment de l'opposition et dans deux stations de latitudes fort différentes, les déclinaisons de Mars avec celles d'étoiles voisines. Cette méthode, proposée d'abord par M. Le Verrier, puis par M. Winnecke, a été mise en pratique, en 1862, d'après le plan suivant.

Dans un grand nombre d'Observatoires de l'un et de l'autre hémisphère, on a observé simultanément, au cercle méridien, la planète Mars, au moment de son opposition, et un certain nombre d'étoiles choisies préalablement.

En comparant chaque couple d'observations *correspondantes,* faites dans chacun des deux hémisphères, on aurait une valeur de la parallaxe de Mars et, par suite, de celle du Soleil; mais, en procédant

ainsi, on perd un grand nombre d'observations qui, faites à l'une des deux stations, n'ont pas leurs correspondantes dans l'autre. Or il est un moyen de les faire concourir toutes à la détermination de la parallaxe, et, par suite, d'accroître, pour ainsi dire indéfiniment, l'exactitude du résultat.

1. Les perturbations du mouvement de la Terre et de Mars étant parfaitement connues pour l'époque des observations, chaque observation de la planète conduira, en réalité, à une équation de condition entre la parallaxe, les six éléments de l'orbite de la Terre et ceux de Mars. Treize observations, comparées à la théorie, suffiraient alors en toute rigueur pour corriger les éléments de celle-ci. Mais, si les observations ne comprennent qu'un court intervalle de temps, un mois par exemple, les coefficients de correction seront si faibles que l'on ne pourra accorder aucune confiance aux valeurs qui en seront déduites. En fait, nous dirons que nos équations suffisent seulement à déterminer un petit nombre de fonctions des éléments, et que, si le choix des valeurs de ces éléments n'a été déterminé que par les conditions de satisfaire aux fonctions précédentes, elles pourront varier beaucoup sans cesser de satisfaire à nos équations de condition.

L'une de ces fonctions est certainement l'erreur de la déclinaison de Mars ou, si l'on veut, l'erreur dz de la coordonnée rectiligne z, qui représente la distance absolue de la planète au plan de l'équateur terrestre. Cette erreur peut être développée en série suivant les puissances du temps, et les coefficients de ce développement remplacent les éléments eux-mêmes.

Nous avons donc

$$dz = \alpha - \beta t + \gamma t^2 + \ldots;$$

comme on a

$$z = \Delta \sin \delta,$$

Δ étant la distance de la planète à la Terre et δ sa déclinaison, il vient

$$dz = \Delta \cos \delta . d\delta,$$

et, par suite, on a, pour l'erreur tabulaire de la déclinaison,

$$d\delta = \frac{\text{séc}\,\delta}{\Delta}(\alpha + \beta t + \gamma t^2 + \ldots).$$

Si l'on étudie la table des *erreurs tabulaires* données par Winnecke

dans ses *Beobachtungen des Mars um die Zeit der Opposition,* 1862, on reconnaît non-seulement qu'une telle supposition est possible, mais, en outre, que le coefficient de t^2 ne surpasse jamais 0″,0004; pour une période de dix jours, on pourra donc négliger ce terme sans s'exposer à commettre aucune erreur sensible.

D'autre part, l'expression de l'erreur tabulaire de déclinaison doit évidemment comprendre un terme constant provenant de toutes les erreurs constantes commises dans la mesure des déclinaisons; soit D_0 ce terme, $\delta\varpi$ la correction de la parallaxe et posons, en outre,

$$\Delta' = \Delta \cos\delta;$$

chaque comparaison d'une déclinaison observée et de la déclinaison calculée qui lui correspond, donnera une équation de la forme

$$d\delta = f\,\delta\varpi + D_0 + \frac{\alpha}{\Delta'} + \frac{\beta t}{\Delta'},$$

α et β, D_0 et $\delta\varpi$ étant des quantités inconnues à déterminer.

Tel est le principe de la méthode employée; nous devons faire connaître, maintenant, les observations qui ont servi de base au travail que nous analysons.

2. Les observations comprises dans la discussion actuelle sont les suivantes :

HÉMISPHÈRE NORD.

POULKOVA. — *Beobachtungen des Mars von Dr. A. Winnecke;* 31 observations.

HELSINGFORS. — *Beobachtungen des Mars und der Winnecker'schen Vergleichsterne;* 18 observations.

LEIDEN. — *Astronomische Nachrichten,* t. LXII; 29 observations.

GREENWICH. — *Greenwich Observations, of* 1862; 40 observations.

ALBANY. — *Washington Observations, of* 1863; 26 observations.

WASHINGTON. — *Washington Observations, of* 1862; 36 observations.

HÉMISPHÈRE SUD.

WILLIAMSTOWN. — 51 observations, par M. Robert Saint-Elbry.

CAP DE BONNE-ESPÉRANCE. — 43 observations, par M. Thomas Maclear.

SANTIAGO. — *Observaciones meridianas y micrometricas relativas al planeta Marte al tiempo de su oposicion, en 1862. Verificandas en el Observatorio Nacional de Santiago de Chili*, 49 observations.

Pour l'hémisphère nord............	154
Pour l'hémisphère sud..............	143
Total..............	297

3. Quant à la discussion de ces observations, elle a été faite comme il suit : le point essentiel est de les rendre rigoureusement comparables entre elles; on y arrive en les déduisant toutes séparément d'une position des étoiles de comparaison. Dans le plan de Winnecke, chaque observation de Mars est comparée aux observations analogues de huit étoiles de comparaison. Une éphéméride des positions de ces étoiles étant préparée, la comparaison de la distance polaire observée d'une étoile, avec celle que donne l'éphéméride, donne une correction apparente de cette observation. La moyenne des huit corrections, ainsi obtenues dans une nuit de travail, par un même observateur, est considérée comme la correction qu'il faut appliquer à la distance polaire de Mars observée le même soir.

Si chaque observateur observait chaque nuit les huit étoiles de comparaison, la position moyenne adoptée pour chaque étoile serait entièrement indifférente; mais, fréquemment, on ne peut observer qu'une partie des étoiles de comparaison, il est donc nécessaire de diriger le calcul de réduction de telle sorte que la position moyenne obtenue pour chaque étoile soit indépendante du lieu particulier où elle a été observée. Le peu d'observations dont on dispose empêchant de les corriger toutes des erreurs particulières à chaque instrument et à chaque observatoire, on a déduit les positions adoptées des observations faites à Greenwich, Poulkova, Albany et Washington, en ayant soin de les rendre comparables entre elles au moyen des corrections données par Auwers, pour chacun de ces observatoires, dans son Mémoire *sur les corrections nécessaires pour réduire les différents catalogues à un catalogue fondamental.*

Quant aux distances polaires de Mars, elles ont été calculées d'après les tables de M. Le Verrier, en adoptant 8",9 pour parallaxe du Soleil.

Pour former les équations de condition, les observations ont été divisées en cinq séries de vingt à vingt-cinq jours de durée; les deux

premières comprennent les observations faites avec le groupe d'étoiles choisi par Winnecke; de plus, par une discussion attentive des observations, on a trouvé que, pour les ramener à la même erreur probable, on devait les multiplier par un facteur convenable, que j'appellerai la mesure de précision.

Ceci posé, soient

α l'erreur de la distance polaire nord au milieu de la série;

β la variation de α en dix jours, quantité supposée constante pendant la série;

π' le quotient par 0,89 de la correction de la parallaxe moyenne horizontale, équatoriale du Soleil;

la forme générale des équations de condition sera

$$0 = K\left(\alpha + \beta\frac{t}{10} + \frac{0,89 \sin z'}{\Delta}\pi' + d\mathfrak{P}\right),$$

où l'on a représenté par

K la mesure de la précision;

t l'époque exprimée en jours du milieu de chaque série;

z' la distance zénithale géocentrique apparente, comptée vers le sud;

Δ la distance de la planète à la Terre;

$d\mathfrak{P}$ la différence entre la distance polaire géocentrique nord calculée et la même quantité donnée par l'observation.

En appliquant cette équation générale à chacune des 297 observations dont on dispose, on forme cinq séries d'équations numériques, où les coefficients de l'inconnue principale π' sont de signes contraires pour chacun des deux hémisphères. On traite séparément chacune de ces séries par la méthode des moindres carrés, et l'on obtient, comme équations normales de chaque série,

$$1^{\circ}\quad \begin{cases} 0 = +311,0\alpha_1 - 11,5\beta_1 - 32,4\pi' + 48'',5, \\ 0 = -11,5\alpha_1 + 145,8\beta_1 + 144,0\pi' + 14'',0, \\ 0 = -32,4\alpha_1 + 114,0\beta_1 + 533,9\pi' + 41'',8; \end{cases}$$

$$2^{\circ}\quad \begin{cases} 0 = +308,0\alpha_2 + 6,2\beta_2 + 122,7\pi' + 2'',5, \\ 0 = +6,2\alpha_2 + 41,1\beta_2 - 19,9\pi' - 1'',3, \\ 0 = +122,7\alpha_2 - 19,9\beta_2 + 719,6\pi' - 25'',3; \end{cases}$$

$$3^\circ\quad\left\{\begin{aligned} o &= +237{,}0\,\alpha_3 + 4{,}8\,\beta_3 + 67{,}9\,\pi' + 3'',9,\\ o &= +4{,}8\,\alpha_3 + 33{,}6\,\beta_3 - 12{,}4\,\pi' - 7'',1,\\ o &= +67{,}9\,\alpha_3 - 12{,}4\,\beta_3 + 567{,}1\,\pi' + 13'',0;\end{aligned}\right.$$

$$4^\circ\quad\left\{\begin{aligned} o &= +192{,}0\,\alpha_4 - 23{,}8\,\beta_4 + 62{,}1\,\pi' + 44'',4,\\ o &= -23{,}8\,\alpha_4 + 24{,}7\,\beta_4 - 11{,}0\,\pi' - 9'',7,\\ o &= +62{,}1\,\alpha_4 - 11{,}0\,\beta_4 + 427{,}9\,\pi' + 38'',4;\end{aligned}\right.$$

$$5^\circ\quad\left\{\begin{aligned} o &= +264{,}0\,\alpha_5 + 23{,}5\,\beta_5 - 83{,}2\,\pi' + 75'',1,\\ o &= +23{,}5\,\alpha_5 + 45{,}4\,\beta_5 + 26{,}4\,\pi' + 7'',5,\\ o &= -83{,}2\,\alpha_5 + 26{,}4\,\beta_5 + 378{,}2\,\pi' + 38'',6.\end{aligned}\right.$$

La résolution de chaque système d'équations, pris isolément, donne, pour les inconnues, les valeurs

1°	$\alpha_1 = -0'',167$,	$\beta_1 = -0'',053$,	$\pi' = -0'',077$;
2°	$\alpha_2 = -0'',020$,	$\beta_2 = +0'',024$,	$\pi' = +0'',039$;
3°	$\alpha_3 = -0'',016$,	$\beta_3 = +0'',210$,	$\pi' = -0'',016$;
4°	$\alpha_4 = -0'',188$,	$\beta_4 = +0'',187$,	$\pi' = -0'',057$;
5°	$\alpha_5 = -0'',354$,	$\beta_5 = +0'',119$,	$\pi' = -0'',188$,

qui, à proprement parler, ne doivent être considérées que comme des premières approximations. Pour obtenir une valeur plus exacte de π', nous procéderons par approximations successives. β est la variation que subirait la valeur de α en dix jours, si cette quantité variait uniformément. Or, comme nous avons maintenant une série de valeurs de α, pour des dates distantes de quinze à vingt jours, nous pourrions, si toutes ces valeurs étaient comparables, en déduire par différence les valeurs de β. En réalité, deux de ces valeurs seulement, les deux premières, sont rigoureusement comparables entre elles; mais, prises deux à deux, toutes les séries d'observations ont des étoiles communes; les différences probables des moyennes des huit étoiles sont donc si petites, qu'il parait difficile qu'il en résulte des erreurs sur les valeurs de β déduites de leurs différences.

La comparaison des cinq valeurs successives de α donne pour β les nouvelles valeurs

$$+0'',09,\quad +0'',05,\quad -0'',05,\quad -0'',12,\quad -0'',12;$$

les nombres y croissent en sens inverse des valeurs déduites des équations, et, de plus, ils y ont des signes contraires. Un pareil ré-

sultat ne peut être attribué qu'à des erreurs accidentelles, et, au lieu de se servir de l'un ou de l'autre des deux systèmes de valeurs de β, il est préférable de déduire, de leur ensemble, les valeurs les plus probables de cette inconnue; elles sont

$$\beta_1 = +0'',04,\quad \beta_2 = +0'',04,\quad \beta_3 = 0'',00,\quad \beta_4 = -0'',03,\quad \beta_5 = -0'',03.$$

Une seconde approximation donne alors pour π'

$$\pi' = -0'',05.$$

Portant ces valeurs de β et de π' dans la première équation de chaque série, on aura de nouvelles valeurs de α, qui, combinées avec les valeurs précédentes de β et portées dans la dernière équation de chaque série donneront, pour π', et, par suite, pour π, les valeurs suivantes :

1°	$\pi' = -0'',096,$	$\pi = 8'',815;$
2°	$\pi' = +0'',034,$	$\pi = 8'',930;$
3°	$\pi' = -0'',023,$	$\pi = 8'',880;$
4°	$\pi' = -0'',059,$	$\pi = 8'',847;$
5°	$\pi' = +0'',175,$	$\pi = 8'',744;$
Moyenne....	$\pi' = -0'',050,$	$\pi = 8'',855.$

L'erreur probable de chaque équation est d'environ $0'',82$; l'erreur probable de la valeur conclue pour π' est donc approximativement de $0'',016$, et l'erreur probable de la quantité π est elle-même de $0'',014$.

Mais cette méthode suppose que les erreurs de toutes les équations séparées sont entièrement indépendantes, hypothèse qui revient à admettre que les observations faites à chaque observatoire ne sont point affectées d'erreurs particulières à l'observateur.

Cette hypothèse est peu probable; mais l'influence d'une pareille cause d'erreur est peut-être insensible. Pour s'en assurer, on a calculé, d'après les méthodes ordinaires, les résidus correspondants à chaque équation. Éliminant alors les équations qui correspondent à des observations où ces erreurs sont considérables, on a trouvé, pour la valeur de la parallaxe du Soleil, déduite des observations méridiennes de Mars à son opposition de 1862, le nombre

$$8'',855,$$

avec une erreur probable de

$$\pm 0'', 020,$$

quantité qui n'est que le

$$\frac{1}{442}$$

de la valeur elle-même de la parallaxe.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Brümmer (F.). — Hülfsmittel für den Unterricht in der Geometrie. 2. Aufl. Gr. in-8. Wittenberg, Herrosé. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Campanella (F.). — Delle trasformazioni geometriche. In-8, 48 p., con 10 tav. Genova, tip. dei Sordo-Muti.

Denza (F.). — Le stelle dei periodi di novembre 1868 ed agosto 1869 osservate in Piemonte ed in altre contrade d'Italia. Memorie V e VI. In-8, 85 p. Torino, tip. Collegio Artigianelli.

Denza (F.). — Norme per le osservazioni delle meteore luminose. In-8, 26 p. *Ibidem*.

Erdmann (Th.). — Das Descartes'sche Folium in seiner Verallgemeinerung. Programm der Realschule zu Münster. In-4. 14 S. u. 1 Taf.

Guldberg (A.-S.). — Matematikens Betydning og Anvendelse. Fem populære Foredrag. Christiania, Lund. In-12, 1870. 45 Sk.

Hoschek (J.). — Die centrale Projektionsmethode und ihre Anwendung in der Perspective. Programm der Realschule zu St. Pölten. In-8. 36 S. mit 3 Taf.

Meyer. — Vorlesungen über bestimmte Integrale zwischen reellen Grenzen, nach *Lejeune-Dirichlet*. — Leipzig, Teubner. 1871. In-8. (628 p.) 4 Thlr.

Thiele (T.-N.). — En mathematisk Formel for Dödeligheden, prövet paa en af Livsforsikkringsanstalten af 1871 benyttet Erfaringsrække. 20 Sider in-8. Kjöbenhavn, Reitzel. 24 Sk.

MÉLANGES.

MÉMOIRE SUR LE PRINCIPE DE LA MOINDRE ACTION (¹);

PAR M. J.-A. SERRET.

La première idée de la propriété qui constitue le principe dit *de la moindre action* est due à Euler; ce grand géomètre démontra effectivement, dès 1744, à la fin de son *Traité des isopérimètres,* que, dans les trajectoires décrites par les forces centrales, l'intégrale de la vitesse multipliée par l'élément de la courbe est toujours un *maximum* ou un *minimum*. Lagrange montra ensuite, en 1760 (²), que la même propriété peut être étendue au mouvement d'un système quelconque de corps, pourvu que le *principe des forces vives* ait lieu, et il en développa l'application à la solution d'un assez grand nombre de problèmes. Aussi l'illustre auteur de la *Mécanique analytique* jugea-t-il plus tard que la propriété dont il s'agit méritait, à raison de son importance, de faire l'objet d'un nouveau principe général de dynamique, qu'il appela *de la moindre action,* sans se dissimuler la défectuosité de cette dénomination, renouvelée de Maupertuis (³).

Pour faire usage du principe de la moindre action dans la solution des problèmes de Mécanique, il suffit d'égaler à zéro la *variation* de l'intégrale dont la valeur est un *maximum* ou un *minimum,* et le résultat qu'on obtient ainsi ne diffère pas, au fond, de la formule générale de la dynamique. Il est donc peu important, à ce point de vue, de savoir si le maximum ou le minimum *a lieu effectivement :* ce qu'il faut, c'est, je le répète, que la variation de l'intégrale soit nulle, et la démonstration que Lagrange a donnée de son principe n'établit pas autre chose.

Mais il n'en est pas moins d'un haut intérêt pour l'Analyse et pour la Mécanique générale qu'une propriété aussi remarquable du mouvement soit connue exactement. Je suis parvenu heureusement à combler la lacune qui existait à cet égard, en calculant la variation

---

(¹) Lu à l'Académie des Sciences, le 12 juin 1871.
(²) *Miscellanea Taurinensia*, t. II, ou *Œuvres de Lagrange*, t. I, p. 365.
(³) *Mécanique analytique*, 3ᵉ édition, t. I, p. 229 et 281.

du deuxième ordre de l'intégrale dont la variation du premier ordre est nulle. Cette variation du deuxième ordre est toujours positive, au moins, tant que l'intervalle de temps auquel se rapporte l'intégrale reste inférieur à une certaine limite, et l'on peut affirmer, dès lors, que *le minimum a lieu effectivement, en général*. Mais lorsque la limite dont je viens de parler existe et qu'elle est atteinte ou dépassée, il peut arriver, et il arrive en effet généralement, que *le minimum n'a plus lieu*.

L'analyse que je développe dans ce Mémoire est, je crois, la première application importante qui ait été faite du *Calcul des variations* à la distinction du *maximum* et du *minimum*; aussi mérite-t-elle peut-être, à ce point de vue, d'arrêter un instant l'attention de l'Académie.

§ I.

Démonstration générale du principe de la moindre action.

1. Le principe de la moindre action dont je me propose de présenter ici une démonstration complète peut être énoncé de la manière suivante :

Lorsque le principe des forces vives est applicable à un système de points matériels libres ou liés entre eux et sollicités par des forces données, le mouvement du système est tel, que la somme des quantités de mouvement des divers corps multipliées par les éléments des trajectoires respectives a, entre deux positions quelconques du système, une intégrale minimum; c'est-à-dire que l'intégrale dont il s'agit est moindre dans le mouvement réel que dans le mouvement nouveau qui aurait lieu si, rendant le premier mouvement impossible par l'introduction de liaisons nouvelles, on obligeait les corps à suivre, sous l'action des mêmes forces, des trajectoires infiniment voisines des premières, pour passer de la première position à la seconde, tout en laissant subsister l'équation des forces vives et en conservant la valeur de la constante qui exprime la différence entre la demi-somme des forces vives et la fonction des forces. Il peut arriver cependant que le minimum cesse d'avoir lieu dès que l'intervalle de temps auquel se rapporte l'intégrale atteint ou dépasse une certaine limite.

Comme la quantité de mouvement est le produit de la masse par la vitesse, et que l'élément de la trajectoire est le produit de la vitesse

par l'élément du temps, si l'on désigne par $2T$ la somme des forces vives des divers corps et par t le temps, l'intégrale V que nous avons à considérer aura pour valeur

$$(1) \qquad V = \int_{t_0}^{t_1} 2T\,dt,$$

t_0 et t_1 étant les valeurs du temps t qui répondent à deux positions successives du système; et pour établir le principe dont nous nous occupons, il suffit de prouver que l'on a

$$\delta V = 0, \quad \delta^2 V > 0,$$

δ étant la *caractéristique des variations*.

2. Si l'on rapporte la position des corps à trois axes de coordonnées rectangulaires, et que l'on désigne par x, y, z les coordonnées de la masse m, au bout du temps t, on aura

$$(2) \qquad T\,dt^2 = \frac{1}{2}\sum m(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

le signe $\sum$ s'étendant à tous les corps du système. Prenons les variations des deux membres, on aura

$$\delta T\,dt^2 + 2T\,dt\,\delta dt = \sum m(dx\,d\delta x + dy\,d\delta y + dz\,d\delta z);$$

le premier membre de cette formule est égal à

$$dt\,\delta(2T\,dt) - \delta T\,dt^2,$$

et le second membre peut être mis sous la forme

$$d(\Gamma\,dt) - \Psi\,dt^2,$$

en posant

$$(3) \qquad \Gamma = \sum m\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right),$$

$$(4) \qquad \Psi = \sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right);$$

on a donc

$$(5) \qquad \delta(2T\,dt) = d\Gamma + (\delta T - \Psi)\,dt,$$

et, en différentiant de nouveau avec la caractéristique δ,

$$(6)\qquad \delta^2(2T\,dt) = d\delta\Gamma + (\delta T - \Psi)\delta dt + (\delta^2 T - \delta\Psi)dt.$$

Mais la formule (1) donne, par les principes du calcul des variations,

$$\delta V = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\delta(2T\,dt)}{dt}\,dt,\quad \delta^2 V = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\delta^2(2T\,dt)}{dt}\,dt;$$

si donc on désigne par Γ_0, Γ_1 les valeurs de Γ qui répondent à $t = t_0$, $t = t_1$, on aura

$$(7)\quad \delta V = (\Gamma_1 - \Gamma_0) + \int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \Psi)\,dt,$$

$$(8)\quad \delta^2 V = (\delta\Gamma_1 - \delta\Gamma_0) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{(\delta T - \Psi)\delta dt}{dt}\,dt + \int_{t_0}^{t_1} (\delta^2 T - \delta\Psi)\,dt.$$

Ces formules (7) et (8) sont générales, et elles subsistent, quelles que soient les forces qui agissent sur les corps et les liaisons du système. Mais si, comme nous le supposons essentiellement, le principe des forces vives a lieu, on a

$$(9)\qquad T - U = C,$$

en désignant par U la fonction des forces et par C une constante arbitraire. Nous supposons encore que la constante C ne varie pas dans la différentiation avec la caractéristique δ, en sorte que l'on a aussi

$$(10)\qquad \delta T = \delta U,\quad \delta^2 T = \delta^2 U.$$

En outre, pour tous les déplacements *virtuels* compatibles avec les liaisons du système, on a, par la formule générale de la dynamique,

$$(11)\qquad \Psi - \delta U = 0;$$

et enfin, comme les coordonnées aux limites de l'intégration sont, par hypothèse, constantes, leurs variations de tous les ordres sont nulles, ce qui donne

$$\Gamma_0 = 0,\quad \Gamma_1 = 0,\quad \delta\Gamma_0 = 0,\quad \delta\Gamma_1 = 0.$$

Il suit de là que la formule (7) se réduit à

$$\delta V = 0.$$

résultat connu, et que la formule (8) devient

$$(12) \qquad \delta^2 V = \int_{t_0}^{t_1} (\delta^2 U - \delta\Psi) dt.$$

3. Pour calculer la variation du deuxième ordre $\delta^2 V$, je ferai usage des formules de la dynamique mises sous la forme générale que Lagrange leur a donnée. Ainsi les coordonnées ayant été exprimées en fonction d'un nombre quelconque n de variables

$$q_1, q_2, \ldots, q_n,$$

si l'on fait généralement

$$dq_i = q'_i dt,$$

la force vive $2T$ deviendra une fonction des variables q et q', laquelle sera homogène et du deuxième degré par rapport aux q', et l'on aura

$$(13) \qquad \Psi = \sum_i \left(\frac{d \frac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \delta q_i, \quad \delta U = \sum_i \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i,$$

d'où

$$(14) \qquad \Psi - \delta U = \sum_i \left(\frac{d \frac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} \right) \delta q_i,$$

le signe $\sum$ s'étendant aux valeurs $1, 2, \ldots, n$ de l'indice i.

Si, en faisant usage des liaisons entre les coordonnées rectangulaires, on a réduit les variables q au plus petit nombre possible, les variations δq seront toutes arbitraires, et la formule (11) donnera les n équations du mouvement

$$(15) \qquad \frac{d \frac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0,$$

lesquelles subsisteront tant qu'on n'introduira pas de liaisons nouvelles. Je supposerai que l'on ait procédé de cette manière. Quant à l'équation (9) des forces vives, elle persiste, ainsi que sa différentielle $dT = dU$, malgré l'introduction de liaisons nouvelles indépendantes du temps. Cette différentielle peut se déduire de l'équa-

tion (11), en remplaçant la caractéristique δ par d, et l'on a, en conséquence,

$$(16)\qquad o=\sum_i\left(\frac{d\frac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt}-\frac{\partial T}{\partial q_i}-\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)q'_i.$$

Différentiant avec la caractéristique δ les équations (14) et (16), il viendra, après la suppression des termes nuls en vertu des formules (15),

$$(17)\qquad \delta\Psi-\delta^2 U=\sum_i\left(\delta\frac{d\frac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt}-\delta\frac{\partial T}{\partial q_i}-\delta\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)\delta q_i,$$

$$(18)\qquad o=\sum_i\left(\delta\frac{d\frac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt}-\delta\frac{\partial T}{\partial q_i}-\delta\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)q'_i.$$

Il faut remarquer que nous pourrions éliminer de nos formules l'élément dt du temps, en faisant usage de l'équation des forces vives; mais il est préférable ici de conserver le temps comme variable indépendante et d'exécuter seulement l'élimination de la variation δdt; c'est en vue de cette élimination que nous avons formé l'équation (18).

Je poserai

$$(19)\qquad \omega=\frac{1}{2T}\sum_k\frac{\partial T}{\partial q'_k}\delta q_k,$$

le signe $\sum$ s'étendant aux valeurs 1, 2,..., n de l'indice k, et je ferai aussi, quel que soit l'indice k,

$$(20)\qquad \alpha_k=\delta q_k-\omega q'_k;$$

alors, si l'on retranche, de l'équation (17), l'équation (18) multipliée par ω, on aura

$$(21)\qquad \delta\Psi-\delta^2 U=\sum_i\alpha_i\left(\delta\frac{d\frac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt}-\delta\frac{\partial T}{\partial q_i}-\delta\frac{\partial U}{\partial q_i}\right).$$

4. Les n quantités α que nous substituerons aux δq ne sont pas, comme celles-ci, toutes arbitraires; il existe entre elles une relation

linéaire. Effectivement, la formule (20) donne

$$\delta q_k = \alpha_k + \omega q'_k, \tag{22}$$

et, en portant cette valeur de δq_k dans la formule (19), on obtient

$$\sum_k \frac{\partial T}{\partial q'_k} \alpha_k = 0, \tag{23}$$

à cause de l'équation

$$2T = \sum_k \frac{\partial T}{\partial q'_k} q'_k, \tag{24}$$

qui résulte du théorème des *fonctions homogènes*.

La différentiation de l'équation (19) donne

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{dt} = &-\frac{1}{2T^2}\frac{dT}{dt}\sum_k \frac{\partial T}{\partial q'_k}\delta q_k \\ &+ \frac{1}{2T}\sum_k \frac{d\frac{\partial T}{\partial q'_k}}{dt}\delta q_k + \frac{1}{2T}\sum_k \frac{\partial T}{\partial q'_k}\delta q'_k + \frac{1}{2T}\frac{\delta dt}{dt}\sum_k \frac{\partial T}{\partial q'_k} q'_k.\end{aligned}$$

Mais on a

$$\sum_k \frac{\partial T}{\partial q'_k}\delta q'_k = \delta T - \sum_k \frac{\partial T}{\partial q_k}\delta q_k;$$

le deuxième et le troisième terme du second membre de la formule précédente ont donc pour somme

$$\frac{1}{2T}\left[\delta T + \sum_k \left(\frac{d\frac{\partial T}{\partial q'_k}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_k}\right)\delta q_k\right] = \frac{1}{2T}(\delta T + \Psi) = \frac{\delta U}{T},$$

ou encore, à cause de la formule (22),

$$\frac{1}{T}\sum_k \frac{\partial U}{\partial q_k}\alpha_k + \frac{\omega}{T}\frac{dU}{dt};$$

mais, par les formules (19) et (24), le premier et le dernier terme de l'expression de $\frac{d\omega}{dt}$ se réduisent respectivement à $-\frac{\omega}{T}\frac{dT}{dt} = -\frac{\omega}{T}\frac{dU}{dt}$

et à $\frac{\delta dt}{dt}$; faisant donc, pour abréger l'écriture,

(25) $$\theta = \frac{1}{T}\sum_k \frac{\partial U}{\partial q_k}\alpha_k,$$

on aura

(26) $$\frac{d\omega}{dt} = \theta + \frac{\delta dt}{dt}.$$

Si l'on pose généralement

$$dq'_i = q''_i dt,$$

la différentiation de l'équation (22) donnera ensuite

(27) $$\delta q'_k = \frac{d\alpha_k}{dt} + \theta q'_k + \omega q''_k.$$

Cela posé, on a

$$\delta \frac{\partial T}{\partial q'_i} = \sum_k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial q'_i \partial q'_k}\delta q'_k + \frac{\partial^2 T}{\partial q'_i \partial q_k}\delta q_k\right),$$

et, à cause des formules (22), (27), en remarquant que $\frac{\partial T}{\partial q'_i}$ est u[ne] fonction linéaire et homogène des quantités q',

(28) $$\delta \frac{\partial T}{\partial q'_i} = \sum_k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial q'_i \partial q'_k}\frac{d\alpha_k}{dt} + \frac{\partial^2 T}{\partial q'_i \partial q_k}\alpha_k\right) + \theta\frac{\partial T}{\partial q'_i} + \omega \frac{d\frac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt}.$$

Différentions cette équation (28) et divisons ensuite par dt; [on] aura après la suppression des termes en δdt, qui se détruisent,

(29) $$\left\{\begin{aligned} \delta \frac{d\frac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt} &= \frac{d}{dt}\sum_k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial q'_i \partial q'_k}\frac{d\alpha_k}{dt} + \frac{\partial^2 T}{\partial q'_i \partial q_k}\alpha_k\right) \\ &\quad + \frac{d\theta}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i} + 2\theta \frac{d\frac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt} + \omega \frac{d^2\frac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt^2}.\end{aligned}\right.$$

Enfin on a aussi, par les formules (22) et (27), en faisant

du théorème des fonctions homogènes,

$$(30)\qquad \delta\frac{\partial T}{\partial q_i}=\sum_k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial q_i\partial q'_k}\frac{d\alpha_k}{dt}+\frac{\partial^2 T}{\partial q_i\partial q_k}\alpha_k\right)+2\theta\frac{\partial T}{\partial q_i}+\omega\frac{d\frac{\partial T}{\partial q_i}}{dt},$$

$$(31)\qquad \delta\frac{\partial U}{\partial q_i}=\sum_k\frac{\partial^2 U}{\partial q_i\partial q_k}\alpha_k+\omega\frac{d\frac{\partial U}{\partial q_i}}{dt}.$$

Portons dans l'équation (21) les valeurs fournies par les formules (29), (30), (31). Les termes multipliés par ω disparaissent en vertu des équations (15), et le terme en $\frac{d\theta}{dt}$ s'évanouit aussi, en vertu de l'équation (23). Quant aux termes multipliés par θ, ils se réduisent à $2\theta\sum_i\frac{\partial U}{\partial q_i}\alpha_i$, à cause des formules (15), c'est-à-dire à

$$\frac{2}{T}\sum_i\sum_k\frac{\partial U}{\partial q_i}\frac{\partial U}{\partial q_k}\alpha_i\alpha_k.$$

D'après cela, si l'on fait, pour abréger,

$$(32)\qquad H_{i,k}=\frac{1}{2}\frac{d\left(\frac{\partial^2 T}{\partial q'_i\partial q_k}+\frac{\partial^2 T}{\partial q'_k\partial q_i}\right)}{dt}-\frac{\partial^2 T}{\partial q_i\partial q_k}-\frac{\partial^2 U}{\partial q_i\partial q_k}+\frac{2}{T}\frac{\partial U}{\partial q_i}\frac{\partial U}{\partial q_k},$$

on aura, après une transformation facile, et parce qu'il est permis d'intervertir les indices i et k sous le double signe $\sum$,

$$(33)\quad\left\{\begin{aligned}\delta\Psi-\delta^2 U=&\frac{d}{dt}\left(\sum_i\sum_k\frac{\partial^2 T}{\partial q'_i\partial q'_k}\alpha_i\frac{d\alpha_k}{dt}\right)-\sum_i\sum_k\frac{\partial^2 T}{\partial q'_i\partial q'_k}\frac{d\alpha_i}{dt}\frac{d\alpha_k}{dt}\\&+\sum_i\sum_k\frac{\partial^2 T}{\partial q'_i\partial q_k}\left(\alpha_i\frac{d\alpha_k}{dt}-\alpha_k\frac{d\alpha_i}{dt}\right)+\sum_i\sum_k H_{i,k}\alpha_i\alpha_k.\end{aligned}\right.$$

Cette expression de $\delta\Psi-\delta^2 U$ ne renferme, comme on voit, que les variations δq et leurs différentielles; elle est indépendante de la variation δdt de l'élément du temps.

5. D'après la formule (23), parmi les n quantités α, $n-1$ seulement sont arbitraires, et l'on peut exprimer ces n quantités en fonction de $n-1$ indéterminées nouvelles. Je poserai, en conséquence,

quel que soit i,

$$\alpha_i = X_{i,1}\varpi_1 + X_{i,2}\varpi_2 + \ldots + X_{i,n-1}\varpi_{n-1},$$

ou, pour abréger,

$$(34) \qquad \alpha_i = \sum_\lambda X_{i,\lambda}\varpi_\lambda;$$

l'indice λ doit recevoir les $n-1$ valeurs $1, 2, \ldots, (n-1)$; les $n-1$ fonctions ϖ demeurent arbitraires, tandis que je me réserve la faculté de choisir à volonté les $n(n-1)$ fonctions $X_{i,\lambda}$. J'établis dès à présent entre ces fonctions les $n-1$ relations comprises dans la formule

$$(35) \qquad \sum_i \frac{\partial T}{\partial q'_i} X_{i,\lambda} = 0,$$

et en vertu desquelles les équations (23) se trouvent vérifiées.

Je ferai aussi

$$(36) \qquad \alpha'_i = \sum_\lambda \frac{dX_{i,\lambda}}{dt}\varpi_\lambda, \quad \alpha''_i = \sum_\lambda \frac{d^2X_{i,\lambda}}{dt^2}\varpi_\lambda,$$

et

$$(37) \qquad \beta_i = \sum_\lambda X_{i,\lambda}\frac{d\varpi_\lambda}{dt}, \quad \gamma_i = \sum_\lambda \frac{dX_{i,\lambda}}{dt}\frac{d\varpi_\lambda}{dt},$$

en sorte que l'on aura

$$(38) \qquad \frac{d\alpha_i}{dt} = \alpha'_i + \beta_i, \quad \frac{d\alpha'_i}{dt} = \alpha''_i + \gamma_i.$$

Alors si l'on pose

$$(39) \qquad 2A = \sum_i\sum_k \frac{\partial^2 T}{\partial q'_i \partial q'_k}(\alpha_i\beta_k + \alpha_k\beta_i),$$

$$(40) \qquad 2B = \sum_i\sum_k \frac{\partial^2 T}{\partial q'_i \partial q'_k}\beta_i\beta_k,$$

puis

$$(41) \quad M = \sum_i\sum_k \frac{\partial^2 T}{\partial q'_i \partial q'_k}(\alpha_i\gamma_k - \alpha'_k\beta_i) + \sum_i\sum_k \frac{\partial^2 T}{\partial q'_i \partial q_k}(\alpha_i\beta_k - \alpha_k\beta_i),$$

$$
). \quad \left\{ \begin{aligned}
N = & \sum_i \sum_k \frac{\partial^2 T}{\partial q'_i \partial q'_k} \alpha_i \alpha''_k \\
& + \sum_i \sum_k \left[\frac{d \frac{\partial^2 T}{\partial q'_i \partial q'_k}}{dt} + \frac{\partial^2 T}{\partial q'_i \partial q_k} - \frac{\partial^2 T}{\partial q'_k \partial q_i} \right] \alpha_i \alpha'_k \\
& + \sum_i \sum_k H_{i,k} \alpha_i \alpha_k,
\end{aligned} \right.
$$

rmule (33) deviendra

$$
) \qquad \delta \Psi - \delta^2 U = \frac{dA}{dt} - 2B + M + N.
$$

. On a, par les formules (34), (36) et (37),

$$
) \quad \left\{ \begin{aligned}
\alpha_i \gamma_k - \alpha'_k \beta_i &= \sum_\lambda \sum_\mu X_{i,\lambda} \frac{dX_{k,\mu}}{dt} \left(\varpi_\lambda \frac{d\varpi_\mu}{dt} - \varpi_\mu \frac{d\varpi_\lambda}{dt} \right), \\
\alpha_i \beta_k - \alpha_k \beta_i &= \sum_\lambda \sum_\mu X_{i,\lambda} X_{k,\mu} \left(\varpi_\lambda \frac{d\varpi_\mu}{dt} - \varpi_\mu \frac{d\varpi_\lambda}{dt} \right), \\
\alpha_i \alpha''_k &= \sum_\lambda \sum_\mu X_{i,\lambda} \frac{d^2 X_{k,\mu}}{dt^2} \varpi_\lambda \varpi_\mu, \\
\alpha_i \alpha'_k &= \sum_\lambda \sum_\mu X_{i,\lambda} \frac{dX_{k,\mu}}{dt} \varpi_\lambda \varpi_\mu, \\
\alpha_i \alpha_k &= \sum_\lambda \sum_\mu X_{i,\lambda} X_{k,\mu} \varpi_\lambda \varpi_\mu.
\end{aligned} \right.
$$

l s'ensuit que M est une fonction linéaire et homogène des $\frac{-1)(n-2)}{2}$ quantités $\varpi_\lambda \frac{d\varpi_\mu}{dt} - \varpi_\mu \frac{d\varpi_\lambda}{dt}$, et que N est une fonc- homogène du deuxième degré des $n-1$ quantités ϖ, laquelle ferme, en conséquence, $\frac{n(n-1)}{2}$ termes. Je me propose de dispo- des fonctions indéterminées $X_{i,\lambda}$ de manière que l'on ait identi- ment

$$
) \qquad M = 0, \quad N = 0,
$$

'on voit, par ce qui précède, qu'il suffit, pour remplir cet objet,

d'établir entre les $n(n-1)$ fonctions $X_{i,\lambda}$, un nombre de relations égal à

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=(n-1)^2.$$

Ces $(n-1)^2$ équations, jointes aux $n-1$ qui sont comprises dans la formule (35) constituent un système de $n(n-1)$ équations simultanées qui déterminent, comme je vais le démontrer, les valeurs des $n(n-1)$ fonctions $X_{i,\lambda}$ dont nous avons besoin.

7. Les $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ relations qu'il faut établir entre les fonctions $X_{i,\lambda}$ pour que M soit nulle sont comprises dans la formule suivante :

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned}&\sum_i\sum_k \frac{\partial^2 T}{\partial q'_i\partial q'_k}\left(X_{i,\lambda}\frac{dX_{k,\mu}}{dt}-X_{k,\mu}\frac{dX_{i,\lambda}}{dt}\right)\\ &\quad+\sum_i\sum_k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial q'_i\partial q_k}-\frac{\partial^2 T}{\partial q'_k\partial q_i}\right)X_{i,\lambda}X_{k,\mu}=0,\end{aligned}\right.$$

formule que l'on peut employer, même dans le cas de $\lambda=\mu$, parce qu'alors elle se réduit à une identité.

Quant aux $\frac{n(n-1)}{2}$ équations nécessaires pour que N s'évanouisse, elles sont comprises dans la formule

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned}&\sum_i\sum_k \frac{\partial^2 T}{\partial q'_i\partial q'_k}\left(X_{i,\lambda}\frac{d^2X_{k,\mu}}{dt^2}+X_{k,\mu}\frac{d^2X_{i,\lambda}}{dt^2}\right)\\ &\quad+\sum_i\sum_k\left(G_{i,k}X_{i,\lambda}\frac{dX_{k,\mu}}{dt}+G_{k,i}X_{k,\mu}\frac{dX_{i,\lambda}}{dt}\right)\\ &\qquad\qquad+2\sum_i\sum_k H_{i,k}X_{i,\lambda}X_{k,\mu}=0,\end{aligned}\right.$$

où l'on fait, pour abréger,

$$(48)\qquad G_{i,k}=\frac{d\,\frac{\partial^2 T}{\partial q'_i\partial q'_k}}{dt}+\frac{\partial^2 T}{\partial q'_i\partial q_k}-\frac{\partial^2 T}{\partial q'_k\partial q_i}.$$

Ainsi le système simultané qui détermine les fonctions $X_{i,\lambda}$ est composé des équations comprises dans les formules (35), (46) et

(47), où les indices λ, μ doivent recevoir les valeurs 1, 2,..., $(n-1)$. Mais la formule (47) peut être simplifiée ; si, en effet, on en retranche l'équation (46) différentiée, on obtient la formule nouvelle

$$(49)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_i\sum_k \frac{\partial^2 T}{\partial q'_i\,\partial q'_k} X_{k,\mu}\frac{d^2 X_{i,\lambda}}{dt^2} \\ &+\sum_i\sum_k G_{k,i}X_{k,\mu}\frac{dX_{i,\lambda}}{dt}+\sum_i\sum_k L_{k,i}X_{k,\mu}X_{i,\lambda}=0,\end{aligned}\right.$$

où l'on a fait

$$(50)\qquad L_{k,i}=\frac{d\dfrac{\partial^2 T}{\partial q'_k\partial q_i}}{dt}-\frac{\partial^2 T}{\partial q_i\partial q_k}-\frac{\partial^2 U}{\partial q_i\partial q_k}+\frac{2}{T}\frac{\partial U}{\partial q_i}\frac{\partial U}{\partial q_k}.$$

D'un autre côté, en différentiant deux fois l'équation (35), on a

$$(51)\qquad \sum_i \frac{\partial T}{\partial q'_i}\frac{dX_{i,\lambda}}{dt}+\sum_i\frac{d\dfrac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt}X_{i,\lambda}=0,$$

$$(52)\quad \sum_i\sum_k\frac{\partial^2 T}{\partial q'_i\,\partial q'_k}q'_k\frac{d^2X_{i,\lambda}}{dt^2}+2\sum_i\frac{d\dfrac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt}\frac{dX_{i,\lambda}}{dt}+\sum_i\frac{d^2\dfrac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt^2}X_{i,\lambda}=0.$$

Considérons λ comme constant et donnons à μ les valeurs 1, 2,..., $(n-1)$; les $n-1$ équations (49) et l'équation (52) pourront être résolues par rapport aux dérivées du second ordre $\frac{d^2X_{i,\lambda}}{dt^2}$. D'après un théorème connu, le déterminant formé avec les coefficients de ces dérivées est égal au produit de deux autres déterminants dont le premier formé avec les n^2 dérivées du deuxième ordre $\frac{\partial^2 T}{\partial q'_i\,\partial q'_k}$ n'est autre chose que l'*invariant* Δ de la force vive considérée comme fonction des seules variables q', et dont le second X a pour valeur

$$(53)\qquad X=\begin{vmatrix} X_{1,1} & X_{2,1} & \dots & X_{n,1}\\ X_{1,2} & X_{2,2} & \dots & X_{n,2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ X_{1,n-1} & X_{2,n-1} & \dots & X_{n,n-1}\\ q'_1 & q'_2 & \dots & q'_n\end{vmatrix}.$$

On aura donc des équations résultantes de la forme

$$(54)\qquad \frac{d^2 X_{i,\lambda}}{dt^2} = \frac{Z_{i,\lambda}}{\Delta X},$$

$Z_{i,\lambda}$ étant une fonction entière relativement aux $X_{k,\mu}$ et linéaire par rapport aux dérivées du premier ordre $\frac{dX_{k,\mu}}{dt}$. Quant aux coefficients, ils sont des fonctions déterminées de t, ainsi que l'invariant Δ, lequel ne peut jamais se réduire à zéro.

Si l'on donne à i les valeurs $1, 2, \ldots, n$, et à λ les valeurs $1, 2, \ldots, (n-1)$, la formule (54) représentera un système de $n(n-1)$ équations différentielles auxquelles répondra certainement un système intégral renfermant $2n(n-1)$ constantes arbitraires. Ces arbitraires seront, si l'on veut, les valeurs que prennent les fonctions $X_{i,\lambda}$ et leurs premières dérivées pour $t = t_0$; mais, comme ces valeurs initiales doivent satisfaire aux équations (35), (51) et (46) après qu'on y a fait $t = t_0$, et que le nombre de ces équations est

$$2(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

il s'ensuit que les expressions cherchées de nos fonctions $X_{i,\lambda}$ renfermeront seulement $\frac{(n-1)(3n-2)}{2}$ constantes arbitraires.

On peut établir au surplus ce dernier point avec une entière rigueur. A cet effet, posons

$$(55)\qquad \sum_i \sum_k \frac{\partial^2 T}{\partial q'_i \, \partial q'_k} X_{k,\mu} \frac{dX_{i,\lambda}}{dt} + \sum_i \sum_k \frac{\partial^2 T}{\partial q'_k \, \partial q_i} X_{i,\lambda} X_{k,\mu} = Y_{\lambda,\mu},$$

ce qui réduit l'équation (46) à

$$(56)\qquad Y_{\mu,\lambda} = Y_{\lambda,\mu},$$

et écrivons la formule (51) sous la forme suivante :

$$(57)\qquad \sum_i \sum_k \frac{\partial^2 T}{\partial q'_i \, \partial q'_k} q'_k \frac{dX_{i,\lambda}}{dt} + \sum_i \frac{d \frac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt} X_{i,\lambda} = 0.$$

Si l'on suppose λ constant, et que l'on donne à μ les valeurs 1,

2,..., $(n-1)$, la formule (55) comprendra $n-1$ équations, qui, jointes à la formule (57) constitueront un système de n équations, dans lequel les coefficients des n dérivées $\frac{dX_{i,\lambda}}{dt}$ auront évidemment pour déterminant le produit ΔX, en sorte qu'on aura des résultats de la forme

$$(58) \qquad \frac{dX_{i,\lambda}}{dt} = \frac{P_{i,\lambda}}{\Delta X},$$

$P_{i,\lambda}$ désignant une fonction entière des quantités $Y_{\lambda,\mu}$ et $X_{i,\mu}$.

Cela posé, parmi les valeurs initiales des $n(n-1)$ fonctions $X_{i,\lambda}$, il y en a $n-1$ qui sont déterminées par les équations (35) en fonction des $(n-1)^2$ autres, et celles-ci demeurent arbitraires. En outre, à cause de la formule (56), les quantités $Y_{\lambda,\mu}$ sont au nombre de $\frac{n(n-1)}{2}$, et leurs valeurs initiales peuvent être regardées comme arbitraires; la formule (58) détermine alors les valeurs initiales des dérivées $\frac{dX_{i,\lambda}}{dt}$ en fonction des arbitraires choisies, lesquelles sont au nombre de

$$(n-1)^2 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n-1)(3n-2)}{2}.$$

Les intégrales générales du système (54) ne peuvent pas vérifier l'équation $X=0$, et il est évident que l'on peut même, si l'on veut, choisir pour l'une des arbitraires la valeur de X qui répond à $t=t_0$. Il s'ensuit que les seconds membres des équations (58) auront, pour $t=t_0$, des valeurs finies et déterminées.

8. Il est nécessaire pour notre objet que les $n(n-1)$ fonctions $X_{i,\lambda}$, déterminées comme on vient de le dire, conservent des valeurs finies pour toutes les valeurs de t comprises entre t_0 et t_1. Il faut, en outre, que ces fonctions soient telles, qu'ayant fixé à volonté les variations δq, on puisse tirer des équations (34) des valeurs finies et déterminées pour les $n-1$ fonctions ϖ; car, s'il en était autrement, le système des arbitraires ϖ, que nous avons substitué au système des α, n'aurait pas la même généralité que celui-ci. Je dis que la condition dont je parle sera toujours remplie, tant que le déterminant X ne se réduira pas à zéro.

En effet, à cause des formules (23) et (35), les n équations contenues dans la formule (34) se réduisent à $n-1$ distinctes. Mais,

pour en déduire les valeurs des $n-1$ quantités ϖ, on peut les employer toutes, en remplaçant les α par leurs valeurs tirées des formules (20), et laissant ω indéterminée; la valeur qu'on obtiendra de cette manière pour ω devra coïncider avec celle que donne la formule (19). En procédant ainsi, la formule (34) devient

$$\delta q_i = \sum_\lambda X_{i,\lambda}\varpi_\lambda + q'_i\,\omega, \tag{59}$$

et le déterminant formé avec les coefficients des variables ϖ_λ et ω dans les n équations que cette formule comprend est précisément X. La valeur de ϖ_λ restera donc finie tant que l'on n'aura pas $X=0$. Soit $X^{(k)}$ le déterminant obtenu en supprimant dans X la dernière ligne horizontale et la $k^{ième}$ colonne verticale, la valeur de ω tirée des équations (59) sera

$$\omega = \frac{1}{X}\sum_k X^{(k)}\delta q_k;$$

et, en la comparant avec celle que donne l'équation (19), on obtiendra la formule

$$X^{(k)} = \frac{\partial T}{\partial q'_k}\,\frac{X}{2T}, \tag{60}$$

laquelle est effectivement identique.

9. Nous sommes actuellement en mesure de procéder à la démonstration générale du principe que nous avons en vue.

Les fonctions $X_{i,\lambda}$ ayant été déterminées de manière que les équations (45) soient satisfaites, la formule (43) se réduit à

$$\delta\Psi - \delta^2 U = \frac{dA}{dt} - 2B. \tag{61}$$

Si donc les fonctions $X_{i,\lambda}$ conservent des valeurs finies, et que le déterminant X ne se réduise pas à zéro, quand t varie de t_0 à t_1, la formule (12) pourra se mettre sous la forme

$$\delta^2 V = \int_{t_0}^{t_1} 2B\,dt; \tag{62}$$

car A est une fonction homogène et linéaire des variations δq, les-

quelles s'évanouissent, par hypothèse, pour $t = t_0$ et pour $t = t_1$, avec les variations des coordonnées rectangulaires.

Or, par la propriété des fonctions homogènes dont nous avons déjà fait usage, on a

$$2T = \sum_i \sum_k \frac{\partial^2 T}{\partial q'_i \, \partial q'_k} q'_i q'_k;$$

donc la quantité $2B$ est précisément ce que devient la force vive $2T$ quand on remplace $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$ par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$; il s'ensuit que $2B$ est essentiellement positive et que l'on a, en conséquence,

(63) $$\delta^2 V > 0,$$

comme nous l'avions annoncé.

A la vérité, la quantité $2B$ s'évanouirait si les quantités β étaient identiquement nulles; mais le déterminant X étant différent de zéro, cela ne peut arriver, d'après la première des formules (37), que si les dérivées $\frac{d\varpi_\lambda}{dt}$ sont toutes nulles, auquel cas les quantités ϖ_λ seraient constantes, et par conséquent nulles, puisqu'elles se réduisent à zéro pour $t = t_0$ et pour $t = t_1$; les arbitraires α se réduiraient donc elles-mêmes à zéro, et les déplacements qui répondent à la caractéristique δ auraient lieu suivant les trajectoires mêmes des corps, hypothèse qui doit évidemment être écartée.

Le déterminant X est une fonction déterminée du temps t, ou, plus généralement, de la variable indépendante qu'on voudra choisir, et l'on a vu que cette fonction renferme dans son expression, comme les fonctions $X_{i,\lambda}$, $\frac{(n-1)(3n-2)}{2}$ constantes arbitraires. Au moyen de ces arbitraires, on peut faire en sorte, comme nous l'avons déjà dit, que X ait une valeur quelconque donnée pour $t = t_0$, limite inférieure de l'intégrale considérée V. Mais, quelles que soient les valeurs que l'on suppose aux arbitraires, le temps croissant à partir de t_0, il arrivera généralement que l'on aura $X = 0$ pour une certaine valeur de t, et il pourra se faire aussi que, pour une certaine valeur de t, quelqu'une des fonctions $X_{i,\lambda}$ cesse d'être finie. La plus petite valeur de t pour laquelle l'une ou l'autre de ces circonstances se présentera sera plus ou moins grande selon les valeurs attribuées aux arbitraires, mais elle pourra avoir une limite supérieure $t_0 + \tau$.

C'est donc alors seulement, pour les valeurs de t comprises entre t_0 et $t_0+\tau$, qu'on peut assigner aux fonctions $X_{i,\lambda}$ des valeurs finies qui ne réduisent pas à zéro le déterminant X; et, en conséquence, pour être en droit d'affirmer que l'inégalité (63) subsiste, il faut supposer

$$t_1 < t_0 + \tau.$$

L'existence du minimum est assurée tant que t_1 est inférieur à $t_0+\tau$; mais il peut arriver que, pour $t_1 = t_0+\tau$, il n'y ait plus de minimum. On sait que diverses questions de maximum et de minimum conduisent à des conclusions analogues.

§ II.

Examen du cas particulier des systèmes à liaisons complètes.

10. Le principe de la moindre action ne concerne que les systèmes dans lesquels le nombre des liaisons est inférieur de deux unités au moins au nombre des coordonnées des corps. Le cas de $n=2$, que je me propose d'examiner ici, peut donc être regardé comme celui des *systèmes à liaisons complètes*, au point de vue des propriétés relatives à la moindre action.

Dans ce cas, le nombre des fonctions $X_{i,\lambda}$ se réduit à deux, et, comme λ est toujours égal à 1, je supprimerai ce deuxième indice. Ainsi, en conservant toutes les notations dont j'ai fait usage, on aura

$$(1) \qquad \alpha_1 = X_1\varpi, \quad \alpha_2 = X_2\varpi,$$

et les fonctions X_1, X_2 seront liées entre elles par l'équation

$$(2) \qquad \frac{\partial T}{\partial q'_1}X_1 + \frac{\partial T}{\partial q'_2}X_2 = 0.$$

Le déterminant X a pour valeur

$$(3) \qquad X = q'_2 X_1 - q'_1 X_2,$$

et, à cause de la formule (2), on trouve, en faisant usage de la propriété des fonctions homogènes,

$$(4) \qquad X_1 = \frac{1}{2T}\frac{\partial T}{\partial q'_2}X, \quad X_2 = -\frac{1}{2T}\frac{\partial T}{\partial q'_1}X.$$

Quant à l'invariant Δ de la force vive, il a pour expression

$$(5)\qquad \Delta = \frac{\partial^2 T}{\partial q_1'^2}\frac{\partial^2 T}{\partial q_2'^2} - \left(\frac{\partial^2 T}{\partial q_1' \partial q_2'}\right)^2,$$

et, si l'on pose

$$(6)\qquad \Theta = \sqrt{\frac{\Delta}{2T}}\,X,$$

la quantité que j'ai désignée par $2B$ aura pour valeur

$$2B = \left(\Theta \frac{d\varpi}{dt}\right)^2,$$

en sorte que l'expression de la variation du deuxième ordre de l'intégrale V est, dans le cas qui nous occupe,

$$(7)\qquad \delta^2 V = \int_{t_0}^{t_1} \left(\Theta \frac{d\varpi}{dt}\right)^2 dt.$$

L'équation différentielle qu'il faut joindre à l'équation (2) pour déterminer les fonctions X_1, X_2 est fournie par la formule (47) ou par la formule (49) du § I; cette équation est la suivante :

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2 T}{\partial q_1'^2} X_1 + \frac{\partial^2 T}{\partial q_1' \partial q_2'} X_2\right)\frac{d^2 X_1}{dt^2} + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial q_1' \partial q_2'} X_1 + \frac{\partial^2 T}{\partial q_2'^2} X_2\right)\frac{d^2 X_2}{dt^2} \\ &\quad + (G_{1,1} X_1 + G_{2,1} X_2)\frac{dX_1}{dt} + (G_{1,2} X_1 + G_{2,2} X_2)\frac{dX_2}{dt} \\ &\quad + [L_{1,1} X_1^2 + (L_{1,2} + L_{2,1}) X_1 X_2 + L_{2,2} X_2^2] = 0; \end{aligned}\right.$$

mais on a, par les formules (4) et (6),

$$(9)\qquad X_1 = \frac{1}{\sqrt{2T\Delta}}\frac{\partial T}{\partial q_2'}\Theta, \quad X_2 = -\frac{1}{\sqrt{2T\Delta}}\frac{\partial T}{\partial q_1'}\Theta,$$

et, en transportant ces valeurs de X_1, X_2 dans l'équation (8), on obtient, après la suppression du facteur Θ commun à tous les termes, l'équation différentielle du deuxième ordre en Θ

$$(10)\qquad \frac{d^2\Theta}{dt^2} + K\Theta = 0.$$

Cette équation détermine Θ en fonction du temps et de deux constantes arbitraires; on en conclut immédiatement ensuite, par les

équations (6) et (9), le déterminant X et les fonctions X_1, X_2. Qu
au coefficient K, en faisant usage des équations différentielles
mouvement, il est facile de lui donner la forme suivante :

$$
(11)\quad \begin{cases}
K = -\dfrac{1}{\sqrt{\Delta}}\dfrac{d^2\sqrt{\Delta}}{dt^2} + \dfrac{1}{2T\Delta}\dfrac{d\left(\mathfrak{L}_1\dfrac{\partial T}{\partial q'_1} + \mathfrak{L}_2\dfrac{\partial T}{\partial q'_2}\right)}{dt} \\
\qquad - \dfrac{1}{2T\Delta}\left(\mathfrak{L} + 2\mathfrak{L}_1\dfrac{\partial U}{\partial q_1} + 2\mathfrak{L}_2\dfrac{\partial U}{\partial q_2}\right) + \dfrac{3}{4T^2\Delta}\mathfrak{M}^2 - \dfrac{1}{2T\Delta}\mathfrak{N},
\end{cases}
$$

où l'on a fait, pour abréger l'écriture,

$$
(12)\quad \begin{cases}
\mathfrak{L} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial q'^2_1}\left(\dfrac{\partial T}{\partial q_2}\right)^2 - 2\dfrac{\partial^2 T}{\partial q'_1 \partial q'_2}\dfrac{\partial T}{\partial q_1}\dfrac{\partial T}{\partial q_2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial q'^2_2}\left(\dfrac{\partial T}{\partial q_1}\right)^2 \\
\quad + 2\dfrac{\partial^2 T}{\partial q'_1 \partial q_1}\dfrac{\partial T}{\partial q'_2}\dfrac{\partial T}{\partial q_2} - 2\dfrac{\partial^2 T}{\partial q'_1 \partial q_2}\dfrac{\partial T}{\partial q'_1}\dfrac{\partial T}{\partial q_2} \\
\quad - 2\dfrac{\partial^2 T}{\partial q'_2 \partial q_1}\dfrac{\partial T}{\partial q'_2}\dfrac{\partial T}{\partial q_1} + 2\dfrac{\partial^2 T}{\partial q'_2 \partial q_2}\dfrac{\partial T}{\partial q'_1}\dfrac{\partial T}{\partial q_1} \\
\quad + \dfrac{\partial^2 T}{\partial q^2_1}\left(\dfrac{\partial T}{\partial q'_2}\right)^2 - 2\dfrac{\partial^2 T}{\partial q_1 \partial q_2}\dfrac{\partial T}{\partial q'_1}\dfrac{\partial T}{\partial q'_2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial q^2_2}\left(\dfrac{\partial T}{\partial q'_1}\right)^2, \\
\mathfrak{L}_1 = -\dfrac{\partial^2 T}{\partial q'_1 \partial q'_2}\dfrac{\partial T}{\partial q_2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial q'^2_2}\dfrac{\partial T}{\partial q_1} - \dfrac{\partial^2 T}{\partial q'_2 \partial q_1}\dfrac{\partial T}{\partial q'_2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial q'_2 \partial q_2}\dfrac{\partial T}{\partial q'_1}, \\
\mathfrak{L}_2 = \dfrac{\partial^2 T}{\partial q'^2_1}\dfrac{\partial T}{\partial q_2} - \dfrac{\partial^2 T}{\partial q'_1 \partial q'_2}\dfrac{\partial T}{\partial q_1} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial q'_1 \partial q_1}\dfrac{\partial T}{\partial q'_2} - \dfrac{\partial^2 T}{\partial q'_1 \partial q_2}\dfrac{\partial T}{\partial q'_1}, \\
\mathfrak{M} = \dfrac{\partial T}{\partial q'_1}\dfrac{\partial U}{\partial q_2} - \dfrac{\partial T}{\partial q'_2}\dfrac{\partial U}{\partial q_1}, \\
\mathfrak{N} = \left(\dfrac{\partial T}{\partial q'_1}\right)^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial q^2_2} - 2\dfrac{\partial T}{\partial q'_1}\dfrac{\partial T}{\partial q'_2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} + \left(\dfrac{\partial T}{\partial q'_2}\right)^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial q^2_1}.
\end{cases}
$$

§ III.

Application de la théorie précédente au mouvement elliptique des corps célestes.

11. Pour éclaircir la théorie que je viens de présenter, j'en f
l'application au cas très-simple du mouvement elliptique des p
nètes, qui a été déjà l'objet des recherches de quelques géomètres.

Si l'on désigne par q_1 et q_2 deux coordonnées rectangulaires d'u

nète, situées dans le plan même de l'orbite, on pourra poser

$$2T = q_1'^2 + q_2'^2;$$

l'on aura

$$\frac{\partial T}{\partial q_1'} = q_1', \quad \frac{\partial T}{\partial q_2'} = q_2', \quad \frac{\partial T}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial q_2} = 0,$$

s

$$\Delta = 1,$$

$$\mathcal{L} = 0, \quad \mathcal{L}_1 = 0, \quad \mathcal{L}_2 = 0.$$

La formule (11) du § II donne en conséquence la valeur suivante coefficient K :

$$K = \frac{3\left(q_1' \frac{\partial U}{\partial q_2} - q_2' \frac{\partial U}{\partial q_1}\right)^2}{(q_1'^2 + q_2'^2)^2} - \frac{q_1'^2 \frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} - 2q_1' q_2' \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} + q_2'^2 \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}}{q_1'^2 + q_2'^2}.$$

Soient r le rayon vecteur de la planète, e l'excentricité de l'orbite iptique, a le demi-grand axe, et n le moyen mouvement; on aura

$$U = \frac{n^2 a^3}{r},$$

is

$$q_1 q_2' - q_2 q_1' = na^2\sqrt{1 - e^2}, \quad q_1'^2 + q_2'^2 = \frac{n^2 a^2 (2a - r)}{r}.$$

Au moyen de ces formules, l'expression (2) de K se réduit à

$$K = n^2 \frac{a^3}{r^3} - 3n^2 \frac{a^4(1 - e^2)(a - r)}{r^4(2a - r)^2}.$$

12. L'objet que nous avons ici en vue est l'intégration de l'équa-n (10) du § II, savoir :

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} + K\Theta = 0;$$

is, pour exécuter cette intégration, il est nécessaire de transformer uation. Soient v l'*anomalie vraie* de la planète, et ψ l'*anomalie* ie du point de l'ellipse diamétralement opposé au lieu de la pla-e; c'est l'angle ψ qu'il convient de choisir pour variable indépen-

dante. On a, par la théorie du mouvement elliptique ou par les formules (4),

$$(6) \qquad dt = \frac{r^2 dv}{na^2\sqrt{1-e^2}}, \quad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v};$$

on a aussi

$$(7) \qquad 2a - r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\psi},$$

et

$$(8) \qquad \tang\frac{1}{2}v \tang\frac{1}{2}\psi = -\frac{1+e}{1-e};$$

d'où l'on conclut

$$(9) \qquad dv = \frac{2a-r}{r}d\psi, \quad dt = \frac{2ar-r^2}{na^2\sqrt{1-e^2}}d\psi.$$

Cela posé, je ferai

$$(10) \qquad \Theta = \sqrt{2ar-r^2}\,\Omega,$$

d'où il résulte

$$(11) \quad \frac{d^2\Theta}{dt^2} = \frac{n^2a^4(1-e^2)}{2ar-r^2}\left[\frac{1}{\sqrt{2ar-r^2}}\frac{d^2\Omega}{d\psi^2} - \Omega\frac{d^2\dfrac{1}{\sqrt{2ar-r^2}}}{d\psi^2}\right];$$

on trouve d'ailleurs, par les formules précédentes,

$$(12) \quad \sqrt{2ar-r^2}\,\frac{d^2\dfrac{1}{\sqrt{2ar-r^2}}}{d\psi^2} = \frac{(2a-r)^2}{a(1-e^2)r} - \frac{3a(a-r)}{r^2} - 1,$$

et en portant les valeurs que nous venons de trouver dans l'équation en Θ, celle-ci devient

$$(13) \qquad \frac{d^2\Omega}{d\psi^2} + \Omega = 0.$$

Soit ψ_0 la valeur de l'anomalie ψ à l'époque $t = t_0$, limite inférieure de l'intégrale que nous voulons considérer; l'intégrale générale de l'équation (13) sera

$$(14) \qquad \Omega = \frac{\Omega_0}{\sin g}\sin(\psi - \psi_0 + g),$$

Ω_0 et g étant les deux constantes arbitraires introduites par l'intégra-

tion; la première de ces arbitraires est évidemment la valeur de à l'époque t_0. Comme on a

$$(15) \qquad X = na(2a - r)\Omega,$$

si l'on veut revenir au déterminant X, et que l'on désigne par X_0, r_0 les valeurs de X, r pour $t = t_0$, on aura, au lieu de la formule (14),

$$(16) \qquad X = \frac{X_0}{\sin g}\frac{2a - r}{2a - r_0}\sin(\psi - \psi_0 + g).$$

Il est évident qu'on peut toujours ramener l'angle arbitraire g entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, π désignant la demi-circonférence dont le rayon est 1. D'après cela, si g est négatif et égal à $-\gamma$, le temps croissant à partir de t_0, le déterminant X s'annulera pour $\psi = \psi_0 + \gamma$, γ étant $< \frac{\pi}{2}$. Mais si l'on donne à g une valeur positive, X ne s'évanouira qu'à l'instant où l'on aura

$$\psi = \psi_0 + \pi - g.$$

Et, puisque g est arbitraire, on peut lui supposer une valeur aussi petite que l'on voudra, pourvu cependant que cette valeur ne soit pas zéro. Si donc on désigne par $t_0 + \tau$ la valeur du temps t lorsque l'anomalie ψ devient égale à $\psi_0 + \pi$, on pourra assigner aux fonctions X_1, X_2 des valeurs finies qui n'annulent le déterminant X pour aucune valeur de t comprise entre t_0 et t_1, pourvu que l'on ait $t_1 < t_0 + \tau$, et, en conséquence, l'intégrale V sera un minimum. Cette conclusion s'accorde avec les considérations générales que j'ai présentées à la fin du § I.

L'intervalle de temps τ, pendant lequel le principe de la moindre action subsiste certainement d'après mon analyse, répond à un arc d'ellipse qui peut être inférieur, égal ou supérieur à la moitié de l'orbite. L'origine a de cet arc ayant été choisie à volonté, pour avoir son extrémité α il suffit de mener la corde $a\alpha$ par le *deuxième* foyer de l'ellipse, car il est évident que relativement à ce deuxième foyer, pris pour origine, les coordonnées de la planète analogues à r et v sont $2a - r$ et $\psi - \pi$.

13. Si l'on a

$$t_1 = t_0 + \tau, \quad \text{ou} \quad t_1 > t_0 + \tau,$$

le minimum n'a plus lieu. En toute rigueur, cette proposition ne résulte pas de l'impossibilité de déterminer des fonctions X_1, X_2 répondant à un déterminant X qui ne s'annule pas quand t varie de t_0 à t_1; mais on peut l'établir très-simplement par le moyen de nos formules.

Dans le cas qui nous occupe, la formule (61) du § I donne

$$(17) \qquad \delta\Psi - \delta^2 U = \frac{d(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)}{dt} - (\beta_1^2 + \beta_2^2),$$

et l'on a

$$\alpha_1 = X_1\varpi, \quad \alpha_2 = X_2\varpi, \quad \beta_1 = X_1\frac{d\varpi}{dt}, \quad \beta_2 = X_2\frac{d\varpi}{dt}.$$

On a aussi

$$\frac{X}{2T} = \frac{r}{na}\Omega,$$

et, par suite,

$$X_1 = \frac{q'_2 r}{na}\Omega, \quad X_2 = -\frac{q'_1 r}{na}\Omega.$$

Si donc on fait

$$(18) \qquad \Omega\varpi = \theta,$$

il viendra

$$(19) \qquad \alpha_1 = \frac{q'_2 r}{na}\theta, \quad \alpha_2 = -\frac{q'_1 r}{na}\theta,$$

puis, en remplaçant dt par sa valeur tirée de la seconde des formules (9),

$$(20) \qquad \begin{cases} \beta_1 = q'_2\dfrac{a\sqrt{1-e^2}}{2a-r}\left(\dfrac{d\theta}{d\psi} - \theta\dfrac{d\log\Omega}{d\psi}\right), \\ \beta_2 = -q'_1\dfrac{a\sqrt{1-e^2}}{2a-r}\left(\dfrac{d\theta}{d\psi} - \theta\dfrac{d\log\Omega}{d\psi}\right), \end{cases}$$

et, à cause de la seconde des formules (4),

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = na^2\sqrt{1-e^2}\left(\theta\frac{d\theta}{d\psi} - \theta^2\frac{d\log\Omega}{d\psi}\right).$$

On conclut de là, en faisant usage des mêmes formules,

$$\frac{d(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)}{dt} = na^2\sqrt{1-e^2}\left[\frac{d\left(\theta\dfrac{d\theta}{d\psi}\right)}{d\psi} - 2\theta\frac{d\theta}{d\psi}\frac{d\log\Omega}{d\psi} - \theta^2\frac{d^2\log\Omega}{d\psi^2}\right]\frac{d\psi}{dt},$$

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 = na^2\sqrt{1-e^2}\left[\frac{d\theta^2}{d\psi^2} - 2\theta\frac{d\theta}{d\psi}\frac{d\log\Omega}{d\psi} + \theta^2\left(\frac{d\log\Omega}{d\psi}\right)^2\right]\frac{d\psi}{dt};$$

on a d'ailleurs, par la formule (13),

$$\frac{d^2\log\Omega}{d\psi^2}+\left(\frac{d\log\Omega}{d\psi}\right)^2=-1;$$

en sorte que la formule (17), multipliée par dt, devient

$$(21)\quad (\delta\Psi-\delta^2\mathrm{U})dt=na^2\sqrt{1-e^2}\left[\frac{d\left(\theta\frac{d\theta}{d\psi}\right)}{d\psi}-\frac{d\theta^2}{d\psi^2}+\theta^2\right]d\psi.$$

Cette formule ne renferme plus la fonction Ω, et elle coïncide avec celle qu'aurait donnée la formule générale (33) du § I.

Comme on a

$$(q'_2\alpha_1-q'_1\alpha_2)dt=dq_2\delta q_1-dq_1\delta q_2;$$

les formules (19) et (6) donnent

$$\theta=a\sqrt{1-e^2}\,\frac{dq_2\delta q_1-dq_1\delta q_2}{r^2(2a-r)dv};$$

mais, à cause de

$$q_1=r\cos v,\quad q_2=r\sin v,$$

on a

$$dq_2\delta q_1-dq_1\delta q_2=r(\delta r\,dv-dr\,\delta v);$$

donc

$$(22)\qquad \theta=\frac{a\sqrt{1-e^2}}{r(2a-r)}\left(\delta r-\frac{dr}{dv}\delta v\right),$$

ou, à cause de $\frac{\delta v}{dv}=\frac{\delta\psi}{d\psi}$,

$$(23)\qquad \theta=\frac{a\sqrt{1-e^2}}{r(2a-r)}\left(\delta r-\frac{dr}{d\psi}\delta\psi\right).$$

La quantité θ s'annulant aux limites, c'est-à-dire pour $\psi=\psi_0$ et pour $\psi=\psi_1$, la formule (12) du § I et notre formule (21) donneront

$$(24)\qquad \delta^2\mathrm{V}=na^2\sqrt{1-e^2}\int_{\psi_0}^{\psi_1}\left(\frac{d\theta^2}{d\psi^2}-\theta^2\right)d\psi.$$

Cette expression de la variation $\delta^2\mathrm{V}$ subsiste, quelles que soient les limites ψ_0, ψ_1; elle nous permettra de justifier l'assertion que nous avons émise. Si l'on a $\psi_1<\psi_0+\pi$, on pourra poser $\theta=\Omega\varpi$, Ω ayant

la valeur donnée par la formule (14), et l'on ramènera ainsi la formule (24) à la forme suivante :

$$\delta^2 V = na^2\sqrt{1-e^2}\int_{\psi_0}^{\psi_1}\left(\Omega\frac{d\varpi}{d\psi}\right)^2 d\psi,$$

que nous avions d'abord obtenue.

14. Le résultat auquel nous venons de parvenir peut se traduire en un théorème d'analyse qui mérite d'être remarqué, savoir :

Si θ désigne une fonction qui reste continue quand la variable ψ croît de ψ_0 à ψ_1, et qui s'annule pour $\psi = \psi_0$ ainsi que pour $\psi = \psi_1$, l'intégrale

$$\int_{\psi_0}^{\psi_1}\left(\frac{d\theta^2}{d\psi^2} - \theta^2\right)d\psi \tag{25}$$

ne peut jamais être nulle ni négative lorsqu'on a

$$\psi_1 < \psi_0 + \pi,$$

à moins que la fonction θ ne se réduise identiquement à zéro.

J'ajoute que :

1° *Si l'on a*

$$\psi_1 = \psi_0 + \pi,$$

la même intégrale peut être nulle, mais non négative;

2° *Si l'on a*

$$\psi_1 > \psi_0 + \pi,$$

l'intégrale peut être positive, nulle ou négative.

Considérons d'abord le cas de $\psi_1 = \psi_0 + \pi$, et désignons par ε une quantité infiniment petite. L'intégrale (25) pourra se décomposer en deux parties, savoir :

$$\int_{\psi_0}^{\psi_1-\varepsilon}\left(\frac{d\theta^2}{d\psi^2} - \theta^2\right)d\psi + \int_{\psi_1-\varepsilon}^{\psi_1}\left(\frac{d\theta^2}{d\psi^2} - \theta^2\right)d\psi. \tag{26}$$

Comme θ s'annule pour $\psi = \psi_1$ et qu'elle est fonction continue de ψ, elle prendra une valeur infiniment petite pour $\psi = \psi_1 - \varepsilon$; je représenterai cette valeur par $\eta(\psi_1 - \psi_0 - \varepsilon)$ ou $\eta(\pi - \varepsilon)$, et je trans-

formerai la première de nos deux intégrales en posant

$$\theta = \lambda + \eta(\psi - \psi_0), \quad \text{d'où} \quad \frac{d\theta}{d\psi} = \frac{d\lambda}{d\psi} + \eta.$$

Alors l'intégrale (25) ou la somme (26) se trouvera décomposée comme il suit :

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\psi_0}^{\psi_1-\varepsilon} \left(\frac{d\lambda^2}{d\psi^2} - \lambda^2\right) d\psi + 2\eta \int_{\psi_0}^{\psi_1-\varepsilon} \frac{d\lambda}{d\psi}\, d\psi \\ \displaystyle + \int_{\psi_0}^{\psi_1-\varepsilon} [\eta^2 - 2\eta\lambda(\psi - \psi_0) + \eta^2(\psi - \psi_0)^2]\, d\psi \\ \displaystyle + \int_{\psi_1-\varepsilon}^{\psi_1} \left(\frac{d\theta^2}{d\psi^2} - \theta^2\right) d\psi. \end{array} \right.$$

La variable nouvelle λ s'annule pour $\psi = \psi_0$ et pour $\psi = \psi_1 - \varepsilon$; d'ailleurs $\psi_1 - \varepsilon < \psi_0 + \pi$; donc la première partie de la somme (27) ne peut être ni nulle ni négative, mais elle peut être infiniment petite. La deuxième partie est nulle, puisque λ s'évanouit aux limites, et la troisième partie, qui peut avoir un signe quelconque, est infiniment petite, à cause du facteur η qui multiplie tous ses termes. Quant à la dernière partie de la somme (27), elle ne peut être négative que si elle est infiniment petite, puisque θ est infiniment petit entre les limites $\psi_1 - \varepsilon$ et ψ_1. Il résulte de là que la somme (27) ou l'intégrale (25) peut être nulle, mais qu'elle ne saurait être négative.

En particulier l'intégrale (25) sera nulle si l'on prend

$$\theta = c \sin(\psi - \psi_0),$$

c étant une constante arbitraire.

15. Si l'on a $\psi_1 > \psi_0 + \pi$, l'intégrale (25) peut être positive, nulle ou négative; c'est ce qu'il est facile d'établir par un exemple. Soit

$$\theta = c \sin^m\left(\pi \frac{\psi - \psi_0}{\psi_1 - \psi_0}\right),$$

c étant une constante; l'intégrale (25) aura pour valeur

$$c^2 m^2 \frac{\pi^2}{(\psi_1 - \psi_0)^2} \int_{\psi_0}^{\psi_1} \sin^{2m-2}\left(\pi \frac{\psi - \psi_0}{\psi_1 - \psi_0}\right) \cos^2\left(\pi \frac{\psi - \psi_0}{\psi_1 - \psi_0}\right) d\psi$$
$$- c^2 \int_{\psi_0}^{\psi_1} \sin^{2m}\left(\pi \frac{\psi - \psi_0}{\psi_1 - \psi_0}\right) d\psi.$$

Si l'on fait, pour abréger,

$$\int_{\psi_0}^{\psi_1} \sin^{2m}\left(\pi \frac{\psi - \psi_0}{\psi_1 - \psi_0}\right) d\psi = \mathrm{H}_m,$$

on trouvera aisément, en supposant $m > \frac{1}{2}$,

$$\int_{\psi_0}^{\psi_1} \sin^{2m-2}\left(\pi \frac{\psi - \psi_0}{\psi_1 - \psi_0}\right) \cos^2\left(\pi \frac{\psi - \psi_0}{\psi_1 - \psi_0}\right) d\psi = \frac{1}{2m-1} \mathrm{H}_m,$$

et il s'ensuit que l'on a

$$(28) \int_{\psi_0}^{\psi_1} \left(\frac{d\theta^2}{d\psi^2} - \theta^2\right) d\psi = \frac{c^2\pi^2}{(2m-1)(\psi_1 - \psi_0)^2} \mathrm{H}_m (m - m')(m - m''),$$

en posant

$$m' = \left(\frac{\psi_1 - \psi_0}{\pi}\right)^2 - \frac{\psi_1 - \psi_0}{\pi} \sqrt{\left(\frac{\psi_1 - \psi_0}{\pi}\right)^2 - 1},$$

$$m'' = \left(\frac{\psi_1 - \psi_0}{\pi}\right)^2 + \frac{\psi_1 - \psi_0}{\pi} \sqrt{\left(\frac{\psi_1 - \psi_0}{\pi}\right)^2 - 1};$$

il est facile de s'assurer que m' est $> \frac{1}{2}$. La formule (28) montre que l'intégrale

$$\int_{\psi_0}^{\psi_1} \left(\frac{d\theta^2}{d\psi^2} - \theta^2\right) d\psi$$

est positive si l'on prend $m < m'$ ou $m > m''$; elle est nulle si l'on fait $m = m'$ ou $m = m''$; enfin elle est négative si l'on donne à m une valeur comprise entre m' et m''.

Si l'on suppose $\psi_1 = \psi_0 + \pi$, on a $m' = m'' = 1$; alors l'intégrale s'annule pour $m = 1$, et elle est positive pour toute autre valeur de m. Enfin, lorsque $\psi_1 < \psi_0 + \pi$, les quantités m', m'' sont des imaginaires conjuguées, et l'intégrale est constamment positive, ce qui s'accorde avec la proposition du n° 14.

On peut conclure de ces développements que, dans le cas du mouvement elliptique des planètes, le principe de la moindre action ne s'applique pas au delà de la limite que nous avons assignée.

DÉTERMINATION SIMPLE ET RAPIDE D'UNE ÉQUATION DES SURFACES DU SECOND ORDRE CONTENANT SIX POINTS DONNÉS;

PAR AM. MANNHEIM.

Si l'on joint deux points d'une conique à quatre points quelconques de cette courbe, on obtient toujours, comme on sait, deux faisceaux ayant mêmes rapports anharmoniques.

Cette propriété, que l'on peut énoncer de plusieurs manières, est, avec la propriété qui lui est corrélative, le point de départ fondamental de M. Chasles dans son beau traité des coniques.

Je me suis proposé de chercher une propriété analogue relative aux surfaces du second ordre.

Pour y arriver, j'établis d'abord une démonstration de la propriété des coniques citée plus haut, démonstration dans laquelle je ne fais intervenir que cette seule définition des courbes du second ordre : *elles ne rencontrent une droite qu'en deux points*.

En reproduisant, pour ainsi dire, cette démonstration dans le cas des surfaces du second ordre, j'arrive immédiatement à la solution cherchée.

Prenons deux points o et o' sur une ligne du second ordre. Joignons le point o à quatre points a, b, c, m. Joignons le point o' aux mêmes points. Nous allons supposer fixes les points a, b, c et laisser mobile le point m.

Ce point décrira la courbe et peut être considéré, à chaque instant, comme déterminé par l'intersection des rayons om, $o'm$. Sur une droite issue du point o, nous ne devrons trouver qu'un seul point m, en vertu de la définition des lignes du second ordre. Nous voyons ainsi qu'à la droite om ne correspond que la droite $o'm$, et de même à la droite $o'm$ ne correspond que la droite om.

Pour fixer la direction de ces droites, nous les considérerons comme faisant partie des faisceaux ayant pour sommets o et o'.

Appelons r l'un des rapports anharmoniques du faisceau oa, ob, oc, om. De même, appelons r' le rapport anharmonique du faisceau $o'a$, $o'b$, $o'c$, $o'm$, en ayant soin d'établir ce rapport anharmonique comme dans le premier faisceau.

Prenons r et r' comme variables; il résulte d'une remarque précé-

dente qu'à une valeur de r ne correspond qu'une valeur de r' et réciproquement.

L'équation d'une ligne de second ordre, en employant les variables r et r', est donc de la forme

$$Arr' + Br + Cr' + D = o.$$

Nous devons exprimer que les points a, b, c appartiennent à la courbe; lorsque le point m coïncide successivement avec l'un ou l'autre de ces points, r et r' deviennent successivement nuls, infinis ou égaux à l'unité.

Pour que l'équation précédente soit vérifiée, lorsque r et r' sont nuls, elle ne doit pas renfermer de terme indépendant des variables.

Pour être vérifiée par les valeurs infinies de r et r', elle ne doit pas non plus contenir de terme en rr'. L'équation est donc déjà réduite à

$$Br + Cr' = o.$$

Pour que r et r', égaux à l'unité, vérifient cette équation, on doit avoir

$$B + C = o,$$

d'où

$$B = - C.$$

L'équation est, par suite, réduite à

$$r = r'.$$

Cette équation exprime la propriété qu'il s'agissait de démontrer; elle est l'équation la plus simple des lignes du second ordre déterminées par cinq points.

Opérons maintenant de même pour arriver à une équation des surfaces du second ordre, en adoptant cette définition de ces surfaces : *elles ne rencontrent une droite qu'en deux points.*

Prenons trois points o, o', o'' sur cette surface et quatre points a, b, c, m. Par la droite oo' et chacun de ces derniers points faisons passer des plans; de même pour la droite $o'o''$ et la droite oo''.

Nous aurons ainsi trois faisceaux de plans. Si nous imaginons que les trois plans qui contiennent un point mobile m de la surface soient seuls variables, nous pourrons fixer la position de ces plans au moyen de rapports anharmoniques r, r', r'' comptés de la même manière.

Si l'on donne deux de ces rapports, on aura, par suite, la droite d'intersection de deux plans, droite passant par l'un des points o, o' ou o''.

Et, comme sur cette droite on ne doit plus trouver qu'un point de la surface, la relation qui existe entre les trois rapports ne doit donner alors qu'une seule valeur pour le dernier. Cette relation est donc de la forme

$$\mathrm{A}rr'r'' + \mathrm{B}rr' + \mathrm{C}rr'' + \mathrm{D}r'r'' + \mathrm{E}r + \mathrm{F}r' + \mathrm{G}r'' + \mathrm{H} = 0.$$

Comme précédemment, on voit immédiatement qu'elle ne doit contenir ni le terme indépendant ni le terme en $rr'r''$. Elle est donc de la forme

$$\mathrm{B}rr' + \mathrm{C}rr'' + \mathrm{D}r'r'' + \mathrm{E}r + \mathrm{F}r' + \mathrm{G}r'' = 0.$$

En outre, dans cette relation, et pour qu'elle soit vérifiée lorsque r, r', r'' sont égaux à l'unité, *la somme des coefficients doit être nulle.*

De plus, puisque dans le plan $oo'o''$ il y a des points de la surface, *cette équation doit être vérifiée pour les valeurs de* r, r', r'' *correspondant à l'un de ces points.* Ces valeurs sont les rapports anharmoniques des trois faisceaux qu'on obtient en supposant le point m dans le plan $oo'o''$.

L'équation que nous trouvons ainsi est alors l'équation des surfaces du second ordre, qui contiennent les six points donnés o, o', o'', a, b, c. Elle renferme cinq coefficients liés entre eux par deux relations; trois seulement sont donc arbitraires. Ces surfaces du second ordre peuvent donc encore être assujetties à passer par trois nouveaux points.

En terminant, je ferai remarquer que, pour l'étude de certaines courbes ou surfaces de degré supérieur, il peut être utile de considérer les systèmes de coordonnées dans lesquels les variables sont des rapports anharmoniques. Ces systèmes de coordonnées, signalés depuis longtemps par M. Chasles, ne nous paraissent pas avoir assez fixé l'attention des géomètres.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Åstrand (J.-J.). — Indberetning om Bergens Observatorium i Aarene, 1868, 1860 og 1870. Bergen, Giertsen. 30 Sk.

Berger (G.). — Lehre der Perspective. 4 Aufl. Gr. 4°. Leipzig, Scholtze. $\frac{2}{6}$ Thlr.

Foerster (W.). — Populäre Mittheilungen zum astronomischen Theil des königl. preuss. National-Kalenders für 1872. 8°, Berlin, Statist. Bureau. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Friis (F.-R.). — Tyge Brahe. En historisk Fremstilling efter trykte og utrykte Kilder. Med Tyge Brahes Portræt og flere Træsnit i Texten. 390 Sider i 8°. Kjöbenhavn, Gyldendal. 2 Rd. 48 Sk.

Grandi (L.). — Il primo libro di Euclide, o introduzione alla geometria, ad uso dei ginnasi, dei licei e delle scuole tecniche. In-16°, 50 pag. con una tavola. Bergamo, tip. Bolis. 70 c.

Jahrbuch (Berliner astronomisches) für 1873, mit Ephemeriden der Planeten (1)—(112). Herausgegeben von W. Foerster unter Mitwirkung von Powalky. Gr. in-8. Berlin, Dümmler. 3 Thlr.

Junghans (F.). — Ueber Methode und Genauigkeit astronomischer Beobachtungen bei den Alten. Programm des Stadt-Gymnasiums zu Stettin. In-4, 27 S.

Kaiser (F.). — Annalen der Sternwarte in Leiden. 2 Bd. 4°, 2, VII, 223 en 240 bl. met 5 gelith. uitsl. platen in 1 staal gegrav. titelvignet. Haag, Nijhoff. 10 fl.

Klein (H.-J.). — Populäre astronomische Encyklopädie. 1-10. Lfg. Gr. 8°. Berlin, Grieben. à 8 Ngr.

Kursus i den almindelige Navigation, indeholdende : Forberedelse (8 Plader), den terrestriske Del (15 Plader), og den astronomiske Del (30 Plader), med Opgaver til Udfyldning af Skolernes Lærere. Christiania, Malling. 48 Sk.

Mildenberger (W.).—Geometrische Zeichnungen. 75 Blatt. Hoch-4°. Barmen, Klein. 1 $\frac{2}{3}$ Thlr.

Neumann (C.). — Repertorium der Elementar-Mathematik. 1 Thl. Arithmetik. 8°. Dresden, Höckner. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Quetelet (A.). — Histoire des sciences mathématiques chez les Belges. 2e édit. In-8°. Bruxelles, Muquardt. 7 fr. 50 c.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

RICHELOT (F.-J.). — DIE LANDENSCHE TRANSFORMATION IN IHRER ANWENDUNG AUF DIE ENTWICKELUNG DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN. — Königsberg, Verlag von Hubner und Matz, 1868 (¹).

Depuis Jacobi, la théorie des fonctions elliptiques a toujours occupé une large place dans l'enseignement des Mathématiques à l'Université de Kœnigsberg. Le cours de M. Richelot, le successeur de Jacobi, a exercé une influence considérable sur le développement de cette branche de l'analyse, qui a fourni des thèses à la plupart de ses élèves. M. Richelot a pour habitude de varier sans cesse le point de départ de son cours, et d'aborder sa théorie favorite par les chemins les plus divers. Tantôt il s'appuie sur les propriétés des fonctions doublement périodiques (exposées par Jacobi, dès 1829, dans ses premières leçons), tantôt sur la transformation, sur la multiplication, sur les produits infinis, sur les fonctions Θ (que Jacobi prenait pour point de départ dans son cours de 1836), ou sur tel autre principe d'où il est possible de pénétrer au cœur de la théorie. Par malheur, M. Richelot n'a pu se décider à publier cet enseignement si fécond; il a été retenu surtout par le désir d'attendre d'abord l'impression des leçons de Jacobi, laquelle, quoique préparée depuis longtemps par M. Rosenhain, parait avoir rencontré des obstacles imprévus. En attendant, quelques-unes des méthodes de M. Richelot ont passé dans les travaux publiés par ses anciens auditeurs; c'est ainsi que l'on retrouve dans l'ouvrage de M. Durège un procédé exposé par M. Richelot, vers 1842, pour déduire de la transformation indiquée par Landen le développement des fonctions elliptiques en produits infinis. La même transformation peut conduire au développement de ces fonctions en séries, et cette marche est d'autant plus intéressante qu'elle jette, pour ainsi dire, un pont des travaux de Legendre aux idées de Jacobi. Une lettre de M. Schröter, professeur à l'Université de Breslau, a déterminé M. Richelot à livrer à la publicité ce

(¹) RICHELOT, *La transformation de Landen appliquée au développement des fonctions elliptiques*. Kœnigsberg, Hubner et Matz. Brochure in-4° de 60 pages.

En même temps, nous avons

$$u' = \frac{1+k}{2} u, \quad \text{et} \quad \frac{1+k}{2} = \frac{K'}{2K} = \frac{K'_1}{K_1};$$

la même transformation, répétée n fois, conduit à l'argument

$$u^{(n)} = \frac{K_1^{(n)}}{K_1} u,$$

et l'expression de sin am u devient

$$\sin\operatorname{am} u$$
$$= \frac{K_1}{K'_1} \left(\frac{K'_1}{K''_1}\right)^2 \cdots \left(\frac{K_1^{(n-1)}}{K_1^{(n)}}\right)^{2^{n-1}} \prod_{h=0}^{h=2^n-1} \sin\operatorname{am}\left[u^{(n)} + \frac{h K^{(n)}}{2^{n-1}}\right] (\text{mod.}$$

Pour $n = \infty$, on a

$$k^{(n)} = 1, \quad K_1^{(n)} = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{K^{(n)}}{2^{n-1}} = \frac{\pi K}{K_1},$$

et le sin am(mod. 1) devient la tangente hyperbolique. On a ainsi à l'un des produits infinis qui représentent sin am u. Les duits infinis pour cos am u et Δam u s'en déduisent par des tra mations faciles, ou bien on les forme directement, à l'aide relation suivante

$$1 - k^2 \sin^2\operatorname{am} a \sin^2\operatorname{am} u$$
$$= \frac{(1 - k'^2 \sin^2\operatorname{am} a' \sin^2\operatorname{am} u')[1 - k'^2 \sin^2\operatorname{am}(a' + K') \sin^2\operatorname{am}}{\ldots}$$

ou bien $\cos^2 \operatorname{am} u$, en faisant

$$a = K + iK_1, \quad \text{d'où} \quad a' = \tfrac{1}{2}K' + iK'_1;$$

dans les deux cas, $\sin^2 \operatorname{am} a' = \sin^2 \operatorname{am}(a' + K')$, et l'expression commune de $\Delta \operatorname{am} u$ et de $\cos \operatorname{am} u$ devient

$$\frac{1 - k'^2 \sin^2 \operatorname{am} a' \sin^2 \operatorname{am} u'}{\Delta \operatorname{am} u'}.$$

La dérivée logarithmique de $\Delta \operatorname{am} u'$ donne ensuite le développement de $\sin \operatorname{am} u$ en *série* infinie, puisque

$$k \sin \operatorname{am} u = -\frac{d \log \Delta \operatorname{am} u'}{du}.$$

Les séries infinies pour $\cos \operatorname{am} u$ et pour $\Delta \operatorname{am} u$ se déduisent facilement des deux relations

$$\left.\begin{aligned} \frac{2}{1+k} \Delta \operatorname{am} u &= \Delta \operatorname{am} u' + \Delta \operatorname{am}(u' + K'), \\ \frac{2k}{1+k} \cos \operatorname{am} u &= \Delta \operatorname{am} u' - \Delta \operatorname{am}(u' + K'), \end{aligned}\right\} (\operatorname{mod}. k').$$

On a d'ailleurs aussi

$$\frac{d \sin \operatorname{am} u}{du} = -\sin^2 \operatorname{am} u' + \sin^2 \operatorname{am}(u' + K'),$$

et

$$1 + k \sin^2 \operatorname{am} u = \sin^2 \operatorname{am} u' + \sin^2 \operatorname{am}(u' + K');$$

les formules

$$\left.\begin{aligned} \frac{2}{1+k} Z(u) &= Z(u') + Z(u' + K'), \\ \frac{2k}{1+k} \sin \operatorname{am} u &= Z(u') - Z(u' + K'), \end{aligned}\right\} (\operatorname{mod}. k'),$$

qui se déduisent des deux précédentes par une intégration facile, fournissent également le développement de $\sin \operatorname{am} u$, ainsi que celui des intégrales de deuxième espèce. Pour les intégrales de la troisième espèce on aurait la relation

$$\Pi(u, a) = \Pi(u', a') + \Pi(u' + K', a' + K') \quad (\operatorname{mod}. k').$$

M. Richelot montre encore que le même procédé peut fournir le développement de la fonction Θ, de sorte que toute la théorie pourrait être fondée sur la transformation de Landen. Legendre en a tiré un très-bon parti, notamment pour ses méthodes d'approximation; mais il n'a jamais soupçonné toute la portée de la formule du géomètre anglais. S'il avait eu seulement l'idée d'introduire la fonction Z à la place de l'intégrale de deuxième espèce E, il est probable qu'il n'aurait pas laissé tant à faire à Jacobi.

Dans une lettre de M. Schröter, que M. Richelot reproduit, on trouve la remarque que la transformation de Gauss est susceptible d'une application analogue. Elle fournit, en effet, la relation

$$\frac{K}{\sin \operatorname{am} u} = \frac{K^{\circ}}{\sin \operatorname{am} u^{\circ}} + \frac{K^{\circ}}{\sin \operatorname{am}(u^{\circ} + iK'^{\circ}_{1})} \quad (\text{mod. } k^{\circ}),$$

qu'on pourrait écrire

$$\frac{Kk}{K^{\circ}k^{\circ}} \sin \operatorname{am} u = \sin \operatorname{am}(u^{\circ} + \tfrac{1}{2} iK'^{\circ}_{1}) + \sin \operatorname{am}(u^{\circ} - \tfrac{1}{2} iK'^{\circ}_{1}),$$

et ainsi de suite. Ici les modules convergent vers la limite zéro, tandis que la limite des modules ascendants de Landen est l'unité. M. Richelot fait observer, à ce propos, que la transformation de Gauss peut se déduire de celle de Landen à l'aide de la substitution

$$\operatorname{tang} \varphi = i \sin \psi, \quad \operatorname{tang} \varphi' = i \sin \psi',$$

et que d'autres substitutions fournissent encore quatre transformations du second ordre qui pourraient au même titre remplacer la transformation de Landen. M. Richelot donne des tableaux très-commodes pour ces substitutions, qui le conduisent à parler des six classes de Jacobi, et d'un algorithme de substitution que l'on appelle quelquefois *la clef*. Il termine par des considérations intéressantes sur le théorème de Landen et sur la construction géométrique de la transformation qui en dérive.

Nous croyons être utile à nos lecteurs en reproduisant ici les tableaux I et II de M. Richelot réunis en un seul. Chacune des six lignes horizontales peut en remplacer une autre. Pour abréger, nous écrivons

$$\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{cn} u, \quad \operatorname{dn} u,$$

à la place de

$$\text{sinam}(u, k), \quad \text{cosam}(u, k), \quad \Delta\text{am}(u, k).$$

La comparaison des deux premières lignes donne, par exemple,

$$\text{sn}(iu, k_1) = i\frac{\text{sn}\,u}{\text{cn}\,u}, \quad \text{cn}(iu, k_1) = \frac{1}{\text{cn}\,u}, \quad \text{dn}(iu, k_1) = \frac{\text{dn}\,u}{\text{cn}\,u}.$$

En même temps, on voit que le quart de période K de l'argument est remplacé par K_1, la demi-période iK_1 par iK, et q par q_1. La formule

$$\text{sn}(u + K) = \frac{\text{cn}\,u}{\text{dn}\,u}$$

devient, par conséquent,

$$\text{sn}(iu + K_1, k_1) = \frac{\text{cn}(iu, k_1)}{\text{dn}(iu, k_1)} = \frac{1}{\text{dn}\,u},$$

ou bien, ce qui est la même chose,

$$\text{sn}[i(u - iK_1), k_1] = i\frac{\text{sn}(u - iK_1)}{\text{cn}(u - iK_1)} = \frac{1}{\text{dn}\,u}.$$

On peut donc employer pour ces transformations, à volonté, les « périodes de l'argument » ou les « périodes de u ».

	ARGUMENTS.	MODULES complémentaires.		PÉRIODES de l'argument.			FONCTIONS elliptiques.			PÉRIODES de u.	
I.	u	k	k_1	K	iK_1	q	$\text{sn}\,u$	$\text{cn}\,u$	$\text{dn}\,u$	K	iK_1
II.	iu	k_1	k	K_1	iK	q_1	$i\frac{\text{sn}\,u}{\text{cn}\,u}$	$\frac{1}{\text{cn}\,u}$	$\frac{\text{dn}\,u}{\text{cn}\,u}$	$-iK_1$	K
III.	ku	$\frac{1}{k}$	$\frac{ik_1}{k}$	$kK - ikK_1$	ikK_1	q'	$k\,\text{sn}\,u$	$\text{dn}\,u$	$\text{cn}\,u$	$K - iK_1$	iK_1
IV.	$-k_1 u$	$-\frac{ik}{k_1}$	$\frac{1}{k_1}$	$k_1 K$	$-k_1 K + ik_1 K_1$	$-q$	$-k_1\frac{\text{sn}\,u}{\text{dn}\,u}$	$\frac{\text{cn}\,u}{\text{dn}\,u}$	$\frac{1}{\text{dn}\,u}$	$-K$	$K - iK_1$
V.	$-ik_1 u$	$\frac{1}{k_1}$	$-\frac{ik}{k_1}$	$ik_1 K + k_1 K_1$	$ik_1 K$	$-q'$	$-ik_1\frac{\text{sn}\,u}{\text{cn}\,u}$	$\frac{\text{dn}\,u}{\text{cn}\,u}$	$\frac{1}{\text{cn}\,u}$	$-K + iK_1$	$-K$
VI.	iku	$\frac{ik_1}{k}$	$\frac{1}{k}$	kK_1	$ikK + kK_1$	$-q_1$	$ik\frac{\text{sn}\,u}{\text{dn}\,u}$	$\frac{1}{\text{dn}\,u}$	$\frac{\text{cn}\,u}{\text{dn}\,u}$	$-iK_1$	$K - iK_1$

R. R.

PUBLICATIONS FINLANDAISES.

I.

NEOVIUS (V.). — Lärobok i minsta qvdrat-metoden. Åbo, 1870. In-8°, 109 p.

Tel est le titre d'un petit Traité en suédois sur la méthode des moindres carrés. Il est divisé en quatre chapitres : le premier est consacré à des recherches théoriques sur la probabilité des erreurs d'observation ; le second enseigne à trouver les valeurs les plus probables des inconnues qui entrent dans un système d'équations linéaires, dont le nombre est plus grand que celui des inconnues ; le troisième chapitre traite de la précision des observations et des erreurs probables des valeurs que l'on en déduit ; dans le quatrième, enfin, l'auteur donne des règles pratiques, des exemples et des modèles de calcul qui servent à mieux éclairer les applications de la méthode.

Le travail est fait avec soin, et peut servir de guide pratique pour les amateurs des sciences d'observations. Mais il semble que l'auteur n'ait pas eu occasion de consulter les Mémoires originaux et classiques de Gauss ; autrement, il aurait mis plus de rigueur dans les considérations théoriques. Par exemple, il n'aurait pas confondu, comme il le fait, la probabilité d'une erreur v avec la probabilité que l'erreur est comprise entre deux limites infiniment voisines v et $v + dv$. Mais, sans entrer dans les détails de l'exposition, nous dirons seulement un mot sur l'hypothèse qui lui a servi de point de départ.

Suivant l'exemple de M. Hagen, l'auteur admet que l'erreur qui affecte une observation quelconque est composée d'un nombre infini d'erreurs élémentaires infiniment petites, égales entre elles, mais pouvant être indistinctement positives ou négatives. C'est là une hypothèse que nous ne saurions approuver, d'abord parce qu'elle n'est justifiée par aucun raisonnement tant soit peu plausible, et ensuite parce qu'elle n'a pas même l'avantage formel de suffire à elle seule pour en déduire la loi de la probabilité des erreurs. C'est ce que nous allons montrer par l'analyse suivante :

Soit α la grandeur absolue de chacune des erreurs élémentaires, $2m$ leur nombre total, et considérons une erreur positive v, composée de $m + n$ éléments positifs, et de $m - n$ éléments négatifs $(n < m)$,

en sorte que $v = 2n\alpha$. Le nombre des combinaisons qui produisent l'erreur totale v sera

$$\frac{(2m)!}{(m-n)!(m+n)!},$$

et le nombre de celles qui donnent l'erreur zéro,

$$\frac{(2m)!}{m!\,m!}.$$

En désignant par $\varphi(v)$ la probabilité de l'erreur v, on aurait, par conséquent,

$$\frac{\varphi(v)}{\varphi(0)} = \frac{m!\,m!}{(m-n)!(m+n)!} = \frac{(m-n)(m-n+2)\ldots m}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)},$$

ou bien

$$\frac{\varphi(v)}{\varphi(0)} = \left(1-\frac{n}{m+1}\right)\left(1-\frac{n}{m+2}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{m+n}\right).$$

Il s'agit d'examiner ce que devient cette expression pour une valeur déterminée de v, lorsque α diminue, et qu'en même temps m et n augmentent indéfiniment. Observons d'abord que, chacun des facteurs étant $> 1 - \frac{n}{m}$ et $\leqq 1 - \frac{n}{m+n}$, le produit sera compris entre

$$\left(1-\frac{n}{m}\right)^n \quad \text{et} \quad \frac{1}{\left(1+\frac{n}{m}\right)^n}.$$

Si le rapport $\frac{n}{m}$ tendait vers une limite finie > 0, ces deux expressions auraient pour limite zéro, et l'on aurait constamment $\varphi(v) = 0$, résultat inadmissible. Il faut donc admettre que $\frac{n}{m}$ tend vers zéro. Désignons par V la plus grande erreur possible, c'est-à-dire $V = 2m\alpha$; on aur

$$\frac{n}{m} = \frac{V}{v},$$

et puisque v est constant, il faudra que V tende vers l'infini à mesure

que α diminue. Posons $\frac{n}{m} = \beta$, de sorte que

$$n = \frac{v^2}{2V\alpha\beta},$$

et soit k la limite du produit $V\alpha$, qui est indépendant de v; il est facile de voir que les expressions précédentes auront, l'une comme l'autre, pour limite $e^{-\frac{v^2}{2k}}$, et que l'on aura, par suite, en désignant par h^2 l'inverse de $2k$,

$$\frac{\varphi(v)}{\varphi(0)} = e^{-h^2v^2},$$

ce qui est bien la formule fondamentale de la méthode des moindres carrés. Mais pour y arriver, en partant de l'hypothèse de Hagen, on a été obligé d'admettre, comme nous l'avons vu, qu'il existe, entre l'erreur maximum V et l'erreur élémentaire α, une connexion telle que leur produit $V\alpha$ tende vers une limite finie différente de zéro. C'est là une supposition purement arbitraire, sans laquelle la voie suivie par l'auteur ne conduirait à rien.

II.

BONSDORFF (E.-V.). — DEN GEOMETRISKA THEORIE FÖR COMPLEXA FUNKTIONER.... Théorie géométrique des fonctions complexes, appliquée à l'intégrale elliptique du premier ordre. Thèse de doctorat. Helsingfors, 1870. In-4°, 65 p., 1 planche.

C'est un essai pour appliquer spécialement aux fonctions elliptiques la méthode suivie par Riemann dans son Mémoire sur la théorie des fonctions abéliennes (*Journal de Crelle*, t. 54), ainsi que par Prym dans ses recherches sur les fonctions ultra-elliptiques. Après avoir donné un aperçu, trop rapide pour être suffisamment clair, des artifices ingénieux par lesquels Riemann est parvenu à représenter distinctement les valeurs multiples d'une fonction algébrique quelconque ou de son intégrale, et les transformations que l'on peut faire subir à une telle surface pour la rendre simplement connexe (*einfach zusammenhängend*), l'auteur s'occupe particulièrement des séries exponentielles que Riemann a désignées par le symbole ϑ, et il cherche les relations qui existent entre celles-ci et les fonctions ana-

logues Θ de Jacobi. Les unes comme les autres peuvent servir à calculer les fonctions elliptiques, dont les propriétés fondamentales et les développements en produits infinis sont exposés dans la dernière partie de l'ouvrage.

III.

MELLBERG (E.-J.). — Om ytspänningen hos vätskor.... Sur la tension superficielle des liquides. Thèse de doctorat, 1871. In-8°, 50 p.

Suivant les idées de l'auteur, qui s'accordent de très-près avec celles de M. Dupré, la tension superficielle est due à l'effet combiné de deux forces opposées, l'attraction et la répulsion, qui agissent entre les molécules, et dont les sphères d'activité sont différentes. Cette tension est la même en chaque point d'une surface, quelle que soit la courbure; mais elle varie avec la température et la nature du fluide. L'auteur rend compte d'une série d'expériences qu'il a faites, en se servant d'une balance hydrostatique pour déterminer la tension superficielle d'une vingtaine de fluides différentes. Ensuite, il examine quelques phénomènes rapportés par M. Van der Mensbrugghe, et qui s'expliquent par un changement partiel de la tension.

L. Lindelöf.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

ZEITSCHRIFT für Mathematik und Physik (1).

T. XV, cahier 3-6, 1870.

Lommel (E.). — *Sur l'application des fonctions de Bessel à la théorie de la diffraction.* (29 p.)

On sait qu'il existe deux classes de phénomènes de diffraction, que l'auteur distingue par les noms de *phénomènes de Fresnel* et de *phénomènes de Fraunhofer.* Les premiers sont produits par des ondes lumineuses généralement *sphériques,* qui, par leurs interférences,

(1) Voir *Bulletin,* t. I, p. 59 et 275.

produisent un effet de diffraction réel ou *objectif*. Le calcul de ces phénomènes, dont Fresnel a donné les lois, dépasse les forces actuelles de l'analyse. Les phénomènes de la seconde classe, observés par Fraunhofer, et produits par un système *plan* d'ondes lumineuses, donnent lieu à des apparences virtuelles ou *subjectives*. Leur théorie analytique est beaucoup plus simple, et M. Lommel a montré que, dans les cas les plus importants, les expressions de l'intensité peuvent être représentées au moyen des fonctions de Bessel. Le Mémoire est terminé par des Tables donnant les valeurs numériques de plusieurs formules dépendant de ces fonctions.

Bösser (F.). — *Théorie des lignes et des surfaces caustiques dans son développement historique*. (37 p.)

L'auteur passe en revue les travaux des divers géomètres qui, depuis Descartes, ont contribué à la longue élaboration de cette théorie, à laquelle les travaux des Gergonne, des Malus, des Quetelet ont fini par donner toute la généralité et la clarté dont elle était susceptible.

Schlömilch (O.). — *De la différentiation multiple sous le signe d'intégration*. (2 p.)

L'auteur signale l'inexactitude d'une formule donnée par O. Werner dans le tome XVIII des *Archives de Grunert*, et admise depuis dans plusieurs traités. L'erreur provient d'une confusion entre les dérivées partielles et les dérivées totales, confusion qui eût été moins facile si l'on eût distingué dès l'origine les deux espèces de différentiation par les caractéristiques différentes ∂ et d.

Kurz (A.). — *Calcul des faisceaux hyperboliques obscurs dans les cristaux à deux axes*. (7 p.)

Schlömilch (O.). — *Note sur la rectification des courbes*. (1 p.)

Schlömilch (O.). — *Attraction d'un ellipsoïde sur un point extérieur*. (1 p.)

Kinkelin (H.). — *Calcul de la Pâque chrétienne*. (12 p.)

Démonstration des célèbres formules pascales de Gauss.

Kötteritzsch (Th.). — *Sur la résolution d'un système d'un nombre infini d'équations linéaires* (2e article). (49 p.)

Dans un précédent article ([1]), l'auteur a indiqué les principes généraux qui conduisent à la solution du problème. Actuellement, il s'occupe d'en établir les conditions de possibilité; il indique des transformations propres à simplifier la question, et donne les moyens d'exprimer la valeur de chaque inconnue par une fraction continue. Par l'introduction de la *fonction inverse* des coefficients, il ramène les systèmes d'équations à d'autres où la *fonction* des coefficients est plus simple. Il termine par des applications à la résolution de systèmes particuliers d'équations, au développement et à la sommation des séries et des fractions continues, et indique l'importance de cette théorie dans certains problèmes de physique.

MOHR (Dr.). — *Sur la cause de l'inégale conductibilité des gaz pour la chaleur*. (8 p.)

MOHR (Dr.). — *Calcul de la quantité de chaleur nécessaire pour échauffer et pour dilater l'eau, ou de la quantité de chaleur sous pression constante et sous volume constant*. (6 p.)

ENNEPER (A.). — *Sur la surface développable circonscrite à une surface donnée*. (7 p.)

L'auteur a établi (t. XIII de ce Journal, p. 328) une relation simple entre les distances des points de contact P, P_1 de deux surfaces avec la surface développable circonscrite, au point correspondant de l'arête de rebroussement, les mesures de la courbure aux points P, P_1, et les rayons de courbures des sections normales des deux surfaces menées par la ligne PP_1. Cette relation peut se déduire d'une autre équation fondée sur la considération d'une seule surface et de la développable circonscrite.

KRUMME. — *Le parallélogramme des mouvements dans la théorie des ondes*. (4 p.)

HEGER (R.). — *Remarque sur la détermination des limites de l'aplatissement du sphéroïde terrestre* $\left(\frac{1}{304} \text{ et } \frac{1}{578}\right)$, *d'après la nutation*. (3 p.)

Le calcul par lequel Laplace a obtenu ces limites (*Mécanique céleste*, livre V) ne peut être exact; car on peut établir très-simplement

([1]) Voir *Bulletin*, t. I, p. 275.

que, dans deux sphéroïdes égaux, composés chacun de couches homogènes semblables, les rapports des trois moments d'inertie principaux sont les mêmes, quelle que soit la loi de la variation de la densité pour chacun des sphéroïdes.

Grelle (Fr.). — *Intégration des équations différentielles ordinaires et partielles par la méthode de la séparation des symboles d'opération.* (14 p.)

Le calcul des opérations, dont Carmichael a donné une exposition complète dans son ouvrage intitulé : *A Treatise on the Calculus of Operations* (¹), ne peut être employé avec sûreté qu'autant que l'on a vérifié l'exactitude des résultats auxquels il conduit. C'est cette vérification que l'auteur a eu pour objet d'exécuter relativement aux équations différentielles ordinaires et partielles à coefficients constants.

Graffweg (W.). — *Sur les lentilles qui donnent une image mathématiquement exacte d'un point rayonnant de la lumière homogène.* (14 p.)

Hess (Em.). — *Sur la représentation des fonctions uniformes et symétriques des racines simultanées de deux équations algébriques.* (10 p.)

Étant données deux équations algébriques

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = 0,$$

admettant ω systèmes de racines communes (x_i, y_i), les fonctions de la forme $\Sigma x_i^p y_i^q$ s'expriment simplement par des sommes de produits de certains déterminants, dont les éléments sont formés au moyen des coefficients des équations proposées; ou bien encore, on peut les exprimer par voie récurrente, sous forme de sommes de produits de déterminants de même nature, multipliés par des fonctions analogues d'ordres inférieurs.

Weyr (Em.). — *Des systèmes de points sur les courbes du troisième ordre.* (17 p.)

Schröder (E.). — *Quatre problèmes combinatoires.* (16 p.)

Hochheim. — *Courbes tangentielles des sections coniques.* (4 p.)

Sur chaque tangente d'une conique, on prend un point situé à une distance t de l'ordonnée correspondante à la tangente. Trouver le lieu de ces points.

(¹) London, 1855; in-8°.

Krey (H.). — *Remarque sur la résolubilité algébrique des équations.* (3 p.)

Weyr (Em.). — *Sur la géométrie des courbes du troisième ordre.* (5 p.)

Heger (R.). — *Formules fondamentales de la géométrie analytique du plan en coordonnées homogènes.* (38 p.)

§ I. Coordonnées homogènes du point et de la droite dans le plan. § II. Équation de la droite et du point en coordonnées homogènes du point et de la droite. § III. Problèmes divers sur le point et la droite. § IV. Théorèmes sur les courbes du second ordre.

Most (R.) — *Sur l'équation linéaire du $m^{\text{ième}}$ ordre*

$$\sum_{r=0}^{r=m} (a_r + b_r x^\rho) x^{m-r} y^{(m-r)} = \sum_{r=0}^{r=p} c_r x^{r\rho}.$$

(24 p.)

Veltmann (W.). — *La théorie des tourbillons fluides de Helmholtz.* (24 p.)

L'auteur reprend et complète les critiques adressées à ce système par M. Bertrand, en 1868.

Grube (F.). — *Sur deux intégrales définies.* (3 p.)

Il s'agit de réduire aux intégrales elliptiques les intégrales

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1 - nx^2}}{\sqrt{1 - x^2}} \log(1 - nx^2)\, dx$$

et

$$\int_0^1 \frac{\log(1 - nx^2)\, dx}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - nx^2}},$$

déjà traitées par d'Alembert.

Enneper (A.). — *Sur les loxodromies des surfaces coniques.* (8 p.)

Stahlberger (E.). — *Sur le calcul de la température moyenne à l'aide des températures maximum et minimum.* (4 p.)

Reitlinger (E.) et Kuhn (M.). — *Sur les spectres des électrodes négatives et des tubes de Geissler qui ont longtemps servi.* (8. p.)

WEYR (Em.). — *Rapport des courbures d'un faisceau de courbes en un sommet.* (5 p.)

CLAUSIUS (R.) — *Remarques sur deux Mémoires de M. Mohr.* (1. p.) Il s'agit des deux Mémoires indiqués ci-dessus, p. 139.

GIORNALE DI MATEMATICHE.

T. IX, janvier-juin 1871 [1].

BATTAGLINI (G.). — *Sur les formes binaires de degré quelconque.* (29 p.; it.)

L'objet de ce Mémoire est la représentation géométrique de quelques-uns des invariants et des covariants des formes binaires de degré quelconque. Il est divisé dans les articles suivants :

1° Définition du *système binaire* et sa représentation la plus simple au moyen des formes géométriques élémentaires de première espèce. Représentation géométrique d'une forme binaire *pure* ou *mixte*. Définition de la transformation linéaire du système binaire et des *concomitants* et *plexo-concomitants* (invariants et covariants) d'un nombre quelconque de formes binaires pures ou mixtes entre des variables *congrédientes*. Expression du plus simple parmi les concomitants et les plexo-concomitants du système binaire.

2° Propriétés des *éléments harmoniques* des divers ordres d'un élément par rapport au groupe d'éléments déterminé par une forme binaire.

3° Représentation géométrique des *émanants* purs et mixtes d'une forme binaire. Le plus simple des émanants mixtes conduit au concept d'un groupe d'élément *conjugués harmoniques* par rapport à une forme binaire, et à la signification géométrique de l'annulation de l'invariant quadratique, ou *harmonisant* de cette même forme.

4° Harmonisants des émanants, des covariants *associés* et des autres concomitants des formes binaires.

5° Formes *syzygétiques* avec un groupe de plusieurs formes binaires du même degré, et *involutions multiples* des divers degrés, auxquelles ces groupes donnent lieu.

---

[1] Voir *Bulletin*, t. I, p. 219, 286.

6° Émanants et éléments multiples des involutions.

7° Signification géométrique de l'annulation du *catalecticant* ou du *plexo-catalecticant* d'un certain ordre d'une forme binaire. Représentation géométrique des *catalecticants* simples ou *bordés* des émanants.

8° *Canonisants* des formes binaires, qu'elles soient de degré impair ou de degré pair. Représentation géométrique des canonisants et du *lambdoïde*.

Tognoli (O.). — *Sur quelques questions générales de la théorie des complexes, résolues par la méthode géométrique pure.* (12 p.; it.)

L'auteur se propose de déterminer le degré de certains complexes provenant de la considération de droites qui coupent deux surfaces d'ordres donnés, de manière qu'entre les distances d'un nombre donné de points analogues pour la seconde surface, une certaine relation ait lieu. Après avoir résolu la question générale, l'auteur en fait l'application à divers problèmes.

Arzelà (C.). — *Sur quelques applications d'une formule de Jacobi.* (5 p.; it.)

Étant donné un système de n équations entre n variables, si S est le déterminant fonctionnel relatif, et $F(x, y, z, \ldots, u)$ une fonction algébrique arbitraire, de degré inférieur à S, on a

$$\sum \frac{F(x, y, z, \ldots, u)}{S} = 0,$$

la somme s'étendant à tous les systèmes de solutions communes aux équations données. Partant de ce théorème de Jacobi, et considérant un système de trois équations, l'auteur en déduit quelques propriétés relatives aux points communs de trois surfaces algébriques et à leurs plans tangents en ces mêmes points.

Battaglini (G.). — *Note sur les axes principaux.* (8 p.; it.)

En appelant *moment d'inertie d'une masse par rapport à un plan* la somme des produits de chaque élément de la masse par le carré de sa distance à ce plan, l'auteur parvient à une série de surfaces homofocales du second degré, dont chacune est l'enveloppe des plans correspondants à un moment d'inertie donné, et il en déduit facilement la position et les propriétés des axes principaux d'inertie relatifs aux divers points de l'espace.

ques-uns des invariants, des covariants et des contravariants des formes ternaires de degré quelconque. Il sera continué dans les fascicules suivants du *Giornale*. La première partie contient les articles suivants : 1° Concept abstrait du continu à deux dimensions ou système ternaire (exposé aussi dans le Mémoire de l'auteur *Sur les formes ternaires quadriques*), et sa représentation géométrique la plus simple. Définition des formes pures et mixtes, et leurs expressions *ombrales*. Transformation linéaire opérée sur les variables cogrédientes et contragrédientes. Caractère analytique des concomitants et expressions fondamentales de ces formes invariantives. 2° Conditions pour les éléments multiples d'une forme. Discriminant. Forme *conjointe* d'une autre forme; expressions ombrales de la résultante (contravariant combinant) de trois formes. 3° Propriété des systèmes harmoniques des divers ordres (polaires) d'une forme ternaire par rapport à un élément. Ordre, classe et genre de deux formes ternaires conjointes. 4° Émanants d'une forme ternaire, et leurs formes conjointes.

Solutions de quelques questions proposées dans l'*Educational Times* et dans les *Nouvelles Annales*; par Cassani (P.) (3 p.).

Dr Hirst. — *Discours sur Euclide, comme livre de texte.* (8 p.)

Traduction du Compte rendu de la première séance et du discours d'ouverture de l'*Association for the Improvement of Geometrical Teaching*.

Tognoli (O.). — *Note sur le nombre des surfaces d'un réseau qui ont un contact triponctuel avec la courbe d'intersection de deux surfaces algébriques.* (15 p.; it.)

L'auteur, après avoir déterminé le nombre demandé, se sert du résultat obtenu pour établir deux théorèmes sur la courbe d'intersection de deux surfaces et sur les points communs à trois surfaces.

G. B.

BULLETTINO di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche (1).

T. III, 1870.

Siacci (F.). — *Sur le théorème du comte de Fagnano.* (26 p.; it.)

(1) Voir *Bulletin*, t. I, p. 98.

Le but de l'auteur de ce Mémoire est de rechercher : 1° de quelle manière ce théorème fut énoncé et démontré par le comte de Fagnano; 2° à quelle époque précise il le publia; 3° quelle place occupe ce théorème dans la succession historique des divers travaux publiés vers le même temps, concernant les intégrales elliptiques; 4° les diverses formes sous lesquelles il a été présenté par les divers auteurs.

BONCOMPAGNI (B.). — « *Mémoire concernant le marquis Giulio-Carlo de' Toschi di Fagnano, jusqu'au mois de février de l'année* 1752. » *Envoyé par le P. Don Angelo Calogerà au comte Giovanni Maria Mazzuchelli, et tiré du manuscrit du Vatican*, n° 9281. (20 p.; it.)

GENOCCHI (A.). — *Notice sur quelques écrits relatifs à l'addition des intégrales elliptiques et abéliennes*. (20 p.; it.)

FRIEDLEIN (G.). — *Les signes numériques et le calcul élémentaire chez les Grecs et les Romains, et chez les chrétiens d'Occident, depuis le* VII[e] *jusqu'au* XIII[e] *siècle* [1]. (Analyse par J. HOÜEL). (24 p.; fr.)

SÉDILLOT (L.-Am.). — *Les professeurs de Mathématiques et de Physique générale au Collège de France*. (Suite et fin; 64 p.; fr.)

Quatrième période : 1774-1869.

PALERMO (F.). — *Sur la vie et les travaux de Giovanni-Battista Amici*. (62 p.; it.)

GOVI (G.). — *Sur trois Lettres de Galilée, tirées des archives des Gonzague*. (15 p.; it.)

GOVI (G.). — *Recherches historiques sur l'invention du niveau à bulle d'air*. (15 p.; fr.)

Les recherches faites à la Bibliothèque de Florence, par M. Govi, établissent que cet instrument fut inventé, en 1661, par *Melchisédec Thévenot*.

MARTIN (Th.-H.). — *Sur un ouvrage faussement attribué à Aristarque de Samos*. (4 p.; fr.)

VORSTERMAN VAN OIJEN (G.-A.). — *Quelques arpenteurs hollandais*

---

[1] *Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer, und des christlichen Abendlandes vom* 7. *bis* 13. *Jahrhundert, von D*[r]. G. FRIEDLEIN, *Rector in Hof. Mit eilf Tafeln*. Erlangen, Verlag von Andreas Deichert; 1869. In-8°, VI-164 S.

de la fin du XVIe *et du commencement du* XVIIe *siècle, et leurs instruments* (54 p., 6 pl.; fr.)

STIATTESI (A.). — *Sur l'Arithmétique; dissertation historico-critique.* (20 p.; it.)

SCHERING (E.) (traduit par P. MANSION). — *Notice biographique sur Bernhard Riemann.* (20 p.; fr.)

ATTI DELL' ACCADEMIA PONTIFICIA DE' NUOVI LINCEI, compilati dal Segretario. Roma, tipografia delle Scienze matematiche et fisiche (¹).

T. XXII, 1869.

CHELINI (D.). — *Nouvelle démonstration élémentaire des propriétés fondamentales des axes conjugués de rotation et des axes permanents.* (8 p.)

Démonstration fondée sur le principe qui donne l'axe central dans un système de forces.

TORTOLINI (B.). — *Solution d'un problème relatif aux équations du troisième et du quatrième degré.* (3 p.)

Le problème consiste à trouver une équation complète du troisième degré, dont le dernier terme représente le discriminant d'une équation générale du quatrième degré.

TORTOLINI (B.). — *Sur un nouveau système de variables, introduites par M. O. Bonnet dans l'étude des propriétés des surfaces courbes.* (16 p.)

L'auteur montre comment les nouvelles variables, introduites par M. O. Bonnet pour fixer la position du plan tangent d'une surface courbe (*Journal de Liouville*, 2e série, t. V, p. 153; 1860) exigent nécessairement la considération des surfaces appelées par M. W. Roberts *surfaces dérivées* de système *positif* ou *négatif*. L'auteur compare certains résultats trouvés par M. Bonnet, avec les résultats analogues trouvés par lui-même et exposés dans ses précédents Mémoires.

(¹) Voir *Bulletin*, t. II, p. 19 et 82.

T. XXIII, 1870.

Giorgi (F.). — *Sur le calcul des quantités de terre à remuer dans les devis des travaux d'architecture.* (8. p.)

Volpicelli (P.). — *Conditions algébriques pour obtenir la compensation thermométrique dans les baromètres, pour un quelconque des systèmes aptes à les produire.* (29 p.)

Mainardi (G.). — *Réflexions sur divers sujets.* (Suite; 9 p.)

L'auteur fait voir comment, de certaines formules contenues dans un Mémoire de lui *Sur la théorie générale des surfaces* (1), on peut déduire certains résultats, obtenus par Bour (2) et par O. Bonnet (3). En outre, il fait observer que toutes les équations particulières données par ces auteurs sont du nombre des équations aux dérivées partielles simultanées dont le développement dépasse les forces actuelles de l'analyse; tandis que les deux équations particulières, indiquées dans son Mémoire, et relatives aux lignes de courbure principale, se développent par de simples quadratures.

Volpicelli (P.). — *Formules générales pour la variation du ton produite par le mouvement du corps sonore et celui de l'observateur; corollaires de cette formule et considérations sur la manière dont on croit pouvoir expliquer le déplacement des raies de Fraunhofer, dans le spectre du Soleil, en raison de son mouvement rotatoire.* (12 p.)

MONTHLY Notices of the Royal Astronomical Society of London (4).

T. XXX, 1870.

Airy (G.-B.). — *Sur un oculaire destiné à corriger l'effet de la dispersion atmosphérique.*

On sait que la dispersion atmosphérique a pour effet d'élever un

---

(1) *Giornale del R. Istituto Lombardo*, t. X, 1857.

(2) *Journal de l'École Polytechnique*, t. XXII, 1862, 39e cah., p. 263.

(3) *Ibid.*, t. XXV, 1867, 42e cah., p. 31-32.

(4) *Notices mensuelles de la Société royale d'Astronomie de Londres.* Strangeways and Walden; Castle Street, Leicester Square, à Londres.

peu les images des objets célestes. Après quelques essais faits en vue de corriger cette erreur, MM. Airy et W. Simms sont arrivés, chacun de leur côté, à la disposition simple suivante.

L'oculaire est formé par une lentille plane-convexe, un peu plus large que ne l'exige la vision télescopique, et le porte oculaire est terminé par une surface convexe, à l'intérieur de laquelle tourne, à frottement un peu dur, la lentille précédente.

Il en résulte que l'oculaire présentera toujours aux rayons lumineux venant de l'objectif la même surface sphérique dans la même position relative; tandis qu'au contraire la face plane tournée vers l'œil, normale à l'axe de la lunette dans une position de la lentille, pourra prendre, par rapport à cette ligne, un grand nombre d'inclinaisons différentes : dans le premier cas, l'oculaire fonctionnera à la façon ordinaire; dans tous les autres, il fera l'office d'un prisme d'angle variable et corrigeant l'effet de la dispersion.

Une pareille disposition, n'augmentant pas le nombre de verres de la lunette et ne changeant pas les corrections ordinaires de l'aberration de sphéricité, doit être adaptée à toutes les lunettes destinées à des recherches délicates.

Herschel (J.-F.-W.). — *Septième catalogue d'étoiles doubles observées à Slough, de* 1823 *à* 1828.

Ce catalogue donne les positions de 84 étoiles doubles qu'on n'avait point encore observées.

De la Rue, Stewart et Lœwy. — *Résumé des observations de taches solaires faites avec le photohéliographe de l'Observatoire de Kew, pendant l'année* 1869.

L'année 1869 a été caractérisée par une tendance remarquable des groupes de taches à apparaître pour ainsi dire par trains successifs dans deux zones étroites et bien définies situées de chaque côté de l'équateur solaire.

Cayley (A.). — *Sur la détermination de l'orbite d'une planète, au moyen de trois observations.*

Le but de l'auteur est de résoudre géométriquement ce problème. Au moyen de trois observations, nous connaissons trois rayons donnés de la conique dont nous avons déjà le foyer (le Soleil) S. Le problème est donc de trouver le plan de l'orbite, de telle sorte que,

dans l'orbite déterminée par le moyen du *trisecteur* précédent (c'est ainsi qu'on nomme l'ensemble de trois rayons de l'orbite partis du foyer), les intervalles des temps de passage à ces trois positions sur l'orbite puissent avoir les valeurs observées; ou, en d'autres termes, que les quotients des aires orbitaires par la racine carrée du *latus rectum* puissent avoir des valeurs données.

Si, au lieu du plan de l'orbite, nous considérons l'*axe de l'orbite*, c'est-à-dire la perpendiculaire menée au plan de l'orbite par le point S, ou mieux encore le *pôle de l'orbite*, intersection de l'axe par une sphère décrite de S comme centre, alors, à une position donnée du pôle de l'orbite correspond une orbite déterminée; et le problème revient à trouver, pour le pôle de l'orbite, une position telle, que, dans l'orbite correspondante, les intervalles des époques de passage puissent avoir les valeurs indiquées. Il est clair que la position du pôle de l'orbite peut être obtenue par l'intersection de deux courbes sphériques, qui sont les lieux des positions que doit occuper successivement le pôle de l'orbite, pour que les temps de passage entre le premier et le second point d'une part, entre le second et le troisième de l'autre, aient des valeurs données.

Le Mémoire de M. Cayley, publié dans les *Memoirs of the Royal Astronomical Society* (t. XXXVIII, 1871), est entièrement consacré à la discussion et au tracé de ces lieux géométriques.

Proctor (R.-A.). — *Sur l'application de la photographie à la détermination de la parallaxe solaire.*

L'auteur recherche quelles sont les stations les plus favorables à l'emploi de la photographie.

Browning (J.). — *Sur un micromètre à fils brillants pour la mesure des positions des lignes d'un spectre faible.*

Proctor (R.-A.). — *Méthode de construction de cartes servant à donner, avec exactitude et en très-peu de temps, la trace du grand cercle qui joint deux points du globe.*

Proctor (R.-A.). — *Note sur la couronne solaire et la lumière zodiacale.*

Suivant l'auteur, il est actuellement démontré, par les observations des éclipses du soleil faites jusqu'ici, que la cause de la production de la couronne solaire appartient au Soleil, et toute observation

ultérieure, entreprise dans le but de démontrer ce fait, est complétement inutile.

WOLF (R.). — *Étude sur la fréquence des taches solaires et leur relation avec la variation de la déclinaison magnétique.*

CAYLEY (A.). — *Sur la construction graphique des courbes qui limitent l'ombre et la pénombre à un instant quelconque d'une éclipse de Soleil.*

Le mode de construction que propose l'auteur est fondé sur cette remarque, qu'un cône droit est la surface enveloppe d'une sphère variable dont le centre est constamment sur une ligne donnée, et dont le rayon est proportionnel à la distance du centre à un point donné de cette ligne; ainsi que sur le théorème de géométrie suivant : Si l'on a un cercle fixe et un second cercle variable dont le centre reste constamment sur une ligne donnée, et dont le rayon soit proportionnel à la distance du centre à un point donné de cette ligne, le lieu du pôle, par rapport au cercle fixe de la corde commune aux deux cercles, est une conique.

CAYLEY (A.). — *Sur la théorie géométrique des éclipses de Soleil.*

L'auteur donne une démonstration simple et élégante de l'équation fondamentale des éclipses solaires publiée par Bessel, dans les *Astronomische Nachrichten* (n° 321, 1837) (¹).

WOLFERS. — *Comparaison des positions d'un certain nombre d'étoiles données dans le second catalogue de Radcliffe, avec les positions des mêmes astres, tirées des* Tabulæ reductionum *de Wolfers.*

PROCTOR (R.-A.). — *Sur la résolubilité des amas d'étoiles, regardée comme servant à apprécier leurs distances.*

L'auteur discute la théorie de William Herschel, d'après laquelle la non-résolubilité d'un amas d'étoiles est une preuve de leur grande distance, de telle sorte que, de deux groupes dont l'un est résoluble par un télescope donné, et dont l'autre ne l'est pas, le premier est certainement plus rapproché que l'autre, et il tend à prouver que cette théorie n'est pas complétement exacte. Ainsi, dans le plus petit des nuages de Magellan, Herschel a trouvé que les bords n'étaient pas résolubles avec un télescope de 18 pouces, tandis que le centre,

(¹) *Voir* BRÜNNOW, *Astronomie sphérique*, p. 436. Librairie Gauthier-Villars.

au contraire, se résolvait très-distinctement. Mais, comme d'autre part il est évident que, si ce petit nuage était formé d'étoiles distribuées uniformément, le centre serait évidemment la partie la moins facilement résoluble, il est clair que les bords de la nuée ont une constitution différente de celle du centre. Dans l'explication de ces phénomènes de résolubilité, il entre donc au moins une autre considération que celle de la distance, et nous ne sommes pas en droit d'affirmer que, par exemple, les étoiles formant la voie lactée soient plus éloignées de nous que les groupes d'étoiles que l'œil peut résoudre.

Powell (E.-B.). — *Sur l'orbite de α du Centaure.*

Seabroke (G.). — *La couronne solaire est-elle un phénomène solaire ou un phénomène terrestre?*

Le but de l'auteur est de montrer que, dans l'état actuel de nos connaissances, la théorie publiée par M. Lockyer (la couronne solaire est un phénomène terrestre) est parfaitement admissible, et, en outre, de démontrer comment cette question, qu'il considère comme encore litigieuse, pourra être résolue par les observations des éclipses futures.

Seabroke (G.). — *Sur le déplacement des lignes lumineuses dans le spectre de la chromosphère solaire.*

Browning (J.). — *Sur un spectroscope dans lequel les prismes s'adaptent automatiquement pour l'angle de déviation minimum qui correspond à la raie particulière soumise à l'examen.*

Cayley (A.). — *Sur une propriété des projections stéréographiques.*

Les mêmes cercles qui, dans la projection stéréographique directe d'un hémisphère, représentent respectivement des méridiens et des parallèles, représentent encore des méridiens et des parallèles dans la projection oblique de l'hémisphère; mais les colatitudes ne sont pas les mêmes dans les deux projections; en d'autres termes, un cercle qui, dans la projection directe, représente un parallèle de colatitude c représente, dans la projection oblique, un parallèle de colatitude différente et égale à c'. Or, si l'on désigne par Δ' l'arc qui, dans la projection oblique, représente les distances du centre au pôle de la projection directe (c'est-a-dire la colatitude du centre), on a

$$\tang\tfrac{1}{2}c = \tang\tfrac{1}{2}\Delta' \tang\tfrac{1}{2}c'.$$

ultérieure, entreprise dans le but de démontrer ce fait, est complétement inutile.

WOLF (R.). — *Étude sur la fréquence des taches solaires et leur relation avec la variation de la déclinaison magnétique.*

CAYLEY (A.). — *Sur la construction graphique des courbes qui limitent l'ombre et la pénombre à un instant quelconque d'une éclipse de Soleil.*

Le mode de construction que propose l'auteur est fondé sur cette remarque, qu'un cône droit est la surface enveloppe d'une sphère variable dont le centre est constamment sur une ligne donnée, et dont le rayon est proportionnel à la distance du centre à un point donné de cette ligne; ainsi que sur le théorème de géométrie suivant : Si l'on a un cercle fixe et un second cercle variable dont le centre reste constamment sur une ligne donnée, et dont le rayon soit proportionnel à la distance du centre à un point donné de cette ligne, le lieu du pôle, par rapport au cercle fixe de la corde commune aux deux cercles, est une conique.

CAYLEY (A.). — *Sur la théorie géométrique des éclipses de Soleil.*

L'auteur donne une démonstration simple et élégante de l'équation fondamentale des éclipses solaires publiée par Bessel, dans les *Astronomische Nachrichten* (n° 321, 1837) [1].

WOLFERS. — *Comparaison des positions d'un certain nombre d'étoiles données dans le second catalogue de Radcliffe, avec les positions des mêmes astres, tirées des* Tabulæ reductionum *de Wolfers.*

PROCTOR (R.-A.). — *Sur la résolubilité des amas d'étoiles, regardée comme servant à apprécier leurs distances.*

L'auteur discute la théorie de William Herschel, d'après laquelle la non-résolubilité d'un amas d'étoiles est une preuve de leur grande distance, de telle sorte que, de deux groupes dont l'un est résoluble par un télescope donné, et dont l'autre ne l'est pas, le premier est certainement plus rapproché que l'autre, et il tend à prouver que cette théorie n'est pas complétement exacte. Ainsi, dans le plus petit des nuages de Magellan, Herschel a trouvé que les bords n'étaient pas résolubles avec un télescope de 18 pouces, tandis que le centre,

---

[1] *Voir* BRÜNNOW, *Astronomie sphérique*, p. 436. Librairie Gauthier-Villars.

au contraire, se résolvait très-distinctement. Mais, comme d'autre part il est évident que, si ce petit nuage était formé d'étoiles distribuées uniformément, le centre serait évidemment la partie la moins facilement résoluble, il est clair que les bords de la nuée ont une constitution différente de celle du centre. Dans l'explication de ces phénomènes de résolubilité, il entre donc au moins une autre considération que celle de la distance, et nous ne sommes pas en droit d'affirmer que, par exemple, les étoiles formant la voie lactée soient plus éloignées de nous que les groupes d'étoiles que l'œil peut résoudre.

Powell (E.-B.). — *Sur l'orbite de α du Centaure.*

Senbroke (G.). — *La couronne solaire est-elle un phénomène solaire ou un phénomène terrestre?*

Le but de l'auteur est de montrer que, dans l'état actuel de nos connaissances, la théorie publiée par M. Lockyer (la couronne solaire est un phénomène terrestre) est parfaitement admissible, et, en outre, de démontrer comment cette question, qu'il considère comme encore litigieuse, pourra être résolue par les observations des éclipses futures.

Senbroke (G.). — *Sur le déplacement des lignes lumineuses dans le spectre de la chromosphère solaire.*

Browning (J.). — *Sur un spectroscope dans lequel les prismes s'adaptent automatiquement pour l'angle de déviation minimum qui correspond à la raie particulière soumise à l'examen.*

Cayley (A.). — *Sur une propriété des projections stéréographiques.*

Les mêmes cercles qui, dans la projection stéréographique directe d'un hémisphère, représentent respectivement des méridiens et des parallèles, représentent encore des méridiens et des parallèles dans la projection oblique de l'hémisphère; mais les colatitudes ne sont pas les mêmes dans les deux projections; en d'autres termes, un cercle qui, dans la projection directe, représente un parallèle de colatitude c représente, dans la projection oblique, un parallèle de colatitude différente et égale à c'. Or, si l'on désigne par Δ' l'arc qui, dans la projection oblique, représente les distances du centre au pôle de la projection directe (c'est-à-dire la colatitude du centre), on a

$$\tang \tfrac{1}{2} c = \tang \tfrac{1}{2} \Delta' \tang \tfrac{1}{2} c'.$$

ultérieure, entreprise dans le but de démontrer ce fait, est complétement inutile.

Wolf (R.). — *Étude sur la fréquence des taches solaires et leur relation avec la variation de la déclinaison magnétique.*

Cayley (A.). — *Sur la construction graphique des courbes qui limitent l'ombre et la pénombre à un instant quelconque d'une éclipse de Soleil.*

Le mode de construction que propose l'auteur est fondé sur cette remarque, qu'un cône droit est la surface enveloppe d'une sphère variable dont le centre est constamment sur une ligne donnée, et dont le rayon est proportionnel à la distance du centre à un point donné de cette ligne; ainsi que sur le théorème de géométrie suivant : Si l'on a un cercle fixe et un second cercle variable dont le centre reste constamment sur une ligne donnée, et dont le rayon soit proportionnel à la distance du centre à un point donné de cette ligne, le lieu du pôle, par rapport au cercle fixe de la corde commune aux deux cercles, est une conique.

Cayley (A.). — *Sur la théorie géométrique des éclipses de Soleil.*

L'auteur donne une démonstration simple et élégante de l'équation fondamentale des éclipses solaires publiée par Bessel, dans les *Astronomische Nachrichten* (n° 321, 1837) [1].

Wolfers. — *Comparaison des positions d'un certain nombre d'étoiles données dans le second catalogue de Radcliffe, avec les positions des mêmes astres, tirées des* Tabulæ reductionum *de Wolfers.*

Proctor (R.-A.). — *Sur la résolubilité des amas d'étoiles, regardés comme servant à apprécier leurs distances.*

L'auteur discute la théorie de William Herschel, d'après laquelle la non-résolubilité d'un amas d'étoiles est une preuve de leur grande distance, de telle sorte que, de deux groupes dont l'un est résoluble par un télescope donné, et dont l'autre ne l'est pas, le premier est certainement plus rapproché que l'autre, et il tend à prouver que cette théorie n'est pas complétement exacte. Ainsi, dans le plus petit des nuages de Magellan, Herschel a trouvé que les bords n'étaient pas résolubles avec un télescope de 18 pouces, tandis que le centre,

[1] *Voir* Brünnow, *Astronomie sphérique*, p. 436. Librairie Gauthier-Villars.

au contraire, se résolvait très-distinctement. Mais, comme d'autre part il est évident que, si ce petit nuage était formé d'étoiles distribuées uniformément, le centre serait évidemment la partie la moins facilement résoluble, il est clair que les bords de la nuée ont une constitution différente de celle du centre. Dans l'explication de ces phénomènes de résolubilité, il entre donc au moins une autre considération que celle de la distance, et nous ne sommes pas en droit d'affirmer que, par exemple, les étoiles formant la voie lactée soient plus éloignées de nous que les groupes d'étoiles que l'œil peut résoudre.

Powell (E.-B.). — *Sur l'orbite de α du Centaure.*

Senbroke (G.). — *La couronne solaire est-elle un phénomène solaire ou un phénomène terrestre?*

Le but de l'auteur est de montrer que, dans l'état actuel de nos connaissances, la théorie publiée par M. Lockyer (la couronne solaire est un phénomène terrestre) est parfaitement admissible, et, en outre, de démontrer comment cette question, qu'il considère comme encore litigieuse, pourra être résolue par les observations des éclipses futures.

Senbroke (G.). — *Sur le déplacement des lignes lumineuses dans le spectre de la chromosphère solaire.*

Browning (J.). — *Sur un spectroscope dans lequel les prismes s'adaptent automatiquement pour l'angle de déviation minimum qui correspond à la raie particulière soumise à l'examen.*

Cayley (A.). — *Sur une propriété des projections stéréographiques.*

Les mêmes cercles qui, dans la projection stéréographique directe d'un hémisphère, représentent respectivement des méridiens et des parallèles, représentent encore des méridiens et des parallèles dans la projection oblique de l'hémisphère; mais les colatitudes ne sont pas les mêmes dans les deux projections; en d'autres termes, un cercle qui, dans la projection directe, représente un parallèle de colatitude c représente, dans la projection oblique, un parallèle de colatitude différente et égale à c'. Or, si l'on désigne par Δ' l'arc qui, dans la projection oblique, représente les distances du centre au pôle de la projection directe (c'est-a-dire la colatitude du centre), on a

$$\tang\tfrac{1}{2}c = \tang\tfrac{1}{2}\Delta' \tang\tfrac{1}{2}c'.$$

Airy (G.-B.). — *Sur l'éclipse totale de Lune du 12 juillet 1870.*

Proctor (R.-A.). — *Sur le spectroscope automatique de M. Browning.*

Proctor (R.-A.). — *Nouvelles remarques sur la couronne solaire.*

Pour l'auteur, le fait capital observé dans les éclipses de Soleil est le suivant : au moment de la totalité, à l'intérieur du cône mené par l'œil de l'observateur et limité par le disque de la Lune, il n'y a aucune lumière; au contraire, la portion de l'atmosphère comprise dans le cylindre limité par les lignes qui vont du disque du Soleil à celui de la Lune est vivement éclairée; et ce fait prouve, avec la dernière évidence, que cette lumière provient d'un corps placé bien au delà de la Lune. Quant à l'obscurité du disque de notre satellite, on doit l'expliquer par cette raison très-simple : la Lune est un corps opaque bien plus voisin de nous que la Couronne.

Stone. — *Détermination de la constante de la nutation par les observations d'ascension droite de la Polaire et de déclinaison de la Polaire, de 51 Céphée et de δ Petite-Ourse, faites à l'Observatoire de Greenwich, de 1851 à 1865.*

On trouvera le détail de toutes ces observations dans le volume XXXVII des *Mémoires de la Société Royale Astronomique*. Elles y sont discutées avec soin, et elles conduisent aux valeurs suivantes de la constante cherchée N :

(1)	$N = 9'',115 - 1,166\,p$,	Æ de la Polaire,
(2)	$N = 9'',108 + 6,1\,\delta p$,	D.P.N. de la Polaire,
(3)	$N = 9'',144 - 3,6\,\delta c$,	D.P.N. de 51 Céphée,
(4)	$N = 9'',214 + 1,75\,\delta m$,	D.P.N. de δ Petite-Ourse;

où l'on a posé, d'après Gould,

Mouvement propre de la Polaire en Æ........	$= +0'',1148 + p$,
» » en D.P.N....	$= -0'',004 + \delta p$,
» de 51 Céphée en D.P.N....	$= +0'',048 + \delta c$,
» de δ Petite-Ourse en D.P.N.	$= -0'',043 + \delta m$.

En donnant aux équations (1) et (2) un poids double de celui des équations (3) et (4), on en déduit pour N

$$N = 9'',134 - 0,55\,p + 2,02\,\delta p + 0,29\,\delta m - 0,6\,\delta c.$$

MÉLANGES.

SUR LA REPRÉSENTATION DES SURFACES ALGÉBRIQUES.

La représentation d'une surface du quatrième ordre à conique double sur le plan peut être faite d'une manière simple, au moyen des propositions suivantes.

Théorème I. — Étant données cinq courbes du troisième ordre passant par cinq points, dont les équations sont

$$Q_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5,$$

il existe, entre les premiers membres de leurs équations, deux relations homogènes du second degré

$$(1) \qquad f(Q_i) = 0, \quad \varphi(Q_i) = 0;$$

si l'on ramène les deux identités précédentes, par une substitution linéaire, à ne contenir que les carrés des inconnues (ce qui revient à remplacer les courbes par d'autres cubiques satisfaisant aux mêmes conditions), les deux identités (1) prennent la forme

$$(2) \qquad \Sigma Q_i^2 = 0, \quad \Sigma a_i Q_i^2 = 0.$$

L'équation du cinquième degré qu'il faut résoudre, pour ramener les deux identités à une somme de carrés, est la même que celle dont dépendent les cinq points communs aux cinq cubiques.

Théorème II. — Étant donnée une conique dans l'espace, on peut toujours trouver, et d'une infinité de manières, cinq quadriques qui la contiennent,

$$(3) \qquad S_i = 0,$$

et telles qu'entre les premiers membres S_i on ait la relation identique

$$(4) \qquad \Sigma S_i^2 = 0.$$

Théorème III. — Si l'on pose

$$(5) \qquad S_i = Q_i \sqrt{a_i + \lambda},$$

les formules (5) donnent la représentation sur le plan de la surface générale du quatrième ordre, à conique double, définie par l'équation

$$(6) \qquad \sum \frac{S_i^2}{a_i + \lambda} = 0.$$

La courbe du troisième ordre, représentation sur le plan de la conique double, a pour équation

$$(7) \qquad \Sigma Q_i \sqrt{a_i + \lambda} = 0.$$

Les sections planes de la surface ont pour représentation plane les courbes dont l'équation est

$$\Sigma m_i Q_i \sqrt{a_i + \lambda} = 0, \quad \text{où} \quad \Sigma m_i = 0.$$

Les formules qui précèdent s'appliquent évidemment à la surface générale du troisième ordre, qui est un cas particulier de la surface du quatrième ordre à conique double. La méthode repose, on le voit, sur l'emploi de deux systèmes de coordonnées :

1° Dans le plan, un point peut être défini par les cinq quantités Q_i, reliées par les deux identités (2) ;

2° Dans l'espace, le point est défini par les cinq coordonnées S_i, reliées par l'unique identité (4).

Ces deux systèmes de coordonnées permettent, en tenant compte des identités, de traiter, sans faire intervenir les coordonnées ordinaires, toutes les questions qui se rapportent dans le plan à cinq points, dans l'espace à une conique et aux surfaces qui la contiennent. Aux exemples que j'ai donnés dans un travail antérieur, et dans une Communication à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, t. LXXIII, p. 732), on peut ajouter le suivant :

Étant donnée une surface du quatrième ordre, ayant pour ligne double le cercle de l'infini, ou *cyclide*, on sait intégrer l'équation différentielle des lignes pour lesquelles la sphère, passant par trois points consécutifs, et normale à la surface, est en même temps orthogonale à une des cinq sphères principales de la surface. Ces lignes sont analogues aux lignes géodésiques, et elles donnent le minimum d'une intégrale $\int \lambda^2 ds$, où λ est l'inverse de la tangente menée du point à une sphère.

La méthode précédente peut s'étendre et permet de traiter beau-

coup de questions se rattachant aux transformations les plus variées; j'en citerai seulement trois exemples.

1° Étant données les quadriques passant par une droite et par deux points, on peut en choisir cinq,

$$T_i = 0,$$

telles qu'entre les premiers membres de leurs équations on ait la relation identique

$$(8)\qquad \Sigma T_i^2 = 0;$$

si, comparant cette identité à l'identité (4), on pose

$$(9)\qquad S_i = T_i,$$

on a une transformation des points de l'espace dans laquelle à un plan, correspondent toutes les quadriques passant par une droite et trois points. C'est la transformation de M. Cayley. Les mêmes considérations s'appliquent à la transformation du second ordre, récemment découverte par M. Cremona, et dans laquelle à un plan correspondent toutes les surfaces du second ordre passant par trois points et tangentes en un quatrième point à un plan donné.

2° Étant données les quadriques passant par quatre points, on peut en trouver six telles qu'entre les premiers membres U_i de leurs équations, on ait les deux identités

$$\Sigma_1^6 U_i^2 = 0, \quad \Sigma_1^6 a_i U_i^2 = 0.$$

Si l'on prend

$$(10)\qquad x_i = U_i\sqrt{a_i + \lambda}, \quad i = 1, 2, \ldots, 6,$$

les formules (10), en y regardant les quantités x_i comme les six coordonnées d'une droite, donnent la représentation d'un complexe de droites du second ordre, ayant quatre points singuliers. Cette représentation est identique à celle qui a été effectuée par M. Lie (*Nouvelles* de la Société de Gœttingue).

3° Étant données les surfaces du troisième ordre, passant par une courbe du cinquième ordre $C_{5,2}$, on peut en choisir six, telles qu'entre les premiers membres V_i de leurs équations, on ait les deux relations identiques

$$(11)\qquad \Sigma V_i^2 = 0, \quad \Sigma a_i V_i^2 = 0.$$

Si l'on prend, comme précédemment,

$$(12) \qquad x_i = V_i\sqrt{a_i+\lambda}, \quad i=1, 2, \ldots, 6,$$

les formules (12), en y considérant les quantités x_i comme les six coordonnées d'une droite, donnent la représentation, dans l'espace, du complexe le plus général du second ordre. Cette représentation peut, d'ailleurs, s'effectuer directement, et l'on en déduit une notion complète des congruences et des surfaces appartenant au complexe, ainsi que les propriétés de la surface de Kummer ([1]).

Les systèmes des coordonnées précédents sont tels que les relations identiques sont toutes du second degré, et peuvent être ramenées à la forme d'une somme de carrés. Il existe des méthodes de transformation dans lesquelles ces relations, tout en étant du second ordre, ne peuvent être débarrassées des rectangles, et d'autres dans lesquelles on doit faire intervenir des relations de degré supérieur au second. G. D.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Abhandlungen (*Mathematische*) der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem Jahre 1869. In-4°. Berlin, Dümmler. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Klasse der königl. bayerischen Akademie der Wissenschaften. 10. Bd. 3. Abth. Gr. in-4°. München, Franz. 3 Thlr. 17 Ngr.

Abbott (Rich.). — Elements of Physical Astronomy. 8°. London, Longmans. 1 sh. 9 d.

Arntzen (B.-C.). — Perspectivlæren kortfattet fremstillet. Med 5 Plancher. Gjennemset af Eckersberg og Nordan. Christiania, Malling. 60 Sk.

([1]) En comparant les deux équations qui définissent un complexe du second ordre ou l'identité (4), on peut obtenir un mode de représentation dans lequel, à un point de l'espace, correspondent deux droites du complexe, etc.

Baltzer (R.). — Die Elemente der Mathematik. 2. Bd. 3. Aufl. 8°. Leipzig. Hirzel. 2 Thlr.

Bammert. — Aufgaben aus der mathematischen Geographie. 4°. Tübingen, Fues. $\frac{1}{4}$ Thlr.

Bauernfeind (C.-M.). — Das bayerische Präcisions-Nivellement. Gr.-4°. München, Franz. $1\frac{1}{3}$ Thlr.

Beer (G.) und *Mädler* (J.-H.). — Mappa selenographica. 4. Blatt. Neue Aufl. Lithogr. Gr. fol. Berlin, Schrapp. $6\frac{2}{3}$ Thlr.

Beltrami (E.). — Ricerche sulla geometria delle forme binarie cubiche. In-4°, 53 p. Bologna, tip. Gamberini e Parmeggiani. 3 L.

Björling (C.-F.-E.). — Solen. Populära föredrag. 2. uppl. (tillöked). 12°. 148 sid. Stockholm, Beyer. 1 rd. 50 öre.

Björling (E.-G.). — Noter till elementar lärobok i algebra. 8. uppl. Bihang till läroboken. 8°. 28 sid. Westeräs, Författerens förlag. 50 öre.

Boidi (G.). — Manuale di disegno geometrico lineare, conforme ai programmi governativi, ad uso degli alunni del secondo anno delle scuole tecniche. In-4°, con 36 tav. Torino, Paravia e C°. 4 L. 50.

Bretschneider (C.-A.). — Beiträge zur Geschichte der griechischen Geometrie (Progr. d. Gymn. zu Gotha). 4°. 12 S.

Bretschneider (C.-A.). — Die Geometrie und die Geometer vor Euklides. Gr. 8°. Leipzig, Teubner. $1\frac{1}{3}$ Thlr.

Brae (A.-E.). — The Treatise on the Astrolabe of Geoffry Chaucer with Notes and Illustrations. 8°. London, J.-R. Smith. 7 sh. 6 d.

Butz (W.). — Anfangsgründe der darstellenden Geometrie, der Axonometrie, der Perspective und der Schattenconstruction. (Progr. d. Realsch. zu Elbing). 4°. 16 S.

Butz (W.). — Anfangsgründe der darstellenden Geometrie. Gr. 8°. Essen, Baedecker. 24 Ngr.

Caselli (V.). — Lezioni d'algebra proposte agli alunni dei Licei, Istituti tecnici, ec., contenenti oltre a 1621 fra esempi, esercizi e

problemi già risolti. In-16°, XXIV-1040 p. S. Pier d'Arena, tip. Vernengo. 6 L.

Cheyne (C.-H.-H.). — An Elementary Treatise on the Planetary Theory, with a Collection of Problems. 2d edit. Post-8°, 160 p. London, Macmillan. 6 sh. 6 d.

Eckhardt (C.-L.-P.). — Neue Stern-Karte. 5 Aufl. Gr. 8°. Giessen, Roth. 1 Thlr.

Riccardi (P.). — Biblioteca matematica italiana. Fasc. II, in-4°, p. 88-265. Modena, tip. Erede Saliani. 3 L.

Rosanes (J.). — Ueber die neuesten Untersuchungen in Betreff unserer Anschauung vom Raume. Habilitationsschrift. Gr. 8°. Breslau, Maruschke et Berendt. 6 Ngr.

Ruffini (F.). — Sul modo di definire la continuità delle funzioni. In-4°, 14 pag. Modena, tip. Erede Soliani.

Schlotke (J.). — Die Hauptaufgaben der descriptiven Geometrie. Qu. 8°, in Carton. Hamburg, Friederichsen und Co. 1 Thlr. 12 Ngr.

Sergent-Marceau (E.). — Lezioni elementari di astronomia, dedicate al popolo che studia e lavora. In-16°, 444 pag. con illustrazioni. Milano, Gaetano Brigola. 2 L. 40.

Spriggs (C.). — A Course of Geometrical Drawing. n° 2. In-4, sewed. Manchester, London, Simpkin. 4 d.

Steinhauser (A.). — Die Netze der Poinsot'schen Körper zum Gebrauche der Darstellungen ihrer Modelle. Gr. 8°, Graz, Verlag « Leykam-Josefsthal ». 16 Ngr.

Todhunter (I.). — Key to Algebra, for use of Colleges and Schools. Post-8, 244 p. cloth. London, Macmillan. 10 sh. 6 d.

ERRATUM:

Page 77, ligne 9 : ***Au lieu de*** **démontre,** ***lire*** **se propose de démontrer.**

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

JORDAN (C.). — TRAITÉ DES SUBSTITUTIONS ET DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES. — Paris, Gauthier-Villars, 1870; in-4°, XVI-667 p. Prix : 30 francs.

L'Ouvrage que nous annonçons exercera, nous en sommes sûr, une influence considérable sur les progrès de la théorie la plus importante de l'Algèbre; aussi, en attendant que nous puissions parler d'une manière plus détaillée des belles découvertes de l'auteur, nous croyons devoir faire à nos lecteurs une analyse des différentes questions traitées et résolues par M. Jordan. La théorie des substitutions a toujours été cultivée en France, et nous sommes heureux de reconnaître que c'est à un géomètre de notre pays qu'elle doit un nouveau progrès et d'importantes additions.

PREMIÈRE PARTIE. — L'auteur établit rapidement les principes connus de la théorie des congruences (Livre Ier), et les premiers fondements de la théorie des substitutions (Livre II, Chapitre Ier, § I). Il expose ensuite (§§ II, III et IV) les principales propositions auxquelles donne lieu la triple distinction des groupes en transitifs et intransitifs, primitifs et non primitifs, simples ou composés, et donne en particulier le théorème suivant, qui est fondamental dans son analyse :

Soit G *un groupe composé; on pourra déterminer (souvent de plusieurs manières) une suite de groupes* G, H, I,..., *telle, que chacun de ces groupes soit contenu dans le précédent, et permutable à ses substitutions, mais ne soit contenu dans aucun autre groupe jouissant de cette double propriété.*

En divisant l'ordre de chacun de ces groupes par celui du groupe suivant, on obtiendra une suite d'entiers λ, μ, ν,.... *Ces entiers* (les facteurs de composition de G) *resteront les mêmes à l'ordre près, de quelque manière que l'on détermine la suite* G, H, I,... (¹).

(¹) L'*ordre* d'un groupe est le nombre de ses substitutions.

Une substitution S est *permutable* au groupe formé des substitutions $g_1, g_2, \ldots, g_n$, si l'on a pour chaque valeur de α une relation de la forme $g_\alpha S = S g_\beta$.

Un groupe est *composé*, s'il contient quelque autre groupe auquel ses substitutions soient permutables.

L'auteur examine ensuite le problème de la symétrie des fonctions rationnelles, et montre comment, un groupe étant donné, on peut déterminer tous les groupes qui lui sont *isomorphes*, c'est-à-dire qui lui correspondent substitution à substitution.

Il expose les principales propriétés du groupe alterné (§ VI), puis s'occupe (§ VII) de déterminer les nombres *minima* de valeurs distinctes que puisse prendre une fonction de k lettres, lorsqu'on y permute ces lettres. Il donne à ce sujet un théorème général, qui renferme, comme cas particuliers, les théorèmes importants et bien connus de M. Bertrand et de M. Serret. Il assigne enfin une limite à la transitivité des groupes qui ne contiennent pas le groupe alterné.

Le Chapitre II du second Livre est consacré aux substitutions définies par une expression analytique, et spécialement aux substitutions linéaires. Après avoir exposé (§ I) les recherches de M. Hermite sur ce sujet, M. Jordan détermine l'ordre et les facteurs de composition du groupe linéaire (§§ II et III). Il montre ensuite (§ V) comment on peut, à l'aide d'un changement d'indices (opération analogue aux changements de coordonnées usités dans la Géométrie analytique), ramener une substitution linéaire quelconque à une forme canonique simple. Cette réduction lui permet de résoudre (§ VI) plusieurs problèmes importants, entres autre celui-ci :

Trouver la forme et le nombre des substitutions linéaires échangeables à une substitution linéaire donnée.

Les paragraphes suivants sont consacrés à l'étude de divers groupes remarquables contenus dans le groupe linéaire. L'auteur passe successivement en revue : 1° le groupe orthogonal, dont il détermine l'ordre ; 2° le groupe *abélien* (¹), dont il détermine l'ordre et les facteurs de composition ; 3° deux nouveaux groupes contenus dans le précédent, qu'il a appelés *groupes hypoabéliens*, et dont il détermine également l'ordre et les facteurs de composition.

Dans le § X, l'auteur donne trois méthodes générales pour construire des groupes particuliers contenus dans le groupe linéaire ; puis il étudie successivement (§ XI) les substitutions linéaires fractionnaires, et les groupes si remarquables signalés par MM. Steiner

---

(¹) Ainsi appelé parce qu'il s'est présenté pour la première fois dans les recherches de M. Hermite sur les fonctions abéliennes.

et Clebsch, dont il montre la liaison avec les groupes abélien et hypoabélien.

Avec le Livre III il aborde la théorie des équations. Le § I du Chapitre Ier, consacré à la théorie générale des irrationnelles, contient les théorèmes de Galois, avec de nombreux corollaires, parmi lesquels nous signalerons les suivants :

1° *Si le groupe* G *d'une équation* $F(x) = 0$ *est simple, elle ne pourra être résolue qu'au moyen d'équations dont le groupe ait pour ordre un multiple de celui de* G.

Au contraire, si G *est composé, soient* $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ *ses facteurs de composition : la résolution de* $F(x) = 0$ *se ramènera à celle d'équations auxiliaires dont les groupes seront simples et auront respectivement pour ordres* $\lambda, \mu, \nu \ldots$.

2° *Si les racines* $x_1, \ldots, x_m$ *et* $z_1, \ldots, z_n$ *de deux équations algébriques* $F(x) = 0$ *et* $f(z) = 0$ *sont liées par des relations algébriques telles que* $\varphi(x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_n) = 0$, *toutes ces relations se déduiront d'une seule, de la forme*

$$\psi(x_1, \ldots, x_m) = \chi(z_1, \ldots, z_n),$$

où les racines des deux équations sont séparées (ψ et χ désignant, ainsi que φ, des fonctions rationnelles).

De ces propositions on déduit, entre autres conséquences, les suivantes :

3° *Pour que la résolution d'une équation* $F(x) = 0$ *soit facilitée par celle d'une équation à groupe simple* $f(z) = 0$, *il faut et il suffit que les racines de* $f(z)$ *soient des fonctions rationnelles de celles de* $F(x)$; proposition qui renferme, comme cas très-particulier, un théorème célèbre d'Abel sur la résolution algébrique des équations.

4° *L'équation générale du degré n ne peut être résolue au moyen d'équations de degrés inférieurs (sauf le cas où* $n = 4$).

M. Jordan montre ensuite (§ II) que, lorsqu'une équation contient des paramètres indéterminés, il existe un groupe (*groupe de monodromie*) tel, que toute fonction rationnelle des racines et des paramètres, monodrome par rapport à ces paramètres, soit invariable par les substitutions de ce groupe, et réciproquement. Ce groupe H est contenu dans le groupe de l'équation et permutable à ses substitutions.

Les Chapitres II, III et IV renferment de nombreuses applications

de cette théorie aux principales équations rencontrées jusqu'à ce jour dans les diverses branches de l'analyse. L'auteur y étudie successivement : 1° les équations abéliennes, dont il généralise la théorie ; 2° les équations de Galois ; 3° celle de M. Hesse, dont il met le groupe sous forme linéaire, et dans laquelle il montre le premier terme d'une nombreuse famille d'équations étudiées par M. Clebsch ; 4° celle des 16 droites des surfaces du quatrième degré à conique double, dans laquelle il trouve également un cas particulier d'une famille d'équations de degré p^{r-1}, résolubles à l'aide d'une équation de degré q et de $q - 1$ équations abéliennes de degré p ; 5° celle des 16 points singuliers de la surface de M. Kummer, qu'il réduit au *sixième* degré ; 6° celle des 27 droites des surfaces du troisième ordre, qu'il montre n'être susceptible d'aucun abaissement, et dont il signale le lien avec l'équation aux 16 droites ; 7° celle aux 28 doubles tangentes des courbes du quatrième ordre, qui n'est également susceptible d'aucun abaissement, et ses analogues.

Il détermine ensuite le groupe des équations de la division des fonctions circulaires et elliptiques ; celui des équations modulaires ; celui des équations de la division des fonctions hyperelliptiques.

Les principaux théorèmes qu'il établit à ce sujet sont les suivants :

1° *Les équations modulaires relatives à des transformations de degré n premier et > 11 ne sont susceptibles d'aucun abaissement de degré.* (On sait, au contraire, que si $n \overline{\gtrless} 11$, l'équation s'abaissera).

2° *Les racines de l'équation qui donne la bissection des périodes, dans les fonctions elliptiques ou hyperelliptiques, sont des fonctions monodromes des modules.*

3° *L'équation de degré $n^{2k} - 1$, qui donne la division des périodes par un nombre premier impair n dans les fonctions à $2k$ périodes, a pour groupe le groupe abélien.*

4° *Cette équation n'est pas résoluble par radicaux,* proposition que l'on admettait volontiers, mais sans la démontrer.

5° On sait que cette équation a une réduite de degré $\frac{n^{2k} - 1}{n - 1}$. Mais *pour les fonctions à quatre périodes, il existe deux réduites distinctes et de ce degré.*

Ce fait de deux réduites différentes d'une même équation ayant le même degré n'avait encore été signalé qu'une fois, pour l'équation générale du sixième degré.

6° *Dans le cas particulier de la trisection des fonctions à quatre périodes, on obtient une autre réduite, du vingt-septième degré, identique à l'équation qui donne les 27 droites des surfaces du troisième ordre,* résultat inattendu, qui manifeste une fois de plus l'intime liaison qui existe entre les problèmes de la Géométrie et la théorie des fonctions abéliennes.

7° *Cette dernière réduction est tout exceptionnelle et cesse d'avoir lieu dès que l'on passe au cas de la quintisection.*

L'auteur termine en exposant les méthodes de MM. Hermite et Kronecker pour résoudre l'équation du cinquième degré par les fonctions elliptiques, et montre que *les équations générales de la division des fonctions circulaires, elliptiques ou hyperelliptiques par un nombre impair ne peuvent être d'aucun secours pour la résolution des équations d'un degré supérieur au cinquième.* Au contraire, dans le cas de la bissection, on obtient ce théorème :

La résolution de l'équation

$$X = x^q + ax^{q-1} + \ldots = 0$$

se ramène à celle de l'équation qui donne la bissection des périodes des fonctions hyperelliptiques formées avec $\sqrt{X}$;

Proposition digne de remarque, car elle réduit toute la théorie des substitutions au cas particulier des substitutions abéliennes.

Plusieurs des résultats que nous venons d'énumérer ont attiré l'attention de divers géomètres, qui les ont démontrés par d'autres méthodes. Ainsi M. Clebsch et M. Cremona ont retrouvé l'abaissement de l'équation de la trisection des fonctions abéliennes, et sa liaison avec l'équation aux 27 droites ; M. Klein l'abaissement de l'équation de M. Kummer; M. Geiser le lien entre l'équation aux 27 droites et l'équation aux 16 droites; M. Brioschi a exprimé sous forme rationnelle les racines de l'équation de la bissection des périodes, etc.

Nous ferons pourtant remarquer qu'aucune des propositions purement négatives, telles que l'impossibilité d'abaisser l'équation aux 27 droites ou aux 28 doubles tangentes, ou les équations modulaires lorsque $n > 11$, ou encore l'impossibilité de résoudre l'équation générale du degré n par le moyen d'équations de degré inférieur, ou des équations de la division des transcendantes par un nombre impair, n'a été retrouvée jusqu'à présent. Cela ne doit pas surprendre; car

on ne voit guère comment on pourrait arriver à des résultats de cette nature sans recourir à la théorie des substitutions.

Seconde Partie. — Le Livre IV et dernier est rempli en entier par la solution du problème principal de la théorie des équations, celui de leur résolution par radicaux. Abel ayant démontré qu'une semlbable résolution est impossible en général, ce problème doit être énoncé ainsi : *Trouver tous les types généraux d'équations solubles par radicaux.*

Galois a signalé, le premier, le caractère distinctif de ces équations; néanmoins la question était encore loin d'être résolue, car le critérium trouvé par ce grand géomètre et qui peut s'énoncer ainsi : *Les équations solubles par radicaux sont celles dont le groupe n'a que des nombres premiers pour facteurs de composition,* se prête difficilement à la construction des groupes cherchés.

M. Jordan remplace ce critérium par le suivant, qui lui est équivalent, bien qu'il semble, au premier abord, caractériser une classe plus restreinte d'équations :

Pour qu'un groupe L *soit résoluble* (*c'est-à-dire appartienne à une équation soluble par radicaux*), *il faut et il suffit qu'on puisse déterminer une suite de groupes* 1, F, G, H,..., L *dont le premier ne contienne d'autre substitution que l'unité, et qui jouissent des propriétés suivantes :*

1° *Chacun de ces groupes, tel que* F, *est contenu dans le suivant* G, *et permutable aux substitutions de* L;

2° *Deux substitutions quelconques de* G, *telles que* g, g_1, *satisfont à une relation de la forme* $gg_1 = g_1 g f$, *où* f *est une substitution du groupe précédent* F.

On voit immédiatement la marche à suivre pour la construction des groupes cherchés. On formera successivement les groupes partiels F, G,.... *A mesure que l'on avancera dans cette opération, le champ des recherches se rétrécira,* les substitutions de L devant être permutables à chacun des groupes partiels déjà construits. *Cette simplification n'aurait pas lieu, si l'on voulait employer le critérium de Galois sous sa forme primitive.*

On devra, d'ailleurs, dans la recherche des groupes résolubles, se borner à déterminer ceux qui sont *les plus généraux;* car les groupes plus particuliers contenus dans ceux-là correspondraient à des types particuliers d'équations résolubles, et non aux types les plus généraux auxquels on doit s'attacher.

En suivant la marche qui vient d'être indiquée, M. Jordan s'est trouvé conduit à considérer simultanément les trois problèmes suivants :

PROBLÈME A. *Construire tous les groupes résolubles les plus généraux.*

PROBLÈME B. *Construire les groupes résolubles les plus généraux parmi ceux qui sont contenus dans le groupe linéaire.*

PROBLÈME C. *Construire les groupes résolubles les plus généraux parmi ceux qui sont contenus dans le groupe abélien, ou dans l'un des deux groupes hypoabéliens.*

La liaison nécessaire des trois problèmes résulte des propositions suivantes :

1° *Les groupes résolubles les plus généraux de degré m, dont la détermination constitue le problème* A, *se partagent en classes, correspondantes aux diverses décompositions du nombre m en facteurs successifs dont chacun soit une puissance d'un nombre premier. Soit $m = p^n p'^{n'} \ldots$ une de ces décompositions. Pour écrire immédiatement les groupes correspondants, il suffira de connaître les groupes les plus généraux respectivement contenus dans les groupes linéaires de degrés p^n, $p'^{n'}, \ldots$* (*problème* B).

2° *Pour construire les groupes résolubles les plus généraux contenus dans le groupe linéaire de degré p^n* (*problème* B), *on posera $n = \lambda\nu\pi^\sigma\pi'^{\sigma'}\ldots$, $\pi, \pi', \ldots$ étant des nombres premiers qui divisent $p^\nu - 1$. A chaque décomposition de cette espèce correspond une classe de solutions. Chacune d'elles pourra se construire sans difficulté, si l'on connaît les groupes résolubles les plus généraux pour le degré λ* (*problème* A), *et les groupes résolubles les plus généraux contenus dans les groupes abéliens* (*ou dans les groupes hypoabéliens*) *de degrés $\pi^{2\sigma}$, $\pi'^{2\sigma'}, \ldots$* (*problème* C).

3° *Pour construire les groupes résolubles les plus généraux contenus dans le groupe abélien* (*dans l'un des groupes hypoabéliens*) *de degré p^{2n}* (*problème* C), *on posera de même $n = \lambda\nu\pi^\sigma\pi'^{\sigma'}\ldots$, $\pi, \pi', \ldots$ étant des diviseurs de $p^\nu \pm 1$; et l'on résoudra le problème* A *pour le degré λ, le problème* C *pour les degrés $\pi^{2\sigma}$, $\pi'^{2\sigma'}, \ldots$.*

Ainsi les trois problèmes A, B, C sont liés de telle sorte que la solution de chacun d'eux, pour un degré donné, se ramène à celle des mêmes problèmes pour des degrés inférieurs. On pourra donc les résoudre pour un degré quelconque en abaissant progressivement ce degré par des réductions successives, jusqu'à ce qu'il soit assez petit

pour que la solution devienne intuitive. L'abaissement est extrêmement rapide; ainsi sept à huit réductions au plus suffiront pour tout nombre ayant moins de 1 000 000 000 000 de chiffres.

On voit, néanmoins, par ce qui précède, qu'il est impossible d'enfermer dans une formule tous les types généraux de groupes résolubles. Le nombre de ces types va grandissant indéfiniment à mesure que le degré s'élève.

On remarquera enfin l'intervention du groupe abélien dans la solution, et le singulier rapprochement établi par là entre le problème actuel et la théorie des transcendantes.

La méthode dont nous venons d'esquisser les principaux traits se trouve complétement établie par M. Jordan dans les quatre premiers Chapitres du Livre IV de son Traité, et résumée dans le cinquième, avec plus de précision que nous n'avons pu le faire ici. Les Chapitres VI et VII sont consacrés à l'examen d'une dernière question, la plus épineuse de tout l'Ouvrage, et dont nous allons dire quelques mots.

La méthode de solution des problèmes A, B, C exposée dans les précédents Chapitres fournit tous les groupes que l'on cherche, et ne fournit que des groupes résolubles (contenus dans le groupe linéaire s'il s'agit du problème B, dans les groupes abéliens ou hypoabéliens s'il s'agit du problème C). Mais il n'est pas prouvé que tous les groupes obtenus soient *généraux* et *distincts*. Il peut donc y avoir des groupes à rejeter, soit comme non généraux, soit comme faisant double emploi. C'est, en effet, ce qui se présente. En soumettant cette question à un examen approfondi, M. Jordan est parvenu à dresser le tableau complet de ces cas d'exclusion. (Observations de la fin du Chapitre V.)

Après avoir montré la nécessité de ces exclusions dans le Chapitre VI, il établit, dans le Chapitre VII, que, lorsqu'on a eu le soin de les faire, *sa méthode ne fournit que des groupes essentiellement généraux et distincts,* quel que soit celui des trois problèmes A, B, C qu'il s'agisse de résoudre. Il a pour cela à démontrer trois théorèmes A, B, C qu'il établit en prouvant que, si quelqu'un d'eux était faux pour les groupes d'un certain degré, l'un au moins d'entre eux serait faux pour des groupes d'un degré moindre (1). Cette démons-

(1) Ce procédé de démonstration est, comme on le voit, analogue à celui par lequel Fermat a établi l'impossibilité de l'équation $x^4+y^4=z^4$.

tration repose sur certaines inégalités numériques, vraies en général, mais qui peuvent devenir inexactes pour certains nombres très-petits. De là naissent les cas d'exclusion.

Les groupes restants étant actuellement tous généraux et distincts, leur *énumération* devient facile. Quant à leur *classification,* elle résulte immédiatement de ce qui a été dit. En effet, les groupes résolubles et généraux de degré m étant partagés en *classes,* comme nous l'avons indiqué, on pourra répartir les groupes de chacune d'elles en *sous-classes,* suivant la classe à laquelle appartiennent les groupes de degrés $p^n, p'^{n'}, \ldots$, qui servent à les construire; etc....

Le problème de la résolution des équations par radicaux est donc entièrement résolu.

Telle est l'analyse des principales questions résolues par M. Jordan. Cette analyse nous a été rendue facile par les développements qu'a donnés l'auteur dans différents recueils. Les travaux qui précèdent viennent au moment favorable; car les progrès de la Géométrie analytique ont permis, comme on l'a vu, à M. Jordan, de donner des applications qui ajoutent un grand intérêt et un nouvel attrait à la théorie si difficile des substitutions. J. H.

BRUNNOW (F.). — TRAITÉ D'ASTRONOMIE SPHÉRIQUE ET PRATIQUE, édition française de MM. LUCAS et ANDRÉ. — Paris, Gauthier-Villars, 1869-1872; 2 volumes in-8°, avec figures dans le texte. Prix : 20 francs.

Chaque volume se vend séparément :

Astronomie sphérique, 1869. In-8°, XXIV-518 p....... 10 fr.
Astronomie pratique, 1872. In-8°, XVI-544 p.......... 10 fr.

Ce Traité est divisé en deux volumes, *Astronomie sphérique* et *Astronomie pratique,* dont chacun forme, pour ainsi dire, un ouvrage séparé.

Le premier volume, *Astronomie sphérique,* rédigé par MM. Lucas et André, est depuis longtemps entre les mains du public; nous croyons donc inutile d'entrer à son égard dans de longs détails. Disons seulement que l'on y trouve les différentes formules d'interpolation, un exposé élémentaire de la théorie des moindres carrés, ainsi que la solution de tous les problèmes relatifs au mou-

vement diurne. Vient ensuite une étude complète de la réfraction astronomique et de l'aberration diurne ou planétaire; puis les formules de réduction des positions moyennes des étoiles au lieu apparent, et *vice versa*, et enfin la détermination des grands cercles fixes de la sphère céleste par rapport à l'horizon d'un lieu et par conséquent la mesure des latitudes et des longitudes géographiques. Ce volume se termine par l'étude de la figure et des dimensions de la Terre et par la détermination des parallaxes horizontales des étoiles.

L'*Astronomie pratique* a été rédigée par M. André, d'après le septième Chapitre de l'ouvrage allemand; mais on a fait au texte primitif de nombreuses additions et modifications, destinés surtout à faire connaître les procédés employés à l'Observatoire de Paris. Ce volume comprend deux grandes divisions : 1° l'étude des instruments d'un usage général et celle des erreurs communes à tous les appareils d'Astronomie ou de Géodésie; 2° l'examen particulier de chaque instrument.

Nous analyserons successivment ces deux Parties.

La première débute par un exposé de la construction et de l'usage du niveau à bulle d'air. Cet appareil, d'un emploi constant en Astromie et en Physique, est l'objet d'un long Chapitre où abondent les faits curieux sur son mode de construction, son ajustement, sa graduation et ses usages multiples.

Le procédé pratique de division d'un cercle, la détermination des erreurs que présente une semblable graduation, erreurs dont il importe essentiellement de tenir compte si l'on veut faire une mesure angulaire précise, font l'objet d'un Chapitre également très-important.

Dans le paragraphe relatif à la flexion est décrite la méthode curieuse de M. Marth pour la détermination de la flexion en ascension droite d'une lunette astronomique.

Viennent ensuite l'examen des erreurs d'une vis micrométrique et leur détermination soit par des procédés physiques, soit par la méthode astronomique de M. Yvon Villarceau, qui permet de les déduire des observations en ascension droite de la polaire.

Le Chapitre III est consacré à l'altazimut, au théodolite, et à l'instrument des hauteurs; il renferme une comparaison raisonnée de la méthode de la répétition des angles et de la méthode de la réitération, ainsi qu'une description succincte du théodolite à réflexion de M. d'Abbadie.

Nous arrivons maintenant aux véritables instruments d'Astronomie, à ceux que l'on ne trouve que dans les observatoires.

Le Chapitre IV est, en effet, consacré à une théorie complète de l'équatorial considéré comme devant servir à donner les positions absolues des astres. Struve et M. Yvon Villarceau ont successivement étudié l'équatorial à ce point de vue et nous ont donné d'élégantes méthodes de réduction pour les observations faites dans ce cas. Cet exposé n'a probablement été conservé par l'auteur que pour se soumettre aux idées, encore généralement admises en Allemagne, sur la valeur de l'équatorial, comme appareil de mesures absolues. En effet, tout instrument a sa fonction spéciale, et l'équatorial, quel que soit son mode de construction, doit, selon nous, n'être utilisé que pour des mesures comparatives d'astres très-voisins; c'est, d'ailleurs, ce que l'auteur a indiqué, trop timidement peut-être, lorsque, revenant aux vrais principes, il indique l'emploi que l'on doit faire comme appareil micrométrique d'un équatorial mobile autour de son axe polaire avec une vitesse égale à celle du mouvement diurne.

Le Chapitre V est consacré à la description des instruments méridiens, lunette méridienne et cercle méridien. Il renferme la démonstration analytique et géométrique des formules relatives à la réduction des observations de passage, une étude détaillée de l'influence des différentes erreurs instrumentales et de leur détermination; le paragraphe relatif à l'observation et à la réduction des observations des circumpolaires est rédigé avec un soin minutieux. Cet article se termine par une Note intéressante de M. Tisserand sur la comparaison des différents procédés de calcul que l'on peut employer pour rechercher la solution la plus probable d'un grand nombre d'équations du premier degré à une inconnue.

Dans la section relative au cercle méridien, on a décrit en détail l'instrument de passages et de hauteurs construit par M. Eichens pour l'Observatoire de Lima. Le lecteur y trouvera aussi une démonstration géométrique et une discussion approfondie de la formule complète de réduction des observations de déclinaison. Vient ensuite la détermination des différentes erreurs auxquelles sont soumises ces observations.

Ce même Chapitre V contient encore une étude complète de l'instrument des passages dans le premier vertical employé par Struve, pour déterminer les variations qu'éprouvent les distances zénithales

des étoiles passant au méridien près du zénith, variations d'où se déduit la valeur de la constante de l'aberration. Nous savons gré à l'auteur d'avoir insisté longuement sur cet instrument, peut-être trop négligé en France, et dont Struve a su tirer un si grand parti.

Le Chapitre suivant est consacré à la description de la lunette brisée, autrefois fort employée en Allemagne, et du sidérostat dont la construction est le dernier des travaux de Léon Foucault.

Le Chapitre VII est plus spécialement destiné aux marins. Le sextant y est décrit avec le plus grand soin et les erreurs auxquelles sont sujettes les observations faites avec cet instrument sont étudiées attentivement. Nous avons remarqué les méthodes géométriques, empruntées à Struve, qui conduisent au calcul de l'importance de ces erreurs.

Dans le Chapitre VIII l'auteur étudie les différents micromètres employés en Astronomie : micromètre filaire, micromètre annulaire, héliomètre, micromètre à double image d'Airy. On y compare les valeurs relatives de ces différents instruments et l'on indique dans quels cas spéciaux chacun d'eux doit particulièrement servir.

Le dernier Chapitre de l'*Astronomie pratique* est consacré aux corrections que la réfraction, la parallaxe, l'aberration, la précession et la nutation introduisent dans les mesures micrométriques.

Des Tables numériques fort utiles à ceux qui, en dehors d'un observatoire, ont à s'occuper d'Astronomie, et des Notes intéressantes ont été ajoutées à cette partie didactique. Nous ne voulons pas entrer dans l'analyse de ces Tables et de ces Notes, important appendice de l'Ouvrage; nous nous bornerons à signaler d'une manière spéciale les pages dans lesquelles M. Wolf traite de l'équation personnelle, sujet d'un de ses plus beaux travaux, et la Note relative à la parallaxe du Soleil qui réalise la promesse faite par l'auteur à la fin du premier volume.

Les deux volumes, *Astronomie sphérique* et *Astronomie pratique*, forment, comme on le voit, un ouvrage complet et comblent une lacune regrettable de la série de nos ouvrages classiques. Les traités de MM. Dubois et Liais, quoique remarquables à bien des égards, sont insuffisants au point de vue pratique; aussi les deux volumes dont nous venons de faire une brève analyse, et que la maison Gauthier-Villars a imprimés avec la perfection qui lui est propre, rendront-ils d'utiles services aux astronomes, aux ingénieurs et aux marins.

G. Rayet.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

MATHEMATISCHE ANNALEN, publiées par MM. CLEBSCH et NEUMANN (¹).

T. II, 1870. 1er Cahier.

CLEBSCH (A.). — *Sur les complexes de Plücker.* (8 p.)

Soient x_1, x_2, x_3, x_4 et y_1, y_2, y_3, y_4 les coordonnées de deux points; les coordonnées de la droite qui les joint sont données par six déterminants $x_i y_k - y_i x_k$ formés avec les x et les y; l'équation d'un complexe est une fonction homogène de ces quantités. Mais entre celles-ci a lieu une équation identique du second degré, au moyen de laquelle on peut changer l'équation d'un complexe, sans que ce complexe lui-même change. Dans le présent Mémoire, l'auteur fait voir qu'il y a toujours une seule manière de modifier l'équation du complexe d'ordre $n\,(>1)$ de telle façon qu'entre les coefficients de cette équation il y ait les mêmes relations linéaires qu'entre ceux de l'expression symbolique $(a_x b_y - b_x a_y)^n$. Cette *forme normale,* très-commode dans certaines recherches, est appliquée aux complexes du second degré.

OKATOW (M.). — *Sur l'équilibre d'un fil pesant, dont l'axe forme une hélice.* (4 p.)

La forme et l'état intérieur du fil sont déterminés conformément à la théorie des tiges très-minces de Kirchhoff.

KORKINE (A.). — *Sur les intégrales des équations du mouvement d'un point matériel.* (28 p.; fr.)

L'auteur donne une étude complète de la question relative à l'ensemble des problèmes du mouvement d'un point sur une surface, qui admettent deux intégrales premières données. Il fait voir que ces intégrales et les forces agissantes se composent au moyen de certaines équations aux dérivées partielles. Ces dernières sont résolues dans le cas où les forces ne dépendent que des coordonnées du point.

KORNDÖRFER (G.). — *Représentation d'une surface du quatrième degré ayant une ligne double du second degré et un ou plusieurs points singuliers.* (24 p.)

(¹) Voir *Bulletin*, t. I, p. 124.

Ce Mémoire, comme celui du même auteur (T. I des *Annalen*), traite de quelques cas particuliers assez étendus des surfaces du quatrième ordre, à ligne double du second degré, dont M. Clebsch a donné la représentation pour le cas général, dans le T. 69 du *Journal de Borchardt*. Les cas étudiés sont ceux où la surface a, en outre, deux, trois ou quatre points singuliers, mais où la ligne double n'est pas spécialisée.

Güssfeldt (P.). — *Sur les courbes qui ont un pôle harmonique et une droite harmonique.* (63 p.)

Steiner a donné, dans le 47e volume du *Journal de Crelle*, une longue suite de propositions relatives en partie aux courbes algébriques à un centre, en partie à l'emploi de ces courbes dans la théorie des courbes en général, et en particulier de celles du troisième, du quatrième et du cinquième degré. M. Güssfeldt ayant entrepris de démontrer ces propositions, en tant du moins qu'elles sont nécessaires pour l'application aux courbes du troisième ordre, fait usage d'une méthode où sont mélangées les considérations purement géométriques avec les applications de la théorie des invariants et un emploi remarquable de la méthode de la notation symbolique. Pour rendre ces applications possibles, la condition du centre d'une courbe est généralisée projectivement, et remplacée par la suivante : il existe un point M et une droite G, tels que tout rayon mené par M coupe la courbe en deux points qui forment avec M et l'intersection des rayons avec G, pris comme points conjugués, un système harmonique. M est alors le pôle harmonique et G la droite harmonique.

Le travail se compose de trois Parties. Dans la première, l'auteur s'occupe du nombre des conditions auxquelles sont assujettis les coefficients d'une courbe douée d'un pôle harmonique M et d'une droite harmonique G, de la polaire du point M, des singularités d'une telle courbe, et de l'intersection de deux courbes qui ont le même point M et la même droite G. Enfin, il étudie le faisceau des premières polaires correspondantes aux points de G, et fait voir que $2n - 2$ courbes de ce faisceau ont un point double sur G.

La seconde Partie du travail établit l'équation de la courbe désignée par Steiner sous le nom de *polaire interne*. Cette courbe passe par les $\frac{n(n-1)}{2}$ couples de points d'une courbe générale du $n^{\text{ième}}$

degré qui sont conjugués par rapport à un point M et à une droite G choisis à volonté. Elle est du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre, et ces couples de points forment son intersection complète avec la courbe donnée. Les coefficients de l'équation de cette courbe sont, comme ceux de la polaire ordinaire (externe), linéaires par rapport aux coefficients de la courbe donnée, de sorte qu'à un faisceau de courbes correspond aussi un faisceau de polaires internes. A cela se rattache la démonstration des plus importantes propositions données par Steiner sur ces courbes.

La troisième Partie est la partie principale du Mémoire, et contient la démonstration de presque tous les remarquables théorèmes que Steiner a déduits de ces considérations relativement aux courbes du troisième ordre (§ 15 du Mémoire de Steiner). Les courbes du troisième ordre ont encore, en général, la propriété d'admettre un point M et une droite G, et ceux-ci peuvent être choisis de neuf manières différentes; on peut prendre pour M chacun des points d'inflexion, et pour G la droite harmonique correspondante, qui joint les points de contact des tangentes menées à la courbe par le point d'inflexion. Si l'on considère, d'autre part, la courbe par rapport à un point M et à une droite G choisis à volonté, la polaire interne de M sera une conique. La droite G restant fixe, il y a une conique particulière $\theta = 0$, sur laquelle M doit être situé, pour que la polaire interne se décompose en deux. Les droites dans lesquelles elle se décompose enveloppent une courbe de sixième classe $S_1 = 0$. De plus, les points de G jouissent encore eux-mêmes de cette propriété, que leur polaire interne se décompose en deux, et les droites dans lesquelles elle se décompose enveloppent une seconde courbe de sixième classe $F_1 = 0$.

A ces courbes s'en joignent encore quelques autres, moins faciles à définir, dont la classe, l'ordre et les relations mutuelles sont discutés. Ces courbes sont d'un haut intérêt, tant au point de vue géométrique qu'à celui de l'algèbre nouvelle. Comme elles contiennent les coordonnées d'une droite fixe, leurs équations sont des contrevariants (*Zwischenformen*), dans le sens employé par M. Aronhold, lorsqu'elles interviennent comme exprimées en coordonnées ponctuelles; en coordonnées tangentielles, ce sont des formes adjointes à deux séries de coordonnées tangentielles. Ainsi $\theta = 0$ est exactement la forme ainsi désignée par M. Aronhold dans le tome 55 du *Journal de Crelle*. Soit $F = 0$ l'équation de la courbe du troisième ordre en coor-

données tangentielles, a_{ikh} un coefficient de son équation en coordonnées ponctuelles, et soient γ_1, γ_2, γ_3 les coordonnées de G; alors $S_1 = 0$ prend la forme remarquable

$$\sum \frac{\partial F}{\partial a_{ikh}} \gamma_i \gamma_k \gamma_h = 0.$$

Drach (v.). — *Sur la théorie de la droite dans l'espace et des complexes linéaires.* (12 p.)

Ce Mémoire traite des complexes plückériens du premier degré, en vue de quelques relations *métriques* qui s'y rencontrent.

Weber (H.). — *Sur un problème de représentation conforme.* (3 p.)

Ce problème, résolu avec une remarquable simplicité, est celui de la représentation, avec similitude dans les éléments infinitésimaux, de la surface de la lemniscate sur un cercle, en faisant correspondre au centre du cercle, tantôt le centre de la lemniscate, tantôt un de ses foyers.

Mayer (A.). — *Le théorème du Calcul des variations qui correspond au principe de la moindre action.* (7 p.)

Les problèmes du Calcul des variations où l'on n'a à considérer que des intégrales simples peuvent toujours se ramener au cas où, sous le signe d'intégration aussi bien que dans les équations de condition, il n'entre que les *premières* dérivées des fonctions cherchées. Si en même temps la variable indépendante elle-même ne se présente nulle part explicitement, et que les équations de condition ne contiennent pas les dérivées, on voit alors que les équations différentielles du problème admettent une intégrale analogue à celle du principe des forces vives. Si, à l'aide de cette intégrale, on élimine de partout la différentielle elle-même de la variable indépendante, les équations différentielles du problème se trouvent encore des équations isopérimétriques; mais elles se rapportent à un autre problème, dans lequel une des anciennes fonctions inconnues joue maintenant le rôle de variable indépendante. En appliquant ces considérations à la Mécanique, on est conduit par l'intégrale $\int (T + U)\, dt$, au principe de la moindre action.

Si les équations de condition contiennent aussi les dérivées, l'intégrale en question n'existe plus; mais on peut alors employer une des équations de condition pour éliminer la différentielle de la va-

riable indépendante; les équations du problème conservent ainsi leur caractère isopérimétrique, et correspondent encore, après l'élimination, à un problème dans lequel une des anciennes fonctions inconnues joue le rôle de variable indépendante.

LINDELÖF (L.). — *Propriétés générales des polyèdres qui, sous une étendue superficielle donnée, renferment le plus grand volume* (10 p.; fr.)

L'auteur commence par donner une démonstration élégante de cette proposition, que, parmi tous les polyèdres entièrement convexes dont la direction des faces est donnée, celui qui a le plus grand volume, entre tous ceux de surface donnée, est circonscrit à une sphère. A cette proposition se rattache la démonstration du théorème énoncé par Steiner, que, si l'on fait varier aussi la direction des faces, le polyèdre de volume maximum sous une surface donnée a pour points de contact avec la sphère inscrite les centres de gravité de ses faces.

LINDELÖF (L.). — *Sur les limites entre lesquelles la caténoïde est une surface minima.* (7 p.; fr.)

L'auteur établit d'une manière élémentaire les limites entre lesquelles la chaînette, par sa révolution autour de sa directrice, engendre une surface minimum ([1]). On obtient ces limites, lorsque les tangentes menées aux extrémités de l'arc générateur se coupent sur la directrice.

RADAU (R.). — *Les équations différentielles de la Dynamique.* (15 p.)

L'auteur traite des avantages qui peuvent résulter des théories de Hamilton, de Jacobi, de Bertrand, dans l'étude du mouvement des planètes et dans le problème des trois corps.

NEUMANN (C.). — *Sur le mouvement de l'éther dans les cristaux.* (5 p.)

Note sur le Mémoire publié par l'auteur. (*Math. Ann.*, T. I.) ([2]).

HEINE (E). — *Extraits de deux lettres.* (5 p.)

Le premier de ces Extraits est relatif au développement de cos $n\varphi$ suivant les puissances de cos φ; le second à une démonstration rigoureuse des principes du calcul des variations.

([1]) *Voir* LINDELÖF et MOIGNO, *Leçons sur le calcul des variations*, p. 209.

([2]) Voir *Bulletin*, t. I, p. 132.

NEUMANN (C.). — *Sur les produits et les carrés des fonctions de Bessel.* (1 p.)

L'auteur donne trois théorèmes, au moyen desquels une fonction uniforme et continue à l'intérieur d'une certaine région peut, suivant qu'elle est paire ou impaire, se développer suivant les carrés ou les produits des fonctions de Bessel; et il détermine, en même temps, la limite de la région de convergence de ces développements.

2e Cahier.

CLEBSCH (A.). — *Sur la théorie des formes binaires du sixième ordre, et sur la trisection des fonctions hyperelliptiques.* (5 p.)

L'auteur donne un extrait d'un Mémoire plus développé, qui a paru dans le tome XIV des *Mémoires de la Société des Sciences de Göttingue,* et dont nous pouvons rendre compte en même temps que de l'extrait.

La question de ramener une forme binaire du sixième ordre f à la forme $u^3 - v^2$ est un problème déterminé; M. Cayley a établi complétement les équations qui ont lieu entre les invariants de f et les invariants simultanés de u et de v. Mais il s'agit ici du nombre et du groupement des solutions de ce problème. Il se trouve ici que ce problème coïncide avec celui de la trisection des fonctions hyperelliptiques dont l'irrationnalité est $\sqrt{f}$. Pour cette trisection, M. Camille Jordan a fait voir qu'elle conduit à une équation du 40e degré, qui se résout au moyen d'une équation du 27e degré. La même chose est démontrée ici algébriquement pour le problème de transformation de $f = u^3 - v^2$. Ce problème a 80 solutions qui, prises deux à deux, ne diffèrent que par le signe de v, et qui n'en forment ainsi, à proprement parler, que 40. Si l'une d'elles est donnée, la recherche des autres n'exige plus qu'une équation Hessienne du 9e degré, et peut se faire, par conséquent, à l'aide de radicaux. En étudiant de plus près ces relations, on voit que les racines de l'équation du 40e degré admettent un groupement de 2.45 groupes de quatre, que, par suite, l'équation du 40e degré conduit à une autre du 45e, qui donne les couples de groupes quadruples; mais les 40 racines de la première équation peuvent en même temps être formées de 27 manières au moyen de cinq couples de groupes quadruples, ce qui donne une réduction de l'équation du 40e degré à une du 27e.

Klein (F.). — *Sur la théorie des complexes de lignes du premier et du second degré*. (29 p.)

L'équation de condition du second degré, qui existe entre les six coordonnées de la ligne droite dans l'espace, peut se ramener, par des transformations linéaires, à la forme

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0.$$

Les variables x, égalées à zéro, représentent ici six complexes linéaires, qui se groupent ensemble d'une manière remarquable. Relativement à ces complexes, les droites s'assemblent 32 à 32, savoir, celles dont les coordonnées x ne diffèrent que par le signe. Si l'une de ces 32 droites tourne autour d'un point, la même chose a lieu pour 15 des autres; les 16 restantes se meuvent dans des plans. On rencontre un exemple de cette sorte de groupement dans les 16 points doubles et les 16 plans doubles des surfaces de quatrième ordre et de quatrième classe étudiées par Kummer.

Soit donné maintenant un complexe de lignes du second degré. On peut alors, en général, déterminer une certaine transformation linéaire, qui ramène l'équation de condition existant entre les coordonnées à la forme précédente et, en même temps, l'équation du complexe à une équation correspondante. De là résulte qu'un complexe du second degré est réciproque à lui-même par rapport à un système de six complexes linéaires de l'espèce considérée. Une équation a lieu pour les figures covariantes appartenant au complexe et, en particulier, pour la surface de Kummer, qui est le lieu des points dont le cône complexe se décompose en deux plans, et qui, en même temps, est enveloppée par deux plans dont les courbes complexes se décomposent en deux points. On obtient par là une série de théorèmes sur les complexes du second degré, et en particulier aussi sur la surface de Kummer. Par exemple, on a ces deux propositions :

« Le rapport anharmonique de quatre plans tangents d'une surface de Kummer passant par une droite donnée quelconque est égal au rapport anharmonique des points d'intersection de cette ligne avec la surface. »

« Si d'un point de la surface de Kummer on mène les six tangentes possibles à la courbe d'intersection; que pour chacun des points de contact on répète cette construction, et ainsi de suite ; on n'obtient pas ainsi une suite infinie de points, mais un système ren-

trant sur lui-même de 32 points jouissant de propriétés identiques, dont chacun est lié avec six des autres par des tangentes doubles de la surface. »

La représentation algébrique des figures en question s'établit très-simplement dans le système de variables pris pour base.

GORDAN (P.). — *Les systèmes simultanés de formes binaires.* (54 p.)

Ce Mémoire est un des plus importants qui aient paru jusqu'ici sur l'algèbre des formes binaires. La question de savoir si, au moyen d'un nombre fini d'invariants et de covariants, on peut former rationnellement sans dénominateurs tous les autres appartenant à une certaine forme, a été déjà traitée par M. Cayley dans ses *Memoirs upon Quantics,* et ce géomètre a cru devoir se prononcer pour la négative. Dans le tome 69 du *Journal de Crelle,* M. Gordan a repris cette question, en tant qu'elle concernait les formes binaires, et a fait voir qu'il y a au moins un système de formes, au moyen desquelles tous les invariants et covariants d'une forme binaire peuvent se représenter par des fonctions entières à coefficients numériques.

La démonstration compliquée, donnée dans ce premier Mémoire, a été simplifiée et rendue plus claire par l'auteur dans son nouveau travail, et il a en même temps étendu son théorème à un système quelconque de formes binaires *simultanées.* Il prend pour point de départ la définition des invariants et des covariants au moyen du théorème démontré par M. Clebsch, que tout invariant ou covariant rationnel peut se représenter par une somme de produits de déterminants symboliques et d'expressions linéaires symboliques. Cette proposition rend tout à fait inutile l'usage des équations aux différentielles partielles, et l'on n'a besoin d'employer que des méthodes élémentaires. Le théorème conduit en outre à démontrer que tous ces invariants et covariants résultent de superpositions répétées de formes simples. Par la $k^{\text{ième}}$ superposition (*Uebereinanderschiebung*) de deux formes, M. Gordan entend l'opération connue par laquelle, au moyen des deux formes f, φ, dont les expressions symboliques sont

$$f = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^n, \quad \varphi = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^\nu,$$

on forme l'expression

$$(a_1 \alpha_2 - a_2 \alpha_1)^k (a_1 x_1 + a_2 x_2)^{n-k} (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^{\nu-k}.$$

La conception d'un *système de formes complet* joue dans cette étude un rôle des plus importants. Un tel système jouit de la propriété que, de quelque manière que l'on opère les superpositions des formes du système, on retrouve toujours une fonction rationnelle et entière des formes elles-mêmes. La question est de montrer que, pour un système quelconque de formes fondamentales, on peut toujours construire un système de formes complet et fini. M. Gordan démontre d'abord l'existence de ce système de formes fondamentales, toutes les fois que, pour chaque forme fondamentale en particulier, il existe un système de formes complet et fini; puis, pour une seule forme fondamentale donnée quelconque de l'ordre n, et ici le cas où le nombre n est divisible par 4 exige des considérations particulières.

Dans les applications qui viennent ensuite, M. Gordan établit les systèmes de formes complets pour les formes isolées du deuxième, du troisième, du quatrième, du cinquième, du sixième degré, puis aussi pour des combinaisons de formes du premier, du deuxième, du troisième, du quatrième degré, et, en général, pour les combinaisons de systèmes complets donnés arbitrairement avec les formes du premier et du deuxième degré.

Müller (H.). — *Sur une affinité géométrique du cinquième degré* (12 p.)

Étant donnés deux plans, on prend sur chacun d'eux cinq points $p_1, p_2, \ldots, p_5, q_1, q_2, \ldots, q_5$. Si l'on choisit sur le premier un nouveau point p, sur le second un nouveau point q, q sera associé d'une manière *uniforme* (*eindeutig*) à p, si l'on exige que le faisceau des rayons menés de p aux points $p_1, p_2, \ldots, p_5$ soit projectif de celui des rayons menés de q à $q_1, q_2, \ldots, q_5$. Cela détermine une relation mutuelle entre les points des deux plans. Si p se meut en ligne droite, q décrit une courbe du cinquième ordre, qui aura $q_1, q_2, \ldots, q_5$ pour points doubles, et de plus un certain sixième point, auquel alors correspond uniquement la conique déterminée par cinq points $p_1, p_2, \ldots, p_5$.

En poursuivant l'étude de cette relation, on rencontre une suite de remarques intéressantes, qui sont, en partie, étroitement liées à la théorie des courbes du troisième ordre.

Nöther (M.). — *Sur la théorie de la correspondance uniforme des formes algébriques d'un nombre quelconque de dimensions*. (24 p.)

La division, donnée par Riemann, des équations algébriques entre deux variables suivant la classe p des fonctions abéliennes correspondantes, nous apprend que les courbes de même nombre p (de même genre) peuvent être rapportées uniformément l'une à l'autre. M. Clebsch a énoncé, sans démonstration, comme extension de cette proposition, un théorème analogue pour les surfaces à courbes doubles quelconques, dans les *Comptes rendus* de décembre 1868.

Le Mémoire de M. Nöther complète d'abord ce théorème, en prenant aussi en considération les points singuliers d'ordre supérieur de la surface, et en donnant la démonstration du théorème. Mais il va beaucoup plus loin. Il considère des équations algébriques entre des variables en nombre quelconque et montre comment on peut dans chaque cas les classer. C'est ce qu'il exprime par le théorème suivant :

« Le genre d'une équation homogène $f(z_1, z_2, \ldots, z_{r+2}) = 0$ est le nombre des constantes arbitraires qui demeurent dans une fonction $\theta(z_1, z_2, \ldots, z_{r+2})$ de degré $n-r-2$, qui s'annule, ainsi que ses $(\mu - r + h - 1)^{\text{ièmes}}$ dérivées pour toutes les figures algébriques contenues dans $f = 0$, pour lesquelles $h+1$ des quantités z restent arbitraires, et les dérivées de f, jusqu'à la $(\mu - 1)^{\text{ième}}$ inclusivement, s'annulent. Pour $\mu + h \overline{\gtrless} r$, il n'y a aucune condition à remplir. »

L'égalité du nombre p est la condition préalable nécessaire pour que deux figures algébriques se correspondent d'une manière uniforme.

Le même auteur a traité dans une Note (¹) les surfaces du genre $p = 0$, qui possèdent aussi des courbes du genre $p = 0$; et il fait connaître dans quels cas ces surfaces peuvent être représentées uniformément sur un plan, en indiquant un théorème général pour effectuer cette représentation.

Schröder (E.). — *Sur des algorithmes en nombre infini pour la résolution des équations.* (49 p.)

Ce Mémoire contient une théorie générale des méthodes de résolution des équations algébriques ou transcendantes, pourvu que la racine, réelle ou complexe, que l'on cherche jouisse de cette propriété, que le premier membre de l'équation soit continu dans le

(¹) *Gottinger Nachrichten*, 1870, n° 1.

voisinage immédiat de cette racine. Le caractère particulier de la méthode considérée consiste en ce que l'on part d'un nombre quelconque, et que l'on va en s'approchant de la racine cherchée par une suite d'opérations telles, par exemple, que celles de la méthode connue de Newton. L'auteur, entre autres, reproduit sous une forme concise une formule pour le développement en série d'une racine, qui avait été déjà donnée par Theremin, du moins pour les équations algébriques. Comparé aux séries de Lagrange et de Bürmann, ce développement a l'avantage de contenir une quantité arbitraire, par le changement de laquelle on peut obtenir *toutes* les racines.

Il faut distinguer entre la représentation des racines par des séries et par des expressions analogues (valeurs-limites, etc.), et les algorithmes proprement dits par lesquels on obtient des valeurs approchées par une suite de substitutions successives. L'auteur discute les espèces les plus remarquables de ces algorithmes, qui semblent avoir en grande partie échappé à l'attention des géomètres.

Klein (F.). — *La transformation linéaire générale des coordonnées de la ligne droite.* (5 p.)

Les coordonnées de la ligne droite dans l'espace peuvent toujours être considérées comme des variables quelconques, liées entre elles par une équation de condition du second degré. D'après cela, on peut se demander quelle est la signification d'une transformation linéaire générale de ces variables. La réponse se tire de la forme que prend, dans chaque cas, l'équation de condition.

Klein (F.). — *Sur la représentation des surfaces complexes de quatrième ordre et de quatrième classe.* (2 p.)

Ces surfaces constituent un cas particulier des surfaces de quatrième ordre à une droite double, dont M. Clebsch a donné la représentation dans le tome I des *Annalen*. La modification que subit ici la représentation générale est indiquée dans ce travail.

Clebsch (A.). — *Sur la possibilité de transformer linéairement l'une dans l'autre deux formes linéaires données.* (9 p.)

Le problème exige l'égalité des invariants simultanés; mais cette égalité n'est pas suffisante. L'auteur fait voir comment on peut effectuer la transformation :

1° Lorsque, jusqu'à un ordre impair $2n+1$, les deux formes ont des couples correspondants de covariants linéaires, a, b pour f, et

α, β pour φ, et que ni le déterminant de a, b, ni celui de α, β ne s'évanouissent;

2° Lorsque, jusqu'à un ordre pair $2n$, il existe des couples correspondants de covariants quadratiques, a, b pour f, et α, β pour φ, et que ni la résultante de a, b, ni celle de α, β ne s'évanouissent.

L'auteur indique alors quels sont les cas, dans les formes du cinquième et du sixième ordre, qui restent exclus de ces considérations.

Clebsch (A.). — *Sur la détermination des points d'inflexion d'une courbe du troisième ordre.* (3 p.)

MÉLANGES.

SUR UNE MÉTHODE NOUVELLE POUR L'ÉTUDE DES COURBES TRACÉES SUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES (1).

Le Mémoire de M. Clebsch dont nous voulons parler a pour titre : *Ueber die Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der vierten und fünften Ordnung.* « Sur la représentation des surfaces algébriques, et en particulier des surfaces du quatrième et du cinquième ordre. » (*Mathematische Annalen,* t. I, p. 253.) Ce travail considérable se divise en plusieurs paragraphes.

Le § Ier est intitulé : *Sur le degré de la courbe double d'une surface que l'on peut représenter sur le plan.* Imaginons une surface d'ordre N, et supposons que les coordonnées homogènes d'un de ses points soient données par les formules

$$(1)\quad \begin{cases} \rho x_1 = f_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \\ \rho x_2 = f_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \\ \rho x_3 = f_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \\ \rho x_4 = f_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \end{cases}$$

où ρ est un facteur indéterminé, et les quantités f des fonctions homogènes d'ordre n, des variables ξ_1, ξ_2, ξ_3, qui peuvent elles-mêmes être considérées comme les coordonnées d'un point dans le plan.

---

(1) Voir *Bulletin*, t. II. p. 23.

Alors, si l'on coupe la surface par le plan dont l'équation est

$$(2) \qquad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0,$$

on obtient une section plane, qui correspond, dans le plan, à la courbe dont l'équation est

$$(3) \qquad \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 + \alpha_4 f_4 = 0.$$

On voit donc que les sections planes de la surface sont représentées par les courbes d'ordre n du plan faisant partie du système à trois paramètres défini par l'équation (3).

Ces courbes (3) auront, en général, des points communs. Désignons par a_1 le nombre de points simples communs, par a_2 le nombre de points doubles, et, en général par a_i le nombre des points multiples et fixes d'ordre i, communs à toutes les courbes. On établit sans peine l'équation suivante entre le degré N de la surface et les nombres précédents,

$$(4) \qquad N = n^2 - a_1 - 4a_2 - 9a_3 - \ldots.$$

On obtient encore une autre équation par la remarque suivante, déjà faite et utilisée en plusieurs occasions par M. Clebsch. Les sections planes de la surface et leurs représentations se correspondent point par point; elles sont donc du même genre. D'après cela, si la surface a une courbe double d'ordre d et une courbe de rebroussement de degré r, toute section plane aura précisément d points doubles, r points de rebroussement. Son genre [1] sera donc

$$(5) \qquad p_1 = \frac{(N-1)(N-2)}{2} - d - r.$$

En l'égalant à celui de la représentation, on trouve

$$(6) \qquad p_1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - a_2 - 3a_3 - 6a_4 - \ldots.$$

Enfin, on obtiendra une inégalité si l'on exprime, comme cela doit être, que les quatre fonctions f_i sont distinctes, qu'elles ne sont pas liées par une équation linéaire; car il faut que les points par lesquels elles sont assujetties à passer et qui ne les déterminent pas entièrement soient en nombre tel que quatre coefficients arbitraires sub-

---

[1] Voir *Bulletin*, t. I, p. 139.

sistent dans l'équation de la courbe assujettie à les contenir, chacun avec le degré de multiplicité voulu. Il est clair, en effet, que, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait toujours établir une relation linéaire entre les quatre fonctions f_i et, par conséquent, entre les quatre coordonnées x_i, ce qui est absurde. On obtient ainsi l'inégalité

$$(7) \qquad 4 \overline{\gtrless} \frac{(n+1)(n+2)}{2} - a_1 - 3a_2 - 6a_3 - \ldots,$$

que l'on peut écrire, en tenant compte des équations (5) et (6),

$$(8) \qquad p_1 \overline{\gtrless} N - 2,$$

ou

$$(9) \qquad d + r \overline{\gtrless} \frac{(N-2)(N-3)}{2}.$$

Cette dernière inégalité, dans laquelle le premier membre est le degré de l'ensemble des courbes doubles ou de rebroussement, indique une limite inférieure, que ne doit pas atteindre le degré de cette courbe singulière, toutes les fois que la surface peut être représentée sur le plan.

Il y a cependant un cas d'exception qu'il faut signaler. On a supposé que les points par lesquels passent les courbes f_i sont indépendants ; mais on sait que, dans certains cas, une courbe que l'on assujettit à passer par certains points va passer par d'autres points dépendants des premiers ; par exemple, toutes les courbes du quatrième ordre, coupant une courbe de troisième ordre en huit points, vont passer nécessairement par un neuvième point situé sur la courbe. Ces neuf points et les systèmes analogues forment ce que M. Clebsch appelle un système de points d'intersection. Il est clair que n points formant un système ne tiennent pas lieu de n conditions ; lorsque la courbe passe par un nombre déterminé d'entre eux elle passe par les autres. Il résulte de là une modification de l'équation (4), qui devient

$$4 \overline{\gtrless} \frac{(n+1)(n+2)}{2} - a_1 - 3a_2 - 6a_3 - \ldots + \alpha,$$

d'où

$$p_1 \overline{\gtrless} N - 2 + \alpha, \quad d + r \overline{\gtrless} \frac{(N-2)(N-3)}{2} - \alpha.$$

L'équation (9) montre qu'une surface du quatrième ordre et une du cinquième ordre ne seront applicables que si elles ont : la première une droite double, la seconde une courbe double du troisième ordre.

Mais la remarque relative au système complet de points d'intersection montre que déjà une surface du cinquième ordre sera applicable, quand elle aura une courbe double se composant de deux droites qui ne se coupent pas. C'est, du reste, ce que la Géométrie rend évident.

Le § II est intitulé : *Représentation géométrique des surfaces à étudier sur le plan.* Laissant de côté les exemples dont nous avons dit quelques mots, nous examinerons spécialement les surfaces suivantes :

1° La surface du quatrième ordre ayant une droite double. — On commencera par démontrer que cette surface contient un certain nombre de coniques, rencontrant la ligne double, et non situées dans un même plan avec elle. Alors les droites, coupant la conique et la droite double, rencontreront la surface en *un* point non situé sur ces deux lignes; les coordonnées de ce point se détermineront individuellement.

2° La surface du cinquième ordre ayant deux droites doubles. — Toute droite rencontrant les deux droites doubles rencontrera la surface en *un* seul point non situé sur les deux droites.

3° La surface du cinquième ordre ayant pour courbe double une cubique gauche. — On sait que, par un point de l'espace, on peut mener une seule droite rencontrant deux fois la cubique gauche. Cette sécante coupera la surface en *un* point non situé sur la cubique gauche, et les coordonnées de ce point se détermineront, par exemple, en fonction des deux paramètres des points où la sécante rencontre la cubique gauche. Cette courbe double peut, d'ailleurs, se décomposer en une droite et une conique qui se coupent, etc.; mais, M. Clebsch fait voir que l'on ne peut substituer à la cubique gauche une autre courbe de troisième ordre, qui n'en serait pas un cas particulier, par exemple, la courbe formée de trois droites qui ne se coupent pas.

Le § III a pour titre : *Surfaces du quatrième ordre avec une droite double. Droites et coniques de cette surface.*

L'équation de cette surface est

$$A^2 w - 2BAv + B^2 u = 0, \tag{10}$$

où A, B sont des fonctions linéaires et u, v, w des fonctions du second degré des coordonnées; cette équation, déjà donnée par M. Kummer [1], résulte de l'élimination de λ entre les deux équa-

[1] *Monatsber. der Berl. Acad.*, séance du 16 juillet 1863, et *Journal de Borchardt*, t. 64, p. 66.

tions

$$(11) \qquad A + \lambda B = 0, \quad u + 2\lambda v + \lambda^2 w = 0.$$

Ces deux équations, quand on y fait varier λ, représentent une série de coniques, dont les plans passent par la droite

$$A = 0, \quad B = 0,$$

qui est la droite double ; mais la surface contient encore d'autres coniques en nombre limité. M. Clebsch démontre, en effet, en employant un remarquable théorème de M. Lüroth, la proposition suivante :

Il y a 64 plans tangents triples qui coupent chacun la surface en deux coniques. Chaque conique coupe la droite double en un point, etc..

Puisque l'on peut prendre, sur la surface, de 2.64 manières une conique rencontrant la droite double, il résulte, conformément à ce que nous avons dit plus haut, autant de manières d'effectuer l'application de la surface sur un plan. L'équation du soixante-quatrième degré, dont dépendent ces 64 coniques, se résout au moyen d'une équation du huitième et de plusieurs équations du second degré.

Les §§ IV et V sont consacrés à l'étude de la surface précédente, et des différents moyens de la représenter sur le plan.

Le § VI est intitulé : *Généralités relatives aux surfaces applicables sur le plan. Étude de leur intersection complète avec une autre surface.* M. Clebsch commence par développer les principes généraux qui sont indispensables pour l'étude qui va suivre. Soient les formules de la représentation

$$(12) \qquad \rho x_1 = f_1, \quad \rho x_2 = f_2, \quad \rho x_3 = f_3, \quad \rho x_4 = f_4,$$

et supposons, comme nous l'avons déjà fait, que les courbes

$$(13) \qquad \Sigma \alpha_i f_i = 0,$$

qui représentent les sections planes, soient du degré n, aient a_1 points simples communs, a_2 points doubles, etc. Ces points s'appellent, nous l'avons déjà dit, les points fondamentaux de la représentation. On a la proposition suivante :

Un point multiple d'ordre r commun à toutes les courbes (13) est la représentation d'une infinité de points de la surface. Ces points, en nombre infini, forment une courbe d'ordre r, jouissant de cette propriété spéciale que les coordonnées d'un de ses points s'expriment en fonction rationnelle d'un paramètre variable.

Cela posé, proposons-nous le problème suivant : Étant donnée une courbe d'ordre m passant α_1, α_2,... fois par les points simples fondamentaux, β_1, β_2,... fois par les points doubles fondamentaux, γ_1, γ_2,... fois par les différents points triples, etc., supposons que cette courbe plane ait, en outre, d points doubles et r points de rebroussement. Elle est la représentation d'une courbe tracée sur la surface. Soit M l'ordre de cette dernière, on a les équations

$$(14) \qquad \mathrm{M} = mn - \Sigma\alpha - 2\Sigma\beta - 3\Sigma\gamma - \ldots,$$

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} p = {} & \frac{(m-1)(m-2)}{2} - d - r \\ & - \sum \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} - \sum \frac{\beta(\beta-1)}{2} - \sum \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} - \ldots, \end{aligned} \right.$$

auxquelles il faut joindre l'inégalité

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} 1 \leqq {} & \frac{(m+1)(m+2)}{2} - \sum \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \\ & - \sum \frac{\beta(\beta+1)}{2} - \sum \frac{\gamma(\gamma+1)}{2} - \ldots - 3d - 4r. \end{aligned} \right.$$

Voici, maintenant, les formules qui donnent les singularités de la courbe tracée sur la surface. On suppose, pour plus de simplicité, que la surface n'a pas de courbe de rebroussement.

Soient B le nombre de points stationnaires de la courbe ;

R son rang ;

K sa classe ;

A le nombre des plans osculateurs coupant en quatre points consécutifs.

On a

$$\begin{aligned} \mathrm{B} &= r, \\ \mathrm{R} &= 2p - 2 + 2\mathrm{M} - \mathrm{B}, \\ \mathrm{K} &= 2p - 2 + 2\mathrm{R} - \mathrm{M}, \\ \mathrm{A} &= 2p - 2 + 2\mathrm{K} - \mathrm{R}; \end{aligned}$$

ou, si l'on substitue les valeurs de p et de M

$$(17) \qquad \mathrm{B} = r,$$

$$(18) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{R} = {} & m(m-3+2n) - 2d - 3r \\ & - \Sigma\alpha(\alpha+1) - \Sigma\beta(\beta+3) - \Sigma\gamma(\gamma+5) - \ldots, \\ \mathrm{K} = {} & 3m(m-3+n) - 6d - 8r \\ & - 3\Sigma\alpha^2 - 3\Sigma\beta(\beta+1) - 3\Sigma\gamma(\gamma+2) - \ldots, \\ \mathrm{A} = {} & 2m(3m+2n-9) - 12d - 15r \\ & - 2\Sigma\alpha(3\alpha-1) - 2\Sigma\beta(3\beta \ldots) \ldots - \Sigma\gamma(3\gamma+3) - \ldots \end{aligned} \right.$$

Ces formules prennent une forme extrêmement remarquable, si l'on suppose que la courbe d'ordre M tracée sur la surface soit l'intersection complète et indécomposable de la surface avec une autre surface d'ordre L. On a alors

$$(19) \qquad M = LN;$$

$$(20) \qquad p = Lp_1 + \frac{(LN-2)(L-1)}{2} - d - r,$$

où p_1 a la signification donnée plus haut (formule 6);

$$(21) \qquad \begin{cases} R = L^2N + L(N + 2p_1 - 2) - 2d - 3r, \\ K = 3L^2N + 6L(p_1 - 1) - 6d - 8r, \\ A = 6L^2N + 12L(p_1 - 1) - 2NL - 12d - 15r, \end{cases}$$

ce qui conduit à un résultat remarquable. Les singularités de la courbe d'intersection dépendent uniquement de l'ordre des deux surfaces, du genre de la section plane de la surface donnée et des nombres d et r. Le premier d indique en combien de points les deux surfaces sont tangentes, la courbe d'intersection ayant un point double au point de contact; le nombre r indique en combien de points les surfaces ont un contact d'ordre supérieur, le point de contact étant un point de rebroussement pour la courbe d'intersection des deux surfaces.

Cette courbe complète d'intersection de deux surfaces peut se décomposer. On peut signaler, en particulier, le théorème suivant :

Si la représentation sur le plan de la courbe d'intersection d'une surface d'ordre L *avec la surface proposée passe* $rL+1$ *fois par un point fondamental multiple d'ordre* r, *la courbe d'intersection des deux surfaces se décompose en deux parties, dont l'une est la courbe de la surface correspondant au point fondamental considéré, l'autre a pour représentation la courbe plane.*

Ce théorème est, du reste, à peu près évident, d'après ce que nous avons déjà dit. Considérons, par exemple, un point simple fondamental. A ce point simple correspond une droite entière de la surface. Si une surface d'ordre L coupe la surface proposée, suivant une courbe qui ait pour représentation une courbe plane douée d'un point multiple d'ordre $L+1$, au point fondamental, la surface

d'ordre L devra couper la droite en L + 1 points et, par conséquent, la contiendra tout entière.

Le § VII a pour titre : *Généralités. Représentation de la courbe double.*

Reprenons les formules qui donnent x_1, x_2, x_3, x_4,

$$\rho x_1 = f_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \ldots,$$

que l'on peut écrire, en adoptant avec M. Clebsch une abréviation commode et déjà souvent employée,

$$\rho x_i = f_i(\xi).$$

Il est clair que si, pour deux systèmes de valeurs des ξ, ξ_1, ξ_2, ξ_3; η_1, η_2, η_3, on a

$$f_1(\xi) = f_1(\eta), \quad f_2(\xi) = f_2(\eta), \quad f_3(\xi) = f_3(\eta), \quad f_4(\xi) = f_4(\eta),$$

à ces deux systèmes de valeurs correspondra le même point de la surface; et d'ailleurs, pour des valeurs très-voisines des ξ, on n'obtiendra pas, en général, le même point de la surface que pour un système de valeurs voisines des η. Le point unique correspondant aux deux systèmes ξ, η appartiendra donc à deux nappes de la surface; ce sera un point de la courbe double. M. Clebsch se propose de déterminer le degré et les équations de cette courbe.

En supposant que la surface n'a pas de courbe de rebroussement, et qu'il n'y a pas de point de la surface correspondant à une infinité de points du plan, on est conduit au résultat suivant :

La représentation de la courbe double est une courbe plane d'ordre $(N-4)n+3$, cette courbe plane passe $(N-4)r+1$ fois par un point fondamental d'ordre r. Le genre p' de cette courbe est donné par la formule

$$p' = \frac{(N^2 - 4N + 2)(N-3)}{2} - (N-4)p_1.$$

Comme chaque point de la courbe double se trouve sur deux nappes de la surface, et a pour représentation *deux* points du plan, la représentation d'une courbe double est donc dans une relation toute particulière avec la courbe double de l'espace. Mais nous n'insistons pas sur cette remarque de l'auteur.

Les §§ VIII, IX, X sont employés à l'étude développée de la surface du quatrième ordre ayant une droite double. Les sections planes sont représentées par des courbes du quatrième ordre, ayant 8 points

simples, et 1 point double communs. La surface contient 16 droites, une série de coniques et 128 coniques en dehors de cette série; la droite double a pour représentation la courbe du troisième ordre passant par les 9 points fondamentaux, etc. Pour toutes ces questions nous pouvons renvoyer au Mémoire original.

Les §§ XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI sont consacrés à l'étude de la surface du cinquième ordre ayant une ligne double du troisième ordre. Les sections planes sont représentées par des courbes du quatrième ordre. Ces courbes n'ont pas de points doubles et elles passent par 11 points fondamentaux. La surface contient 11 droites, 55 coniques : la courbe double contient 10 points, dans lesquels les plans tangents aux deux nappes de la surface coïncident. Elle est touchée suivant des courbes du dixième ordre par une série de surfaces du quatrième ordre; en un mot, l'étude est complète.

Les derniers §§ XVII, XVIII, XIX sont consacrés à l'étude de la surface du cinquième ordre ayant deux droites doubles. Ici la complication est plus grande. Les sections planes ont pour représentation des courbes du cinquième ordre ayant en commun 12 points simples et 2 points doubles *a*, *b*. Ces points fondamentaux, s'ils étaient arbitraires, équivaudraient à 18 conditions, et comme une courbe du cinquième ordre est déterminée par 20 points, il se présenterait la difficulté signalée dans le § Ier. Mais les points fondamentaux forment l'intersection complète de deux courbes du quatrième ordre, ayant un point double, l'une en *a*, l'autre en *b*. La surface contient 13 droites, 26 coniques, etc., etc.

En terminant son Mémoire, M. Clebsch fait remarquer que les considérations précédentes s'appliquent seulement aux surfaces les plus générales satisfaisant aux définitions posées. Si ces surfaces acquièrent des points multiples, des courbes de rebroussement, etc., un nouvel examen devient nécessaire; il est clair que l'on obtiendra une série de cas, si variée, qu'il est même difficile de se rendre compte de leur multiplicité. Dans un Mémoire, inséré aux *Mathematische Annalen*, t. I, p. 592, et t. II, p. 41, M. Korndörfer s'est précisément occupé de questions de ce genre; il a étudié par la méthode précédente quelques variétés de la surface du quatrième ordre à conique double.

G. D. (*A suivre.*)

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

TRAITÉ DE MÉCANIQUE RATIONNELLE, à l'usage des candidats à la licence et à l'agrégation; par H. LAURENT, lieutenant du Génie, répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique. — Paris, Gauthier-Villars; prix : 12 francs, 2 vol. in-8°, 1870.

Donnons d'abord une indication sommaire des Parties et des Chapitres; on pourra ainsi saisir parfaitement le plan de l'ouvrage et l'idée qui a dirigé son développement.

PREMIÈRE PARTIE. — *Cinématique.* — Mouvement d'un point matériel. — Étude du mouvement d'un corps solide. — Théorie des mouvements relatifs.

DEUXIÈME PARTIE. — *Statique.* — Statique du point matériel. — Théorie de l'équilibre. — Équilibre des corps solides. — Centres de gravité. — Mouvements d'inertie. — Équilibre des fils et des cordons. — Sur l'attraction.

TROISIÈME PARTIE. — *Dynamique du point matériel.* — Équations du mouvement. — Étude de quelques mouvement rectilignes. — Étude de quelques mouvements curvilignes. — Mouvement des points assujettis à rester sur des courbes ou des surfaces.

QUATRIÈME PARTIE. — *Dynamique générale.* — Principes généraux de la dynamique. — Équations canoniques du mouvement. — Mouvement des solides. — Hydrostatique et hydrodynamique. — Théorie des petits mouvements et de la stabilité de l'équilibre. — Application des principes de la mécanique rationnelle à la théorie des machines.

L'idée d'étudier les mouvements indépendamment des forces, émise par Carnot, il y a longtemps déjà, dans son *Essai sur les machines en général,* fut reprise par Ampère dans son *Essai sur la philosophie des sciences* (voir *Bulletin,* t. Ier, p. 297). Le mouvement peut s'étudier géométriquement, se mesurer; on arrive ainsi à un ensemble de propositions, n'empruntant rien à l'observation, qui constitue la *Cinématique*; il est donc très-rationnel de prendre la cinématique comme point d'appui de la statique et de la dynamique. Cette pre-

mière étude faite, quelques principes généraux dont l'idée, sinon la démonstration complète, est empruntée à l'expérience, nous permettent de comparer et, par suite, de mesurer les causes de ces mouvements, causes dont l'essence, d'ailleurs, nous échappe complétement. On peut alors considérer les forces en elles-mêmes, en faisant abstraction des effets qui nous ont servi à les mesurer, et combiner ces forces entre elles; on aura la *Statique*.

Ces deux études faites, on a pu aborder ce problème général : Quel est le mouvement que produisent des forces données? Quelles sont les forces qui produisent un mouvement observé? La *Dynamique*, par une synthèse d'une admirable simplicité, a pu renfermer dans une seule formule la solution de cette double question; c'est à l'analyse, seule en jeu maintenant, qu'il appartient de la dégager.

Cet ordre d'idées, qui nous semble parfaitement logique, est celui que l'auteur du Traité que nous analysons a adopté; c'est là un premier titre, très-sérieux, par lequel se recommande son ouvrage; car, la plupart de nos traités de Mécanique rationnelle ont conservé l'ancien ordre d'idées, et il était indispensable d'en avoir un qui, tout en restant dans le programme des matières exigées pour la licence, se développât dans le sens que nous venons d'indiquer.

Mais ce n'est pas là le seul des mérites du nouveau Traité. M. Laurent a eu l'excellente idée de donner les équations canoniques du mouvement; et, sans entrer dans tous les détails que comporte cette théorie, il donne assez de développements pour faire bien connaitre et apprécier les travaux de Lagrange, Hamilton, Jacobi, Bertrand, Bour, etc. Ce sont des questions qu'un licencié ne devait pas ignorer, et, cependant, il ne les rencontrait dans aucun des traités élémentaires de Mécanique rationnelle.

Si, abandonnant la vue d'ensemble, nous considérons les détails de l'ouvrage, nous devrons signaler particulièrement : la théorie de l'attraction, l'étude du mouvement elliptique, celle du mouvement de rotation d'un corps autour d'un point fixe, les applications faites à l'aide des formes canoniques, etc. Tout en se maintenant dans les limites du programme de licence, l'auteur a su donner à ces importantes questions plus d'étendue qu'on ne le fait habituellement.

La théorie de l'attraction, réduite avec raison à ses parties principales, est nettement discutée. Pour obtenir les formules de Jacobi,

l'auteur suit la méthode de Dirichlet; cette méthode est simple et élégante; il nous semble, néanmoins, qu'on aurait pu y joindre le développement des calculs classiques qu'il est également bon de connaître.

Le mouvement elliptique est étudié aussi complétement que le demande un traité théorique élémentaire qui ne doit pas s'appesantir sur des questions spéciales.

La question du mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, qui a été l'objet d'un si grand nombre de travaux, où les transformations analytiques de Jacobi disputent d'élégance avec les méthodes géométriques de Poinsot, a été présentée avec soin. Sans pousser très-loin la discussion de cette question, l'auteur en dit assez pour la faire bien comprendre et faire naître le désir d'étudier plus à fond les travaux des illustres géomètres qu'on vient de citer.

La question des mouvements relatifs est, comme dans l'ouvrage de Coriolis, abordée par le calcul; nous trouvons que l'auteur a raison en cela; car cette marche est, quoi qu'on en dise, logique et lumineuse; nous pensons cependant qu'il aurait pu y joindre une démonstration géométrique. Systématiquement, M. Laurent demande à l'Analyse, aux méthodes générales, la solution des problèmes de la Mécanique, et nous adoptons parfaitement son opinion sur ce sujet; mais, comme on ne doit pas être exclusif, nous admettons des exceptions. Et, quoiqu'il ne faille pas abuser de la superposition des démonstrations qui, comme les démonstrations analytiques et les démonstrations géométriques, sont aussi distinctes par leur essence que par leur origine, la question des mouvements relatifs a une telle importance, qu'on pouvait se permettre, en sa faveur, une dérogation à la règle générale.

L'auteur a encore introduit dans son Traité, ce que nous serions tenté d'appeler des innovations : il a donné des exercices et cité assez souvent les mémoires originaux.

Les exercices qu'il propose sont bien choisis, mais le nombre en est trop restreint. En Mécanique, comme dans toutes les parties de la science quand il s'agit des éléments, on ne doit pas craindre de multiplier les exercices; les uns permettent de mettre en œuvre les méthodes générales, de se rendre compte, soit du mécanisme analytique, soit des propriétés dynamiques des forces, des réactions, des

percussions, etc.; les autres font connaître des propositions, ou utiles ou intéressantes, qu'on ne peut pas développer dans un traité didactique, nécessairement limité.

Quant aux citations des mémoires originaux, l'auteur a encore été beaucoup trop sobre de détails; il y a toujours avantage, même pour celui qui commence l'étude d'une science, à être parfaitement renseigné sur les sources où il peut puiser et compléter les notions sommaires qu'on lui donne. Dans plusieurs circonstances, M. Laurent renvoie à d'autres traités pour y recueillir les indications relatives aux mémoires originaux; dans d'autres, les citations qu'il fait sont incomplètes. Or le lecteur ne peut qu'être reconnaissant des indications nombreuses qu'on lui fournit et qui lui évitent un travail pénible de recherches.

Une autre qualité de l'auteur, c'est de toujours insister sur la suite des idées, de toujours signaler ce qu'il y a d'incomplet dans certaines démonstrations, de préciser les restrictions qui se trouvent imposées. Sans adopter, d'une manière absolue, toutes les critiques qu'il fait, nous devons cependant reconnaître qu'il a souvent raison, et qu'il est toujours bon d'appeler l'attention du lecteur sur les points délicats que peut présenter soit une théorie, soit une démonstration.

Après cet aperçu sur les quantités d'ensemble, nous prierons l'auteur de vouloir bien nous permettre quelques observations sur les détails.

M. Laurent a souvent cherché la concision, soit dans les démonstrations, soit dans l'écriture des formules; il nous semble que l'excès contraire est préférable dans un traité qui s'adresse, d'après les intentions de l'auteur, à ceux qui commencent l'étude de la Mécanique. De plus, la discussion d'un certain nombre de questions n'est pas poussée, selon nous, aussi loin qu'elle devrait l'être.

Nous sommes obligés de dire qu'il reste dans l'ouvrage un assez grand nombre de fautes d'impression, et quelques-unes sont assez graves pour créer quelques embarras au lecteur novice; il est vrai qu'il est difficile d'échapper aux fautes d'impression, mais enfin il faut faire la part du feu aussi petite que possible.

Nous avons aussi remarqué, dans plusieurs problèmes, quelques inadvertances. Ainsi, pour le problème IV, t. I, p. 153, plusieurs facteurs numériques sont inexacts; mais la forme essentielle du résultat n'est pas atteinte.

Dans la recherche du centre de gravité du cylindre tronqué, t. I, p. 139, les constantes α, β, γ ne doivent plus avoir à la fin du calcul la même signification qu'au commencement, ce qui est un inconvénient assez grave, et l'auteur n'en avertit pas. Il est d'ailleurs facile de remédier au mal; il suffit de faire le choix d'axes convenables dès le commencement du calcul, et de définir alors, par rapport à ces nouveaux axes, le plan de troncature

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0;$$

le calcul, d'ailleurs fort simple, qui se trouve dans l'ouvrage, se développe alors sans modification aucune, et les résultats sont parfaitement exacts. L'auteur aurait pu faire remarquer que les coordonnées du centre de gravité vérifient l'équation

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \frac{p}{2} = 0.$$

Dans un certain nombre de problèmes, l'auteur suppose la masse égale à l'unité; c'est là une simplification illusoire qui nous paraît présenter plus d'inconvénients que d'avantages.

Enfin, nous remarquerons, contrairement à l'assertion de M. Laurent, que l'intégrale $\int_0^t 2T\,dt$ avait été désignée par Hamilton sous le nom de *fonction caractéristique*, et non sous celui de *fonction principale* (*Philosophical Transactions*, 1834, p. 252).

Parmi les nombreuses démonstrations que comporte une même proposition, M. Laurent a toujours eu le soin de choisir la plus simple, tout en se rapprochant autant que possible des méthodes directes. Cependant il nous semble que, dans certains cas, le choix pouvait être différent.

Ainsi, pour le théorème $(\alpha_i, \alpha_j) =$ const., la démonstration de Donkin (*Philosophical Transactions*, 1854) nous paraît préférable à à celle de Cauchy.

Quant à la résolution des équations (2e vol., p. 118)

$$\frac{\xi_1^2}{a_1+\lambda_i} + \frac{\xi_2^2}{a_2+\lambda_i} + \ldots + \frac{\xi_n^2}{a_n+\lambda_i} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

il y a une méthode tout aussi directe que celle de Jacobi et beaucoup

plus simple. Il suffit de remarquer que l'équation en λ

$$\frac{\xi_1^2}{a_1+\lambda}+\frac{\xi_2^2}{a_2+\lambda}+\ldots+\frac{\xi_n^2}{a_n+\lambda}=1$$

admet pour racines : $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Si l'on pose alors $a_1+\lambda=\tau$, les racines de l'équation

$$\frac{\xi_1^2}{\tau}+\frac{\xi_2^2}{a_2-a_1+\tau}+\ldots+\frac{\xi_n^2}{a_n-a_1+\tau}=1$$

seront $a_1+\lambda_1$, $a_1+\lambda_2, \ldots, a_1+\lambda_n$; en prenant, dans cette équation, le produit des racines, on trouve, sans qu'il soit besoin d'effectuer aucun calcul,

$$\xi_1^2=\frac{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)\ldots(a_1+\lambda_n)}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)\ldots(a_n-a_1)}.$$

Ce procédé est attribué, croyons-nous, à Chelini.

Nous n'insisterons pas davantage sur ces questions de détail. Si nous n'avons pas craint de formuler un certain nombre de critiques, qui ne portent d'ailleurs que sur des parties accessoires, c'est que nous avons considéré ce Traité comme un livre très-sérieusement fait. Le cadre en est bien dessiné; les idées sont amenées dans leur ordre logique; les démonstrations sont bien choisies, et l'auteur, tout en restant dans les limites étroites du programme de licence, a su placer son ouvrage à la hauteur des connaissances nouvelles. Ce Traité, qui doit devenir classique et qui se perfectionnnera certainement dans de nouvelles éditions, a le grand mérite de faire pénétrer dans l'enseignement élémentaire de la Mécanique des théories importantes, des méthodes fécondes qu'on ne saurait trop propager.

L. P.

BALTZER (R.). Theorie und Anwendung der Determinanten. Dritte verbesserte Auflage, Leipzig, Hirzel, 1870. — In-8°, 237 p. (¹).

Un compte rendu détaillé de l'ouvrage de M. Baltzer serait parfaitement inutile, et nos lecteurs connaissent soit la traduction

(¹) Baltzer (R.), *Théorie et applications des déterminants*; 3e édition, revue et augmentée.

française due à notre collaborateur M. Hoüel, soit les deux éditions originales publiées par l'auteur en Allemagne. La troisième, que nous avons sous les yeux, se distingue des précédentes par d'importantes additions. L'auteur a utilisé en particulier d'excellentes remarques qui lui ont été communiquées par MM. Borchardt, Kronecker, Weierstrass; plusieurs Chapitres de l'ouvrage ont été remaniés, surtout dans la partie consacrée aux applications. Nous signalerons, en particulier, un résumé des recherches de M. Borchardt sur les tétraèdres de volume maximum parmi ceux dont les faces ont des aires données. Lagrange, dans l'étude de cette question, avait été conduit à une équation du quatrième degré, qu'il n'a pas discutée complétement. M. Borchardt a, depuis, repris la question, en la généralisant, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, et c'est un extrait de ses recherches que nous présente M. Baltzer. Le Chapitre sur les déterminants fonctionnels a été beaucoup augmenté; nous sommes étonné seulement que M. Baltzer n'ait pas mis à profit la lumineuse exposition de cette théorie qu'a donnée M. Bertrand dans le *Journal de Liouville*. La définition qu'adopte M. Bertrand a l'avantage de se rattacher aux propriétés les plus élémentaires des déterminants; elle fournit la démonstration immédiate intuitive de tous les théorèmes relatifs aux déterminants fonctionnels, et éclaircit beaucoup la théorie de la transformation des intégrales multiples. Ajoutons que M. Kronecker a fait paraître, dans le *Journal de Borchardt*, t. 72, p. 152, une Lettre à M. Baltzer, qui contient une foule de remarques intéressantes sur différents points de la théorie des déterminants. C'est là un témoignage mérité d'estime qui nous dispense de louer M. Baltzer. G. D.

GRAINDORGE. — Mémoire sur l'intégration des équations de la Mécanique; dissertation inaugurale présentée pour l'obtention du diplôme de docteur spécial en sciences physico-mathématiques. Bruxelles, 1871.

M. Graindorge s'est proposé, dans cette thèse, de résumer les travaux de Lagrange, Hamilton, Jacobi, Bertrand, Bour, etc., sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Parmi les démonstrations, souvent nombreuses, des théorèmes principaux qui se présentent dans cette théorie, l'auteur a su choisir les

plus simples. Son Mémoire rendra donc service à ceux qui veulent aborder l'étude des mémoires originaux se rapportant à cette belle question. L. P.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

TRANSACTIONS OF THE ROYAL SOCIETY OF EDINBURGH (¹).

T. XXVI, 1re partie, 1869-70.

MAXWELL (J.-C.). — *Sur les figures, charpentes et diagrammes réciproques des forces.* (40 p.)

Deux figures rectilignes sont *réciproques*, lorsque chaque ligne de l'une est perpendiculaire à la ligne correspondante de l'autre, et que les lignes concourant en un point dans l'une des figures correspondent à des lignes formant un polygone fermé dans l'autre. Si l'on suppose que l'une des figures réciproques représente un système de points soumis à des tensions ou pressions dirigées suivant les lignes de la figure, et que les forces qui agissent suivant ces lignes soient représentées en grandeur, comme elles le sont en direction, par les lignes correspondantes de l'autre figure, alors chaque point de la première figure sera en équilibre.

Si la première figure représente une charpente dont les pièces soient considérées comme réduites à des lignes, l'autre figure représentera un système de forces qui tiendrait la charpente en équilibre; et si l'on a les données nécessaires pour déterminer ces forces, on pourra tracer la figure réciproque de manière à représenter, sur une échelle connue, les valeurs actuelles de toutes ces forces. On obtient ainsi une méthode graphique, qui peut remplacer le calcul, en fournissant beaucoup plus rapidement une approximation suffisante (²).

Le but du présent Mémoire est de développer l'idée des figures réciproques, d'en démontrer la connexion avec l'idée des polaires réciproques en mathématiques, et de l'étendre à des figures à trois dimen-

(¹) Voir *Bulletin*, t. I, p. 159.

(²) *Voir* un Mémoire de M. Fleeming Jenkin dans le volume précédent des *Transactions of the R. Soc. of Edinburgh*. (*Bulletin*, t. I, p. 161.)

sions et à des cas où les efforts, au lieu de s'exercer suivant des lignes, se distribuent d'une manière continue à l'intérieur d'un corps solide. L'auteur a été conduit à reconnaître la liaison de cette théorie avec celle d'une fonction très-importante, introduite par M. Airy dans son Mémoire : *On the strains in the interior of beams* (¹). Une longueur proportionnelle à cette *fonction de l'effort* étant portée sur une perpendiculaire élevée en chaque point d'une tranche plane en équilibre sous l'action des efforts intérieurs, on peut, à l'aide de la surface ainsi obtenue, construire simplement la résultante des efforts exercés par une portion de la tranche sur l'autre portion. Cette fonction sert à former les équations d'équilibre d'un corps élastique, principalement dans le cas des poutres homogènes.

SANG (E.). — *Sur l'extension de la méthode de Brouncker à la comparaison de plusieurs grandeurs.* (10 p.)

Lorsque le rapport de deux grandeurs dépend d'une équation du second degré à coefficients entiers, ce rapport peut se développer en fraction continue périodique, d'où l'on tire une loi récurrente pour la formation des termes des fractions qui expriment les valeurs indéfiniment approchées de ce rapport. M. Sang a fait voir que si l'on renverse la loi de récurrence qui sert à former les termes des fractions qui tendent vers l'une des racines de l'équation du second degré, on obtiendra les termes des fractions qui convergent vers l'autre racine.

L'algorithme, tiré primitivement de la considération des fractions continues périodiques, et qui permet de calculer des expressions indéfiniment approchées des racines d'une équation du second degré, peut être étendu de manière à fournir des valeurs approchées de la plus grande et de la plus petite racine d'une équation de degré quelconque à coefficients entiers.

Les fractions continues et les racines des équations du second degré qu'elles expriment ont pour origine la comparaison de deux quantités A, B, faite au moyen des équations

$$A = p_1 B + C, \quad B = p_2 C + D, \quad C = p_3 D + E, \ldots,$$

qui conduiraient à la plus grande commune mesure, si A et B étaient des quantités commensurables entre elles. Si l'on désigne par $\frac{P}{Q}$,

(¹) *Sur les efforts à l'intérieur des poutres* (*Philosophical Transactions*, 1863).

$\frac{P'}{Q'}$, $\frac{P''}{Q''}$ trois fractions convergentes consécutives de la fraction continue ainsi obtenue, on a, comme on sait,

$$\begin{vmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} P' & P'' \\ Q' & Q'' \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Considérons maintenant trois quantités A, B, C, et formons, par un algorithme analogue, les équations

$$\begin{aligned} A &= p_1 B + q_1 C + D, \\ B &= p_2 C + q_2 D + E, \\ C &= p_3 D + q_3 E + F, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

p_1, p_2, p_3,... étant des entiers tous différents de zéro; q_1, q_2, q_3,... des entiers pouvant s'annuler. Au moyen de ces entiers, on pourra former trois suites de nombres, dont les termes correspondants seront dans des rapports qui convergeront vers ceux de A, B, C. Si P, Q, R; P', Q', R'; P'', Q'', R''; P''', Q''', R''' sont quatre systèmes consécutifs de termes correspondants, on aura entre ces termes les relations

$$\begin{vmatrix} P & P' & P'' \\ Q & Q' & Q'' \\ R & R' & R'' \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} P' & P'' & P''' \\ Q' & Q'' & Q''' \\ R' & R'' & R''' \end{vmatrix} = + 1.$$

La comparaison de trois quantités pouvant conduire à la résolution d'une équation du troisième degré, comme l'auteur l'a montré dans un précédent Mémoire, on a ainsi un procédé pour le calcul approximatif des racines de ces équations. Cette méthode peut s'étendre à la comparaison d'un nombre quelconque de grandeurs.

TAIT. — ***Sur le théorème de Green et sur d'autres théorèmes qui s'y rattachent.*** (16 p.)

L'auteur a pour but, dans ce travail, de combler, au moins en partie, une lacune qu'il a remarquée depuis longtemps dans la théorie des quaternions. Pour appliquer cette théorie aux recherches générales concernant l'électricité, le mouvement des fluides, etc., il faut avoir les moyens de comparer les intégrales quaternionaires prises sur une surface fermée avec les intégrales prises à l'intérieur

de cette surface; ou encore les intégrales prises sur une portion non fermée de surface avec les intégrales prises le long de son contour. M. Tait s'est aperçu que, dans des Mémoires publiés dans le *Quarterly Math. Journal* et dans les *Proceedings* de la Société Royale d'Édimbourg, il avait déjà presque résolu la question, dont il donne maintenant la solution complète.

DEAS (Fr.). — *Sur les spectres formés par le passage de la lumière polarisée à travers les cristaux doublement réfringents.* (8 p.)

MAXWELL (C.). — *Appendice au Mémoire précédent.* (4 p.)

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, publiés par MM. les Secrétaires perpétuels (¹).

Tome LXXII.

N° 1. Séance du 2 janvier 1871.

YVON VILLARCEAU. — *Études sur le mouvement des meules horizontales de moulins à blé et méthodes pour les équilibrer.*

La théorie du mouvement des meules horizontales est à peine effleurée dans les traités de Mécanique appliquée; cette étude offre une application importante de la théorie du mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. M. Villarceau aborde la question à l'aide des formules données par Lagrange et déduit de son calcul *deux méthodes* pour équilibrer les meules horizontales.

Le Mémoire de M. Villarceau se trouve publié *in extenso* dans le *Journal de Mathématiques* de M. Liouville.

BIENAYMÉ. — *Rectification de listes d'articles détachés de* M. CAUCHY, *publiées dans deux catalogues différents, et restitution à* M. COURNOT *de quelques-uns de ces articles.*

« Lorsque les *Comptes rendus* de cette Académie n'existaient pas, notre illustre confrère M. Cauchy a souvent enrichi le *Bulletin des Sciences* de M. de Férussac par des Communications d'œuvres de sa

(¹) Voir *Bulletin*, t. I, p. 177.

plume féconde. C'étaient parfois des Mémoires entiers, ou des Rapports faits à l'Académie, parfois de simples Extraits de ses travaux. M. Cauchy attachait toujours son nom à ses publications, et il n'est pas possible de s'y méprendre. En France, personne ne pourrait lui attribuer d'autres articles, quelque remarquable que pût en être le sujet. Mais, à l'étranger, on a pu se tromper sur ce point, parce qu'on lit aussi, dans le même *Bulletin*, un assez grand nombre d'articles souscrits de deux lettres A. C., et parce que notre confrère, qui portait les prénoms d'*Augustin-Louis*, signait habituellement *Augustin Cauchy* ou *A. Cauchy*. Aucun des articles signés A. C. n'appartient à M. Cauchy; et il est si riche en ce genre, qu'on ne saurait lui faire le moindre tort en restituant au véritable auteur quelques-unes de ces pièces qui ont été comprises par erreur parmi les siennes dans des listes très-utiles aux hommes studieux, dressées en Angleterre et en Italie.

» C'est d'abord dans le *Catalogue of scientific Papers*, publié par la *Société Royale de Londres*, 1er vol., 1867, que se sont produites quelques confusions de cette espèce. On trouve dans les 467 numéros affectés au seul M. Cauchy, 17 articles du *Bulletin* de M. de Férussac. Sur ce dernier nombre 6 sont souscrits A. C., et ils sont la propriété de M. Cournot, dont le nom est bien connu de l'Académie. M. Cournot a reçu les prénoms d'*Antoine-Augustin*, et il signe habituellement *Augustin Cournot* ou *A. Cournot*. Dans le *Bulletin* de M. de Férussac, il mettait simplement A. C. au bas des nombreuses Notes qu'il donnait à ce Recueil. Mais, avec un peu d'attention, les rédacteurs du *Catalogue* de la Société Royale auraient trouvé son nom tout entier dans les tables du *Bulletin*, à l'indication des articles les plus importants, qui sont précisément ceux parmi lesquels ils en ont choisi quelques-uns pour les attribuer à notre éminent confrère.

» Voici la Notice exacte des six articles en question, qu'on peut voir dans les pages consacrées à M. Cauchy dans le *Catalogue* de la Société Royale de Londres :

» N° 34 du *Catalogue*; *Bulletin* de M. de Férussac, vol. VI, p. 1 :

» *Sur le calcul des conditions d'inégalité annoncé par M. Fourier.*

» Cet article rend compte de ce qu'on pouvait savoir du projet de M. Fourier par le peu que l'illustre auteur et M. Navier en ont dit. Des remarques judicieuses y sont développées par M. Cournot. On ignore malheureusement encore quel devait être le procédé simple et

uniforme que M. Fourier annonçait pour la résolution des inégalités linéaires.

» L'article porte les lettres A. C. Il n'y a pas d'autre indication dans la table du Cahier du *Bulletin*. Dans la table du volume, le nom de M. Cournot se lit en entier.

» N° 37 du *Catalogue*; *Bulletin* de M. de Férussac, vol. VII, p. 4 et 85 :

» *Sur les percussions entre deux corps durs qui se choquent en plusieurs points.*

» Ce travail, coupé en deux articles, offre plus d'une vue originale propre à M. Cournot.

» Il est signé A. C; mais, dans les tables des Cahiers et dans celle du volume, se trouve le nom de M. Cournot.

» N° 38 du *Catalogue*; *Bulletin* de M. de Férussac, vol. VIII, p. 165:

» *Extension du principe des vitesses virtuelles au cas où les conditions de liaison du système sont exprimées par des inégalités.*

» C'est un article original souscrit des lettres A. C. Mais le nom de l'auteur, M. Cournot, est indiqué dans les tables du Cahier et du volume du *Bulletin*.

» N° 42 du *Catalogue*; *Bulletin* de M. de Férussac, vol. IX, p. 10:

» *Sur la théorie des pressions.*

» L'auteur traite dans ce morceau très-intéressant du cas d'équilibre dont les pressions restent indéterminées si l'on se borne aux conditions purement statiques. Il rappelle les idées qu'il a émises dans les articles précédents du tome VII du *Bulletin* (ci-dessus n° 37). Il a appris postérieurement, dit-il, qu'Euler et Lambert avaient envisagé les cas dont il s'agit sous le même point de vue. Cela l'engage à développer le principe d'expérience, ou de raison, sur lequel il s'appuie, et qui constituerait ce qu'il appelle une *Dynamique latente*. Il paraît que bien plus récemment le savant M. Ménabrea a fait usage du même principe, sous le nom de *principe d'élasticité*.

» Les lettres A. C. sont seules à la fin de l'article. Le nom de Cournot est en entier dans les tables.

» N° 43 du *Catalogue*; *Bulletin* de M. de Férussac, vol. IX, p. 158:

» *Observations sur les conditions d'équilibre des fluides.*

» Ce court article rappelle la remarque de d'Alembert sur l'insuffisance de la condition d'intégrabilité pour l'équilibre d'un fluide, et

fait voir que cette remarque est une conséquence naturelle de la méthode d'Euler qui est suivie ordinairement dans les traités de Mécanique.

» Les lettres A. C. à la fin de l'article et le nom de Cournot dans les tables en indiquent clairement l'auteur.

» N° 61 du *Catalogue*; *Bulletin* de M. de Férussac, vol. XVI, p. 3:

» *Solution d'un problème d'Algèbre légale.*

» Il s'agit de l'application de l'article 757 du *Code civil* sur l'héritage, qui réduit le droit de l'enfant naturel, dans le cas d'existence d'enfants légitimes, au tiers de ce qu'il aurait eu s'il eût été légitime.

» On sait que cet article du code est d'une rédaction obscure tout au moins et qui met en évidence combien peu le raisonnement mathématique avait pénétré dans les esprits des jurisconsultes de l'époque. Aujourd'hui même on paraît ignorer quelle est la multiplicité des affaires dont la solution équitable dépend des connaissances arithmétiques, algébriques ou géométriques des juges. Ainsi toutes les questions tant discutées de l'intérêt de l'argent seraient depuis longtemps résolues, si des idées nettes et précises sur la nature de l'intérêt entraient dans l'éducation générale. Mais ce n'est pas le lieu d'insister sur ce point.

» La solution de M. Cournot paraît satisfaisante.

» L'article, quoique signé A. C., porte par erreur dans la petite table du Cahier le nom de M. Francœur; mais la table générale du volume XVI le restitue à M. Cournot. On sait d'ailleurs que cette solution est bien de lui.

» Il est aisé de reconnaître, même par ces courtes indications, que les articles de M. A. Cournot pouvaient être distingués de ceux de M. A. Cauchy, et en même temps que le sujet de plusieurs de ces articles n'était nullement indigne d'attirer l'attention toujours en éveil de notre illustre géomètre. Il était dès lors possible que les étrangers s'y trompassent, en compilant de nombreuses collections de Mémoires détachés pour en former l'immense *Catalogue* de pièces scientifiques mis par les soins et la libéralité de la Société Royale de Londres à la disposition du public.

» Les mêmes erreurs ont été reproduites dans un tableau qui fait suite à une analyse complète de l'ouvrage de M. Valson sur *la Vie et*

les Travaux de M. Cauchy, publié par le prince Boncompagni. Ce tableau a été rédigé par M. Narducci et se trouve, après l'analyse de M. Boncompagni, dans la livraison de février 1869 du *Bulletin de Bibliographie et d'Histoire des Sciences mathématiques et physiques* (*Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche*) qui parait à Rome. On sait que le prince en fait généreusement les frais, et qu'on y voit les recherches les plus curieuses sur d'anciens ouvrages pour la réunion desquels il n'épargne ni les soins ni les dépenses.

» Il suffira de peu de mots pour rapprocher les numéros du tableau de M. Narducci des indications du *Catalogue* de la Société Royale de Londres. Mais il est nécessaire de signaler auparavant une faute d'impression qui égarerait le lecteur du tableau.

» M. Narducci a classé les pièces de notre illustre confrère non pas seulement par ordre chronologique, comme l'a fait le *Catalogue* anglais, mais en réunissant toutes celles qui ont été insérées dans le même Recueil. Ainsi, sous le titre *Bulletin* de Férussac, il donne l'indication de vingt-deux articles de ce *Bulletin*.

» La faute d'impression consiste en ce qu'au lieu de

N° 5. — Vol. VII, p. 165 du *Bulletin;*
N° 6. — Vol. VIII, p. 333 du *Bulletin;*

il faut lire

N° 5. — Vol. VII, p. 333 du *Bulletin;*
N° 6. — Vol. VIII, p. 165 du *Bulletin.*

» L'article du vol. VII du *Bulletin,* p. 333, est en effet une Note de M. Cauchy en réponse à une remarque précédente d'un autre illustre Membre de l'Académie, M. Poinsot.

» L'article du vol. VIII du *Bulletin,* p. 165, appartient à M. Cournot, et c'est celui qui a été indiqué ci-dessus comme correspondant au n° 38 du *Catalogue* de la Société Royale de Londres.

» Cette rectification faite, les articles 3, 4, 6, 7, 8 et 20 du tableau de M. Narducci sont ceux qui ont été rapportés précédemment sous les n°s 34, 37, 38, 42, 43 et 61 du *Catalogue*.

» Il est juste de faire observer que M. Narducci, tout en suivant ce *Catalogue*, a dû constater directement l'existence de toutes les pièces qu'il cite, car il a soin d'avertir que ces six articles sont signés

A. C. seulement, et en outre, il donne une liste de quatre-vingt-onze autres pièces portant la même signature dans le *Bulletin* de Férussac. S'il avait consulté les tables de cette collection, il aurait, sans nul doute, opéré lui-même la rectification que cette Note a pour objet d'effectuer, et restitué au savant M. Cournot des morceaux de grand intérêt dont la réputation universelle de M. Cauchy n'avait nullement besoin. »

N° 2. Séance du 9 janvier 1871.

DELAUNAY. — *Lettre de Cassini IV au comte d'Angivillers, communiquée par* M. DELAUNAY.

La Lettre, dont une copie est présentée par M. Delaunay à l'Académie, est une de celles que Cassini IV a dû écrire pour arriver à la restauration de l'Observatoire.

LABROUSSE. — *Sur un appareil d'hélice à nacelle, emporté par un ballon qui s'est élevé de Paris le 9 janvier.*

Lettre de M. Labrousse à M. le Président.

N° 3. Séance du 16 janvier 1871.

MORIN (Le Général). — *Sur les cheminées d'appartement.*

M. le général Morin discute les propriétés de deux types de cheminées à l'aide des formules qu'il a données dans ses *Études sur la ventilation.*

CHASLES. — *Note relative à l'établissement de l'Observatoire.*

M. Chasles présente, à cette occasion, quelques observations critiques relativement à la Lettre communiquée dans la séance précédente par M. Delaunay.

N° 4. Séance du 23 janvier 1871.

DELAUNAY. — *Réponses aux observations de* M. CHASLES, *relatives à la Lettre de Cassini IV au comte d'Angivillers.*

N° 5. Séance du 30 janvier 1871.

LE HIR adresse une nouvelle Note relative à l'aérostation.

N° 6. Séance du 6 février 1871.

CHASLES. — *Réflexions sur les observations de* M. DELAUNAY *relatives à la Lettre du comte de Cassini.*

LEVEAU (G). — *Éléments et éphémérides de la petite planète* (103) HÉRA.

M. Leveau joint, à l'éphéméride qu'il présente pour la planète (103), les positions de la planète pour l'année 1871.

N° 7. Séance du 13 février 1871.

N° 8. Séance du 20 février 1871.

MEUNIER (STAN.). — *Situation astronomique du globe d'où dérivent les météorites.*

FONVIELLE (W. DE). — *Observations à propos de l'expédition du ballon* LE DUQUESNE.

N° 9. Séance du 27 février 1871.

JANSSEN. — *Lettre de* M. JANSSEN *à* M. LE SECRÉTAIRE PERPÉTUEL *sur les résultats du voyage entrepris pour observer, en Algérie, l'éclipse de Soleil du* 22 *décembre dernier.*

M. Janssen, qui avait reçu de l'Académie la mission d'observer cette éclipse, est parti en ballon de Paris, le 2 décembre 1870, à 6 heures du matin ; il arriva à Oran le 10 décembre. Toutes les précautions les plus habiles avaient été prises pour observer le phénomène général de l'auréole, en obtenir l'image spectroscopique et saisir l'aspect précis des formes de l'auréole aux divers points de la ligne centrale ; on avait eu le soin de multiplier les chances de succès. Mais un temps exceptionnellement mauvais rendit inutiles tous ces préparatifs ; aucune observation ne fut possible.

FLAMMARION (C.). — *Observation de la lumière zodiacale, le* 20 *février* 1871.

FONVIELLE (W. DE). — *Halo lunaire vu de deux stations différentes.*

N° 10. Séance du 10 mars 1871.

M. Bosramier soumet au jugement de l'Académie le manuscrit d'un opuscule qu'il se propose de publier sous le titre : « Tables nouvelles des logarithmes des nombres et des lignes trigonométriques à quatre et sept décimales, comprenant un recueil de formules, des tables usuelles et les logarithmes d'addition et de soustraction. »

Hennessy (H.). — *Remarques à propos d'une Communication de* M. Delaunay, *sur les résultats fournis par l'Astronomie, concernant l'épaisseur de la croûte solide du globe.*

La Communication de M. Delaunay a été faite dans la séance du 13 juillet 1866 ; les remarques de M. Hennessy portant sur la question de priorité.

M. Élie de Beaumont présente, à cette occasion, plusieurs observations sur le refroidissement du globe terrestre.

Renou. — *Sur les aurores boréales observées à Vendôme en* 1870.

Bourdin (J.). — *Sur un instrument analogue au compas aéronautique, décrit par* M. Janssen.

M. Janssen avait donné la description de cet instrument dans la séance du 27 février 1871.

N° 11. Séance du 13 mars 1871.

Delaunay. — *Observations relatives à l'hypothèse de la fluidité intérieure du globe terrestre, à l'occasion de la Lettre récente de* M. Hennessy.

« La Communication que j'ai faite à l'Académie, dans sa séance du 13 juillet 1868, relativement à l'hypothèse de la fluidité intérieure du globe terrestre, n'avait pas pour objet de faire connaître un résultat nouveau que j'aurais trouvé. Je me proposais seulement de combattre quelques idées qui me semblaient erronées, et qui étaient de nature à jeter quelque trouble dans l'esprit de ceux qui s'occupent de l'étude de la constitution de notre globe. Aussi ne me suis-je nullement préoccupé de rechercher si les considérations que je voulais mettre en avant avaient déjà été produites par d'autres. Je suis heureux d'apprendre, par la Lettre de M. Hennessy, insérée au dernier *Compte rendu,* qu'il avait déjà combattu, en 1851, les idées de

M. Hopkins, contre lesquelles je me suis élevé en 1868. Mais le fait que ces idées préoccupaient encore quelques géologues dans ces dernières années, d'autant plus qu'elles avaient été fortement appuyées par M. W. Thompson en 1863, montre que la Communication que j'ai faite à l'Académie sur ce sujet était loin d'être inutile. »

JORDAN (C.). — *Sur la résolution des équations les unes par les autres.*

Une des questions les plus générales que l'on puisse se proposer sur les équations est la suivante :

Déterminer les types les plus généraux d'équations irréductibles dont la résolution équivaut à celle d'équations auxiliaires appartenant toutes à un même type donné T (*ou à certains types donnés* T, T',...).

M. C. Jordan énonce plusieurs théorèmes généraux, applicables à tous les cas du problème, et qui resserrent notablement la question. Ce problème général donne lieu d'ailleurs à une infinité de questions particulières, dont chacune exige, pour être résolue en entier, des considérations spéciales.

M. C. Jordan ajoute ensuite plusieurs remarques nouvelles sur le problème de la résolution des équations par radicaux, et donne les trois tables numériques suivantes :

TABLE A. — *Du nombre* M *des types résolubles et primitifs de degré p (jusqu'au millionième degré)*;

TABLE B. — *Du nombre total* N *des types résolubles de degré* α *(jusqu'au dix-millième degré)*;

TABLE C. — *Des congruences irréductibles que servent à réduire en nombres la formule qui donne les substitutions du groupe résoluble (jusqu'au degré* 12000).

JANSSEN. — *Note sur le compas aéronautique.*

N° 12. Séance du 20 mars 1871.

LUTHER (R.). — M. *Delaunay* annonce à l'Académie qu'une nouvelle planète vient d'être découverte le 12 de ce mois, à Bilk, par M. *R. Luther.*

Apparition d'un météore lumineux dans la soirée du vendredi 17 *mars; observations faites par* MM. *Xambeu* et *Crevaux.*

N° 13. Séance du 27 mars 1871.

Saint-Venant (de). — *Formules donnant les pressions ou forces élastiques dans un solide, quand il y en avait déjà en jeu d'une intensité considérable avant les petites déformations qu'on lui a fait éprouver.*

Navier, en 1821, et, plus tard, Lamé et Clapeyron, ont établi les équations et les formules des forces élastiques des solides pour le seul cas où ces corps, avant les petits déplacements relatifs supposés subis par leurs points, se trouvaient dans l'état dit *naturel*, où aucune pression ou tension ne s'exerce à leur intérieur. Dans l'intervalle, Cauchy et Poisson établirent des formules plus générales, applicables lorsque des pressions d'une intensité quelconque étaient antérieurement en jeu. Celles de Cauchy conviennent à des corps *non isotropes* ou de contexture quelconque. Tel est l'historique que M. de Saint-Venant donne de la question actuelle.

Dans les formules de Cauchy, que M. de Saint-Venant prend comme point de départ, entrent certains coefficients, dits *coefficients d'élasticité* qui dépendent des distances où se trouvaient les molécules les uns des autres, au moment où agissaient les forces élastiques ou pressions intérieures initiales. Il était indispensable, surtout pour le problème actuel, d'exprimer ces coefficients en fonction des pressions initiales et d'autres coefficients d'élasticité, de *valeur fixe*.

C'est la recherche de ces expressions qui est l'objet de la Note de M. de Saint-Venant; il obtient ainsi des formules complétement générales, donnant les composantes des pressions et ne renfermant plus, comme coefficients d'élasticité, que des quantités mesurées pour un état constant.

Secchi (Le P.). — *Nouveaux résultats d'observations, concernant la constitution physique du Soleil.*

Curie. — *Sur la théorie de la poussée des terres.*

M. Curie, en présentant à l'Académie, un Ouvrage sur la théorie de la *poussée des terres*, ouvrage qui reproduit, à quelques modifications de détail près, un Mémoire qu'il avait présenté dans la séance du 21 décembre 1868, adresse une Note ayant pour but de faire voir que, dans le cas d'un remblai ordinaire dépourvu de cohésion, tel par exemple qu'un sable parfaitement sec, les théorèmes de Cauchy, énoncés par M. de Saint-Venant (*Comptes rendus*, 1870, p. 220), ne

sont pas tous trois applicables. M. de Saint-Venant avait rappelé ces théorèmes dans un Rapport sur une autre théorie relative à la *poussée des terres*, due à M. Maurice Levy, dans laquelle l'auteur se fonde sur les trois théorèmes en question.

LOEWY et TISSERAND. — *Observations de la nouvelle planète* LUTHER, *faites à l'Observatoire de Paris.* (*Voir* la dernière séance.)

Communications diverses relatives à l'apparition du bolide du 17 mars.

N° 14. Séance du 3 avril 1871.

SAINT-VENANT (DE). — *Formules donnant les pressions ou forces élastiques dans un solide, quand il y en avait déjà en jeu de considérables avant les petites déformations qu'on lui a fait éprouver.*

M. de Saint-Venant établit par une seconde méthode les formules générales qu'il avait déjà démontrées dans la séance précédente et signale plusieurs cas intéressants où elles se réduisent à une forme plus simple.

CHASLES. — *Détermination, par le principe de correspondance, de la classe de la développée et de la caustique par réflexion d'une courbe géométrique d'ordre m et de la classe n.*

M. Chasles précise d'abord le nombre des normales menées d'un point à une courbe; et formule cette proposition :

Le nombre des normales menées d'un point P *à une courbe* U_m^n, *d'ordre m et de la classe n, est* $(m+n)$.

Lorsque la courbe U_m^n *a un point multiple d'ordre r en chacun des deux points circulaires à l'infini, le nombre des normales qu'on peut lui mener d'un point donné est réduit à* $(m+n-2r)$.

Quand la courbe U_m^n *touche la droite de l'infini en un seul point, le nombre des normales est réduit à* $(m+n-1)$.

M. Chasles établit très-simplement ces diverses propositions par le *principe de correspondance*; nous devons ajouter que l'Analyse algébrique en fournit des démonstrations également fort simples.

Passant à la réflexion sur une courbe U_m^n, M. Chasles énonce et démontre le théorème général suivant :

Lorsque des rayons émanés d'un point Q *se réfléchissent sur une courbe* U_m^n, *les réfléchis enveloppent une courbe de la classe* $m+2n$.

Newcomb (S.). — *Théorie des perturbations de la Lune qui sont dues à l'action des planètes.*

L'extrait suivant, présenté par M. Newcomb, donnera une idée de l'objet de son Mémoire :

« On a coutume de considérer le problème du mouvement de la Lune autour de la Terre comme consistant à déterminer les perturbations du mouvement elliptique de ces deux astres autour de leur centre commun de gravité. Quand nous ne considérons que l'action perturbatrice du Soleil, cette méthode est la plus simple que les géomètres ont imaginée jusqu'ici. Mais lorsqu'on considère l'action d'un quatrième corps, tel qu'une planète, elle est sujette à plusieurs inconvénients, dont je ne signalerai que celui-ci : que la force perturbatrice du Soleil étant sensiblement différente à cause des perturbations que peut produire la planète dans le mouvement de la Lune, il faut tenir compte des produits de la force perturbatrice de la planète par les puissances successives de la force perturbatrice du Soleil, ce qui rend une solution rigoureuse du problème fort difficile.

» Dans le Mémoire que j'ai l'honneur d'offrir à l'Académie, j'ai tâché d'éviter ces difficultés en regardant la force perturbatrice du Soleil comme l'une des forces principales, et en posant le problème comme il suit :

» *Le problème des trois corps étant résolu, trouver les perturbations de leurs mouvements qui sont produites par l'action d'un quatrième corps, par la méthode de la variation des constantes arbitraires du mouvement, en faisant usage des formules générales de Lagrange.* »

M. Boussinesq. — *Étude nouvelle sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques dont certaines dimensions sont très-petites par rapport à d'autres.* Premier Mémoire : *Des tiges.*

Ce Mémoire a été publié dans le *Journal de Mathématiques* de M. Liouville année 1871 ; il en sera rendu compte dans l'analyse de ce journal.

MÉLANGES.

DÉMONSTRATION DE LA CONTINUITÉ DES RACINES D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE;

PAR M. OSSIAN BONNET.

Le théorème sur la continuité des racines d'une équation algébrique a été démontré pour la première fois par Cauchy, dans les nouveaux *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. II, p. 109; mais la démonstration de l'illustre géomètre, fondée sur la considération des contours imaginaires, n'est pas de nature à trouver place dans les éléments. Depuis, et quoiqu'il s'agisse d'une propriété tout à fait fondamentale sur laquelle reposent plusieurs théories importantes, notamment celle des asymptotes aux courbes algébriques de degré quelconque, aucun auteur, que je sache, n'a essayé de parvenir plus simplement au but. Je pense donc faire une chose utile en publiant ici une démonstration qui ne suppose que les notions élémentaires relatives à la composition des équations.

Je commencerai par bien préciser le sens que l'on doit attacher à la continuité des fonctions.

DÉFINITION I. — *Étant donnée une fonction réelle ou imaginaire, mais bien déterminée,* $\varphi(u)$ *d'une variable réelle ou imaginaire* u, *on dit : 1° que cette fonction tend vers une limite finie et déterminée* A, *à mesure que* u *tend vers une valeur particulière* u' [1], *lorsqu'après avoir fixé arbitrairement un nombre réel et positif* ε *aussi petit que l'on veut, il est possible de trouver un autre nombre réel et positif* h, *tel que, pour toute valeur de* u, *dont la différence avec* u' *a un module différent de zéro, mais inférieur à* h, *la valeur correspondante de* $\varphi(u)$ *ait avec* A *une différence dont le module soit compris entre zéro et* ε; *2° que* $\varphi(u)$ *tend vers l'infini à mesure que* u *tend vers* u', *lorsqu'après avoir fixé un nombre réel et positif* λ *aussi grand qu'on le veut, il est possible de trouver un autre nombre réel et positif* h, *tel que, pour toute valeur de* u *dont la différence avec* u' *a un module différent de zéro, mais infé-*

---

(1) Nous supposons u' fini; si l'on avait $u' = \infty$ on poserait $u = \frac{1}{v}$, et alors, regardant la fonction commme dépendant de v, on ferait tendre v vers zéro.

rieur à h, la valeur correspondante de $\varphi(u)$ ait un module toujours supérieur à λ.

DÉFINITION II. — *$\varphi(u)$ et u étant la même fonction et la même variable que dans la définition précédente, on dit que $\varphi(u)$ est continue par rapport à u pour $u = u'$, ou dans le voisinage de $u = u'$, lorsque $\varphi(u)$ a pour $u = u'$ une valeur finie et déterminée, et que cette valeur est la limite vers laquelle tend $\varphi(u)$ lorsque u tend vers u'.*

Cela posé, voici comment on peut énoncer le théorème sur la continuité des racines d'une équation algébrique.

THÉORÈME. — *Soit une équation algébrique de degré m*

$$(1) \qquad A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \ldots + A_{m-1} z + A_m = 0,$$

dans laquelle les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}, A_m$, réels ou imaginaires, sont des fonctions d'une variable réelle ou imaginaire u, continues par rapport à u pour $u = u'$. Faisons dans cette équation $u = u'$, ce qui donne une nouvelle équation à coefficients numériques bien déterminés et finis

$$(2) \qquad A'_0 z^m + A'_1 z^{m-1} + A'_2 z^{m-2} + \ldots + A'_{m-1} z + A'_m = 0.$$

Deux cas pourront se présenter : ou bien A'_0 étant différent de zéro, cette seconde équation sera de degré m comme l'équation (1) ; ou bien, quelques-uns des coefficients $A'_0, A'_1, A'_2, \ldots$ s'annulant, le degré de l'équation (2) s'abaissera et deviendra $m - n$, par exemple. Dans le premier cas, les m racines, fonctions de u de l'équation (1), tendront, à mesure que u tendra vers u', vers des limites finies et déterminées, et ces limites seront respectivement égales aux m racines de l'équation (2); dans le second cas, n racines de l'équation (1) tendront vers l'infini, et les $m - n$ autres tendront respectivement vers les $m - n$ racines de l'équation (2).

La démonstration de ce théorème repose sur une série de lemmes que nous allons successivement examiner.

LEMME I. — *Lorsque les coefficients $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_m$ du premier membre d'une équation algébrique*

$$(1) \qquad A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_{m-1} z + A_m = 0,$$

fonctions de u continues ou NON CONTINUES *par rapport à u pour* $u = u'$, *tendent cependant chacun vers une limite finie et déterminée, à mesure que u tend vers u', si la limite vers laquelle tend le premier coefficient* A_0 *est nulle une des racines au moins de l'équation tend vers l'infini à mesure que u tend vers u'.*

Supposons d'abord que la limite vers laquelle tend A_m ne soit pas nulle. Après avoir fixé un nombre réel et positif λ aussi grand qu'on voudra, et un autre nombre positif k plus petit que le module de la limite de A_m, il sera possible de trouver un nombre positif h tel que, pour toute valeur de u dont la différence avec u' aura un module différent de zéro, mais inférieur à h, le module a_0 de A_0 soit $< \frac{k}{\lambda^m}$, et le module a_m de A_m soit $> k$. Or, en appelant $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ les modules des racines de l'équation (1), on a, quel que soit u,

$$\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_m = \frac{a_m}{a_0};$$

par conséquent, quand u sera tel que le module de sa différence avec u' soit $< h$, on aura

$$\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_m > \lambda^m,$$

et, par suite, l'un au moins des modules $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$, sera plus grand que λ, ce qui prouve le lemme énoncé.

Supposons en second lieu que la limite de A_m soit nulle. Appelons z_0 un nombre réel ou imaginaire tel que l'expression

$$A_0 z_0^m + A_1 z_0^{m-1} + \ldots + A_{m-1} z_0 + A_m,$$

qui tend évidemment vers une limite déterminée et finie, ne tende pas vers zéro, à mesure que u tend vers u'; substituons à l'équation (1) celle que l'on obtient en remplaçant dans son premier membre z par $z + z_0$, et que nous appellerons

$$(2) \qquad B_0 z^m + B_1 z^{m-1} + \ldots + B_{m-1} z + B_m = 0;$$

les racines de cette nouvelle équation seront celles de l'équation (1), diminuées chacune de z_0; donc leurs modules seront respectivement inférieurs aux modules des racines de l'équation (1), augmentés chacun du module de z_0; par conséquent, pour démontrer qu'une racine au moins de l'équation (1) tend vers l'infini à mesure que u

tend vers u', il suffira de démontrer que la même chose a lieu pour une racine de l'équation (2). Or les coefficients $B_0, B_1, \ldots, B_{m-1}$, B_m, qui sont des fonctions linéaires de $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}, A_m$, tendent chacun vers une limite finie et déterminée à mesure que u tend vers u'; B_0, qui est égal à A_0, a pour limite zéro; enfin B_m, qui est égal à

$$A_0 z_0 + A_1 z_0^{m-1} + \ldots + A_{m-1} z_0 + A_m,$$

a une limite différente de zéro; donc....

LEMME II. — *Lorsque les coefficients* $A_0, A_1, \ldots, A_m$ *du premier membre d'une équation algébrique de degré m*

$$A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_m = 0,$$

fonctions de u continues ou non continues par rapport à u pour $u = u'$, *tendent cependant chacun vers une limite finie et déterminée, à mesure que u tend vers u', si la limite vers laquelle tend le dernier coefficient* A_m *est nulle, une des racines au moins de l'équation tend vers zéro, à mesure que u tend vers u'.*

En effet, dans l'équation aux inverses des racines de l'équation proposée

$$A_m z^m + A_{m-1} z^{m-1} + \ldots + A_1 z + A_0 = 0,$$

une des racines au moins tend vers l'infini à mesure que u tend vers u'.

LEMME III. — *Lorsque les coefficients* $A_0, A_1, \ldots, A_m$ *du premier membre d'une équation algébrique de degré m*

$$A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_{m-1} z + A_m = 0,$$

fonctions de u, continues ou non continues par rapport à u pour $u = u'$, *tendent cependant chacun vers une limite finie et déterminée, à mesure que u tend vers u', si les limites respectives vers lesquelles tendent les n derniers coefficients* $A_{m-n+1}, A_{m-n+2}, \ldots, A_m$ *sont nulles, n racines de l'équation tendent vers zéro, à mesure que u tend vers u'.*

Il résulte d'abord de ce que le dernier terme A_m tend vers zéro, qu'un certain nombre de racines de l'équation tendent aussi vers zéro. Cela posé, il suffit évidemment, pour établir la propriété énoncée, de démontrer la réciproque de cette propriété, c'est-à-dire de

faire voir que si n racines de l'équation tendent vers zéro à mesure que u tend vers u', les n derniers coefficients de l'équation ont aussi zéro pour limite. Soient donc z_1, z_2,..., z_n, n racines de l'équation proposée tendant vers zéro à mesure que u tend vers u', les $m-n$ autres n'étant assujetties qu'à la condition de ne pas tendre vers zéro, et pouvant dès lors, ou ne tendre vers aucune limite, ou bien avoir une limite différente de zéro. Posons

$$(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)=z^n+B_1z^{n-1}+B_2z^{n-2}+\ldots+B_{n-1}z+B_n,$$

et

$$\begin{aligned}&A_0z^m+A_1z^{m-1}+\ldots+A_{m-1}z+A_m\\&\quad=(z^n+B_1z^{n-1}+\ldots+B_n)(A_0z^{m-n}+C_1z^{m-n-1}+\ldots+C_{m-n}).\end{aligned}$$

Les coefficients $B_1, B_2,\ldots, B_n$, qui sont des fonctions entières et homogènes de $z_1, z_2,\ldots, z_n$, tendront tous vers zéro, et les coefficients $C_1, C_2,\ldots, C_{m-n}$, qui sont des fonctions entières de $A_0, A_1,\ldots, A_m$, $B_1, B_2,\ldots, B_n$, tendront chacun vers une limite finie et déterminée, à mesure que u tendra vers u'. De plus, la limite de C_{m-n} ne sera pas nulle, sans quoi l'équation proposée aurait plus de n racines tendant vers zéro. Mais en égalant les coefficients des $(n+1)$ derniers termes des deux membres de la dernière égalité, on a

$$\begin{aligned}A_m&=B_nC_{m-n},\\A_{m-1}&=B_{n-1}C_{m-n}+B_nC_{m-n-1},\\A_{m-2}&=B_{n-2}C_{m-n}+B_{n-1}C_{m-n-1}+B_nC_{m-n-2},\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\A_{m-n+1}&=B_1C_{m-n}+B_2C_{m-n-1}+B_3C_{m-n-2}+\ldots,\\A_{m-n}&=C_{m-n}+B_1C_{m-n-1}+B_2C_{m-n-2}+\ldots.\end{aligned}$$

De là résulte que $A_m, A_{m-1},\ldots, A_{m-n+1}$ tendent vers zéro, mais que A_{m-n} ne tend pas vers zéro, lorsque u tend vers u'. C. Q. F. D.

LEMME IV. — *Lorsque les coefficients* A_0, $A_1,\ldots, A_m$ *du premier membre d'une équation algébrique de degré m*

$$A_0z^m+A_1z^{m-1}+\ldots+A_{m-1}z+A_m=0,$$

fonctions de u, continues ou non continues par rapport à u pour $u=u'$, *tendent cependant chacun vers une limite finie et déterminée, à mesure que u tend vers u', si les limites respectives vers lesquelles tendent les n*

premiers coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ *sont nulles, n racines de l'équation tendent vers l'infini à mesure que u tend vers u'.*

En effet, dans l'équation aux inverses de la proposée

$$A_m z^m + A_{m-1} z^{m-1} + \ldots + A_1 z + A_0 = 0,$$

n racines tendent vers zéro, à mesure que u tend vers u'.

Les lemmes qui précèdent conduisent immédiatement au théorème sur la continuité des racines, énoncé ci-dessus.

Reprenons l'équation

$$(1) \qquad A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_{m-1} z + A_m = 0,$$

dans laquelle nous supposerons maintenant les coefficients continus par rapport à u pour $u = u'$, et l'équation

$$(2) \qquad A'_0 z^m + A'_1 z^{m-1} + \ldots + A'_{m-1} z + A'_m = 0,$$

obtenue en faisant, dans la première, $u = u'$. Si l'on a d'abord

$$A'_0 = A'_1 = \ldots = A'_{n-1} = 0 \quad \text{et} \quad A'_n \gtrless 0;$$

à cause de la continuité, les n premiers coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ de l'équation (1) tendront vers zéro à mesure que u tendra vers u'; donc n racines de cette équation tendront vers l'infini à mesure que u tendra vers u' (lemme IV). On verrait de même, par le lemme III, que si $A'_m = A'_{m-1} = \ldots = A'_{m-n+1} = 0$ avec $A'_{m-n} \gtrless 0$, c'est-à-dire si l'équation (2) a n racines nulles, l'équation (1) a n racines qui tendent vers zéro, à mesure que u tend vers u'. Mais il faut encore faire voir que si l'équation (2) a n racines égales à un nombre quelconque réel ou imaginaire, l'équation (1) a n racines qui tendent vers le nombre, à mesure que u tend vers u'. En effet, remplaçons, dans les équations (1) et (2), z par $z + z_0$, ce qui donnera

$$(3) \qquad B_0 z^m + B_1 z^{m-1} + \ldots + B_{m-1} z + B_m = 0$$

à la place de (1), et

$$(4) \qquad B'_0 z^m + B'_1 z^{m-1} + \ldots + B'_{m-1} z + B'_m = 0$$

à la place de (2). L'équation (4), ayant pour racines celles de (2) diminuées chacune de z_0, aura n racines nulles; mais cette équation est ce que devient (3) quand on y remplace u par u'. D'ailleurs, les

coefficients $B_0, B_1, \ldots, B_m$ du premier membre de l'équation (2), fonctions linéaires de $A_0, A_1, \ldots, A_m$ sont continus par rapport à u pour $u = u'$; donc l'équation (3) a n racines qui tendent vers zéro, à mesure que u tend vers u' : donc l'équation (1), qui a pour racines celles de (3) augmentées chacune de z_0, a n racines qui tendent vers z_0. C. Q. F. D.

SUR UNE MÉTHODE NOUVELLE POUR L'ÉTUDE DES COURBES TRACÉES SUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES (¹).

Avant de parler des recherches nombreuses qu'ont suscitées sur le sujet dont nous nous occupons (représentation des surfaces sur un plan) les beaux travaux de MM. Chasles, Clebsch, Cremona, nous devons parler de l'extension toute récente et très-importante que M. Clebsch a donnée à ses méthodes, en ce qui concerne la représentation d'une surface, sur un plan. Pour faire comprendre les principes nouveaux que nous avons à développer, il est nécessaire d'insister sur la remarque suivante, qui fera bien comprendre le caractère des nouvelles études publiées par l'éminent géomètre de Göttingue.

Si nos lecteurs veulent bien se reporter aux deux articles qui précèdent, ils verront que, alors même que la représentation sur un plan est possible, cette représentation, pour être effectuée, suppose qu'on ait résolu d'abord un certain nombre d'équations algébriques. C'est ainsi que la représentation d'une surface du troisième ordre ne peut être développée que si l'on connaît deux droites de la surface ne se coupant pas, et, par suite, la détermination de tous les modes de représentation exige la résolution préalable de l'équation aux 27 droites de la surface. Pour la surface du quatrième ordre ayant une conique double, il faut commencer par trouver les 16 droites de la surface, problème qui se ramène à la résolution d'une équation du cinquième ordre et à celle de plusieurs équations quadratiques. Pour la surface du quatrième ordre ayant une droite double sans autre singularité, on a à déterminer 64 coniques isolées de la surface, indépendantes de la série de coniques dont les plans passent par la

---

(¹) Voir *Bulletin*, t. II, p. 23.

droite double, et nous avons vu que ce problème se ramène à la résolution d'une équation du 8e degré.

Il est vrai qu'à côté des surfaces de ce genre viennent s'en placer d'autres, pour lesquelles la représentation est possible d'une seule manière. Par exemple, une surface d'ordre n, ayant un point multiple d'ordre $n-1$, peut être projetée sur un plan par des droites contenant le point multiple, et ce mode de représentation est en général le seul au moyen duquel la surface puisse être représentée sur le plan. De même pour la surface du cinquième ordre ayant deux droites doubles, qu'on projette sur un plan au moyen de droites rencontrant les deux droites doubles, etc.

Ainsi les surfaces représentées sur le plan se divisent en deux classes. Pour les premières, la représentation se fait d'une seule manière; et comme la représentation est unique, elle n'exige, pour être effectuée, aucune recherche préalable, ni la résolution d'aucune équation compliquée. Pour les autres, au contraire, qui sont les plus importantes, la représentation ne peut être effectuée qu'après une détermination préalable de certains éléments géométriques. Cette détermination s'effectue par la résolution d'une équation algébrique, et l'on peut dire que c'est l'étude de cette équation qui constitue la principale difficulté du problème de la représentation. D'ailleurs, quand cette équation est résolue, elle fournit un nombre déterminé de représentations équivalentes de la surface. C'est ainsi que, lorsqu'on connaît les 27 droites de la surface du troisième ordre, on peut en employer deux quelconques ne se coupant pas, ou employer des séries de coniques A, B, telles que deux coniques appartenant à deux séries différentes se coupent en un point unique, etc.

Toutes ces difficultés ne se présenteraient pas évidemment, si, tout en représentant une surface sur le plan, on n'exigeait pas qu'à un point du plan correspondît un seul point de la surface. Supposons, par exemple, qu'on projette tout point de la surface du troisième degré F_3 sur un plan P par des droites menées d'un point O. Alors, à tout point de F_3, correspond un seul point du plan P; mais la réciproque n'est pas vraie. A tout point du point M du plan P correspond une droite OP, qui coupe la surface en trois points M', M'', M''' correspondant tous les trois au même point M du plan P. Si l'on considère, par une image commode, le plan P comme composé de trois feuilles, le point M de ce plan pourra être considéré comme la

réunion de trois points situés chacun dans une feuille, et qui correspondent respectivement aux trois points M', M'', M''' de la surface. On dit alors que la surface est représentée sur un plan triple, et cette représentation s'effectue sans difficulté et d'une infinité de manières, suivant la position choisie pour le point O. Remarquons que, si le point O se trouve sur la surface F_3, toute droite passant par O coupe la surface en deux nouveaux points, et celle-ci est alors représentée sur un plan double, c'est-à-dire qu'à un point du plan P ne correspondent que *deux* points de la surface.

Ce second mode de représentation sur un plan multiple a été, comme le premier, employé depuis longtemps pour les surfaces du second ordre. C'est surtout M. Chasles qui a étudié les propriétés auxquelles il donne lieu. Si nous ne nous trompons, les premiers travaux de M. Chasles sur cette question datent de 1828, et sont insérés dans le tome XIX, nos 5 et 6, des *Annales de Gergonne*. Nous ne mentionnerons ici qu'une propriété très-simple : c'est que les sections planes de la surface se projettent suivant des coniques ayant un double contact avec la courbe de contour apparent de la surface, en sorte que toute conique ayant un double contact avec la conique de contour apparent sera la projection de deux sections planes de la surface. Si, comme nous l'avons dit plus plus haut, le plan est considéré comme composé de deux feuilles, ces deux feuilles viendront se réunir l'une à l'autre en tous les points de la courbe de contour apparent (car à ces points correspondent deux points confondus de la surface). Cette courbe et celles qui jouisssent de la même propriété dans toutes les représentations sur un plan multiple sont appelées, par M. Clebsch, *courbes de passage* (*Uebergangscurven*). Sans image, la courbe de passage est le lieu des points pour lesquels deux des points de la surface qui correspondent à un point du plan viennent se confondre.

Quelle est l'utilité de ce nouveau mode de représentation? Il est facile de répondre à cette question. Dans tout mode de représentation de cette nature, les sections planes se représentent par des courbes qui peuvent passer par des points fixes, ou avoir des points multiples en des points fixes, mais qu'*on achève de déterminer* par cette condition que *ces courbes représentatives doivent être tangentes à la courbe de passage en un certain nombre de points*. Or M. Clebsch a montré que tous les problèmes de cette nature se ramènent à la bis-

section des fonctions abéliennes. On voit donc que l'étude des équations algébriques déterminant les droites, coniques, sections planes particulières des surfaces applicables sur le plan est ramenée à l'étude des équations algébriques qu'on rencontre dans la bissection des fonctions abéliennes (¹). M. Clebsch, fidèle à sa méthode constante, a commencé par développer des cas particuliers, en ne considérant que la représentation sur un plan double, et des surfaces déjà presque toutes étudiées par lui. Mais il est facile d'embrasser dès à présent toute l'étendue du champ nouveau de recherches dans lequel nous introduisent ces travaux du géomètre allemand. Nous allons maintenant examiner en détail les deux Mémoires que M. Clebsch consacre à la représentation sur un plan double des surfaces qu'on peut déjà représenter sur un plan simple. G. D.

(*A suivre.*)

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Davidson (L.-A). — The Elements of Practical Perspective. 12°, 98 p. London, Cassel. 3 sh.

Falk (M.). — Om konvergensen och divergensen af kjedebråk med hvarannan led positiv, och hvarannan negativ. 8°. 20 sid. Upsala, Akademiska bokhandeln. 35 öre.

Frischauf (L.). — Elemente der Geometrie. Gr. 8°. Graz, Leuschner & Lubensky. 26 Ngr.

Gauss (F.-G.). — Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Handtafel. Imp. Fol. Berlin, Rauh. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Zachariæ (G.). — De mindste Kvadraters Methode. Til Brug ved Undervisningen i Officerskolens Stabs Afdeling. (Nyborg) Kjöbenhavn, Hagerup. 2 Rd. 48 Sk.

Zuleger (J.). — Grundzüge von Poinsot's Theorie der Drehung. Programm der Realschule zu Leitmeritz. In-8. 25 Sgr.

(¹) Cela nous paraît confirmer les relations que M. C. Jordan a établies entre la bissection des fonctions hyperelliptiques et les équations algébriques générales.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

RIEMANN (B.). — PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN UND DEREN ANWENDUNG AUF PHYSIKALISCHE FRAGEN ; Vorlesungen von BERNHARD RIEMANN ; für den Druck bearbeitet und herausgegeben von K. HATTENDORFF. — Braunschweig ; Druck und Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn ; 1869 (1).

Voici un Livre utile, et dont l'équivalent n'existe pas en français. Nous avons sans doute d'excellents ouvrages sur les diverses parties de la Physique mathématique, qui dépendent des équations aux différentielles partielles ; nous n'en avons pas où ces diverses parties se trouvent systématiquement coordonnées, et présentées sous un même point de vue, de manière à former un corps de doctrine. Celui que M. Hattendorff offre au public est le résumé des leçons professées par Riemann, à l'Université de Gœttingue, pendant les hivers de 1854-55 et de 1860-61, et pendant l'été de 1862. L'éminent géomètre avait l'intention de rédiger lui-même son cours ; mais, enlevé par une mort prématurée, il n'a laissé que des fragments détachés, et même, sur beaucoup de points, de simples notes, destinées à servir de texte à un développement oral, et non préparées pour l'impression. M. Hattendorff, un de ses auditeurs les plus distingués, a recueilli pieusement les manuscrits de son maître, et, en les complétant par ses souvenirs personnels, il en a composé un tout homogène, sans soudures apparentes.

L'ouvrage se divise en six Parties :

Les deux premières constituent une sorte d'introduction au sujet principal. Elles comprennent : 1° la théorie des intégrales définies, et la détermination de celles de ces intégrales qui se rencontrent le plus fréquemment dans la Physique mathématique ; 2° le développement des fonctions en séries trigonométriques, et la célèbre formule de Fourier.

La troisième Partie traite de l'intégration des équations linéaires

(1) *Leçons de B. Riemann sur les équations aux différentielles partielles et sur leur application aux problèmes de physique*, publiées par K. HATTENDORFF. Brunswick, chez Fr. Vieweg et fils ; 1869. In-8° ; 315 p.

à une seule variable indépendante, et de celle des équations aux différentielles partielles du second ordre. L'auteur considère spécialement les deux équations fondamentales

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

qui se rencontrent dans la théorie de la chaleur et dans celle des cordes vibrantes.

La quatrième Partie est consacrée au mouvement de la chaleur dans les corps solides. Après avoir établi, à peu près comme Fourier, l'équation générale du problème, l'auteur développe avec beaucoup de soin, sur de nombreux exemples, la manière d'avoir égard aux conditions initiales et aux conditions limites; il aborde ensuite la question de la température de la Terre, et le cas général d'une sphère primitivement échauffée d'une manière quelconque. Toute cette exposition est d'une netteté parfaite, et témoigne que Riemann joignait à l'esprit inventif du géomètre le talent du professeur. Nous regrettons toutefois qu'il n'ait pas cru devoir étendre son analyse à la propagation de la chaleur dans les corps cristallisés, et qu'il ait entièrement négligé les belles recherches de M. Duhamel, dont les expériences de Sénarmont ont encore accru l'intérêt. Nous ignorons aussi pourquoi il n'a pas jugé à propos de faire connaître à ses auditeurs ou à ses lecteurs, au moins sommairement, la théorie des surfaces isothermes du second degré, qui a fourni à Lamé la matière d'un livre si original.

Les vibrations des corps élastiques sont l'objet de la cinquième Partie. L'auteur débute, avec raison, par l'étude des vibrations des cordes, et il retrace en quelques pages l'histoire de ce fameux problème, qui a été l'origine des travaux des géomètres sur les équations aux différentielles partielles. Pour les idées fondamentales, mais seulement pour celles-là, l'ordre historique est celui qui convient à l'enseignement. Après ce préliminaire en quelque sorte obligé, l'auteur établit les équations générales de l'élasticité, par la considération du parallélépipède et du tétraèdre élémentaire. En suivant une marche plus rapide que Lamé, il parvient aux mêmes résultats, qui d'ailleurs avaient déjà été indiqués par Cauchy. Ainsi, dans le cas des corps d'élasticité constante, il exprime les trois composantes normales et les trois composantes tangentielles des forces élastiques au

moyen de deux coefficients λ et μ, qui restent à déterminer par l'expérience, et non au moyen d'un seul coefficient, comme le voulait Poisson. Quand un prisme droit est soumis à une traction normale à ses bases, les coefficients de sa dilatation cubique et de sa dilatation linéaire ont respectivement pour expressions

$$\frac{1}{3\lambda+2\mu} \quad \text{et} \quad \frac{1+\frac{\lambda}{\mu}}{3\lambda+2\mu}.$$

Selon Poisson, qui suppose implicitement la continuité de la matière, on aurait $\lambda=\mu$; le coefficient de dilatation cubique serait la moitié du coefficient de dilatation linéaire, et ce résultat du calcul avait paru confirmé par une expérience bien connue de Cagniard-Latour. Mais cette expérience, qui est sujette à de nombreuses causes d'erreur, mérite peu de confiance. Des expériences plus récentes de Wertheim ont fourni pour le second coefficient une valeur triple de celle du premier; ce qui donnerait $\lambda=2\mu$. Mais si le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ était exactement égal à un nombre entier tel que 2, ce serait un théorème de la plus haute importance, dont il faudrait chercher la raison mathématique dans une hypothèse plausible sur la constitution de la matière, ou sur la loi des forces moléculaires. Il est probable que ce rapport est un nombre incommensurable, voisin de 2; en tous cas c'est un point qui reste à examiner, et que Riemann ne discute pas. En laissant ce rapport indéterminé, Riemann se borne à traiter les problèmes très-simples de la traction et de la torsion d'un cylindre, et les vibrations d'une membrane tendue, rectangulaire ou circulaire. Ici encore il a peut-être un peu trop limité son programme, en se préoccupant exclusivement des corps dont l'élasticité est la même dans toutes les directions. Il ne donne pas même l'équation de l'ellipsoïde de Fresnel. Or l'état cristallin est réellement l'état normal des corps solides; l'ellipsoïde inverse des racines carrées des forces élastiques joue, dans la mécanique *intérieure* des corps, un rôle au moins aussi important que l'ellipsoïde des moments d'inertie dans ce que l'on peut appeler par opposition la mécanique *extérieure*; et quoique l'Optique, dans son ensemble, ne puisse pas encore prendre rang parmi les branches de la Physique mathématique, il nous est difficile de comprendre que, dans un cours de Physique mathéma-

tique, la théorie de la double réfraction doive être entièrement passée sous silence.

Enfin, la sixième et dernière Partie est consacrée au mouvement des fluides. L'auteur établit les équations générales de l'Hydrodynamique; il en déduit les lois de la propagation des vibrations dans un milieu compressible, c'est-à-dire les lois de la propagation des ondes sonores; il termine par l'étude du mouvement d'un corps solide, et particulièrement d'une sphère, dans un fluide incompressible et indéfini, problème résolu pour la première fois par Dirichlet.

On voit par cette courte analyse que l'ouvrage publié par M. Hattendorff peut être considéré comme un traité élémentaire de Physique mathématique. Rédigé avec clarté et précision, il sera extrêmement utile aux jeunes géomètres, en les introduisant de plain-pied dans un domaine d'un accès difficile, et, pour cette unique raison, trop peu fréquenté. Malheureusement l'auteur ne conduit pas ses lecteurs assez loin; il les abandonne avant de leur avoir ouvert toutes les routes et donné toutes les clefs. Riemann, s'il eût vécu, aurait sans doute complété son Cours; mais ce Cours, tel que nous l'avons sous les yeux, nous laisse regretter l'absence de plusieurs notions essentielles, qui ont acquis droit de cité dans la science depuis l'époque de Poisson, et qui, jointes aux données récentes de la Physique expérimentale, doivent servir de point de départ pour toutes les recherches ultérieures. CH. S.

MEYER (G.-F.). — VORLESUNGEN ÜBER DIE THEORIE DER BESTIMMTEN INTEGRALE ZWISCHEN REELLEN GRENZEN, mit vorzüglicher Berücksichtigung der von P.-G. LEJEUNE-DIRICHLET im Sommer 1858 gehaltenen Vorträge über bestimmte Integrale. — Leipzig, B.-G. Teubner, 1871; in-8°, XVIII-628 p. — Prix : 4 Thlr (1).

Le titre que nous venons de transcrire indique d'une manière précise le but et le plan de M. Meyer. C'est un traité des intégrales définies prises entre des limites réelles, traité dans lequel l'auteur a mis en œuvre tous les matériaux que pouvaient lui fournir non-

---

(1) MEYER, *Leçons sur la théorie des intégrales définies prises entre des limites réelles, d'après les leçons professées par* P.-G. Lejeune-Dirichlet *pendant l'été de* 1858.

seulement les leçons, mais encore les Mémoires de l'illustre successeur de Gauss dans la chaire de l'Université de Göttingue.

On voit que l'on n'est pas en présence d'une œuvre originale de Dirichlet, ni même d'une reproduction pure et simple de ses leçons à l'Université; M. Meyer, en disciple fidèle, a utilisé toutes les productions du maître se rapportant à son sujet; il y a même ajouté des développements qui lui appartiennent et qui sont brièvement signalés dans la préface du livre.

Une analyse rapide des matières traitées par l'auteur indiquera d'une manière précise ce que le lecteur trouvera dans le livre si étendu et si consciencieusement travaillé de M. Meyer.

L'Ouvrage se divise en deux Livres :

Le premier traite des intégrales définies simples.

La première section est consacrée aux principes. Quelques-unes des questions examinées dans cette partie et, en particulier, la définition par l'analyse pure d'une intégrale définie, ne nous ont pas paru traitées avec les développements qu'exige un livre destiné à des élèves. Signalons une formule remarquable, identique à celle de M. Bourget ([1]), qui donne toutes les formes connues du reste de la série de Taylor.

La deuxième section du premier Livre est consacrée à des intégrales définies particulières. On y remarque surtout une étude très-complète des intégrales eulériennes. L'auteur étudie d'abord les fonctions $B(a, b)$, qu'il représente par un produit infini; mais il laisse de côté les développements en produits infinis des intégrales eulériennes pour s'attacher plus spécialement aux démonstrations tirées du calcul intégral. Un paragraphe curieux est consacré à l'étude de la condition sous laquelle $\lim\left(1-\frac{z}{m}\right)^m$ est égale à e^{-z}, m et z augmentant tous les deux. Par une méthode très-ingénieuse, il est établi que toutes les fois que z croît moins rapidement que $\sqrt{m}$, on a

$$\left(1-\frac{z}{m}\right)^m = e^{-z}(1+\varepsilon),$$

ε tendant vers 0 quand m augmente indéfiniment. Ce résultat et

([1]) Voir *Bulletin*, t. II, p. 81.

quelques autres qui s'y rattachent est appliqué à la détermination de l'intégrale

$$\int_0^m z^{b-1}\left(1-\frac{z}{m}\right)^m dz,$$

lorsque m augmente de manière à dépasser toute limite.

Indiquons encore la démonstration donnée par Dirichlet ([1]) de la formule de Gauss

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)=\Gamma(na).n^{-na+\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Un chapitre spécial est consacré au développement de $\log\Gamma(a)$ en série et se termine par la démonstration de la formule de Raabe

$$\int_0^1 l\Gamma(x+k+1)dx=\frac{1}{2}\log 2\pi+(k+1)\log(k+1)-(k+1).$$

Un chapitre étendu est aussi consacré au développement des fonctions en séries trigonométriques et à la méthode si rigoureuse que Dirichlet a développée pour la première fois dans le *Journal de Crelle*. Ces études générales et étendues peuvent être plus facilement signalées qu'une foule de formules élégantes dues à Gauss, Cauchy, Euler, Laplace; à MM. Kummer, Liouville, Serret, etc., etc. L'auteur ne pouvait d'ailleurs oublier les belles méthodes de Dirichlet pour l'évaluation des sommes de Gauss,

$$\sum_1^{n-1}\cos\frac{2s^2\pi}{n},\quad \sum_1^{n-1}\sin\frac{2s^2\pi}{n},$$

et l'application de ces formules à la démonstration de la loi de réciprocité dans la théorie des résidus quadratiques.

Enfin, la section consacrée aux intégrales simples se termine par l'étude du développement des fonctions de deux angles au moyen des fonctions Y_n de Laplace, que quelques auteurs français appellent, à l'exemple des Allemands, les *fonctions sphériques*.

Le second Livre est consacré aux intégrales multiples. Signalons

---

([1]) *Journal de Crelle*, t. 15.

le calcul de la surface de l'ellipsoïde par la méthode de M. Catalan, l'attraction des ellipsoïdes, les théorèmes de Maclaurin et d'Ivory et différentes formules dues à Cauchy, à MM. Winckler, Schlömilch, Liouville, Catalan, pour la réduction des intégrales multiples et leur transformation en intégrales simples.

En résumé, l'Ouvrage de M. Meyer nous paraît contenir un recueil précieux de formules bien enchaînées et relatives aux intégrales définies. Nous regrettons seulement que le cadre adopté par l'auteur ne lui ait pas permis d'employer la théorie des variables complexes due à Cauchy, et qui permet de rattacher à un principe uniforme la détermination de presque toutes les intégrales définies connues.

G. D.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN (1).

T. LXVII (fin); n[os] 1838-1848.

Möller (A.). — Observations de petites planètes et de la comète de Coggia (II, 1870), faites à Lund, en 1870; l'auteur a retrouvé la planète Diane.

Luther (R.) et Börgen (C.). — Observations de la planète (113), faites à Bilk et à Leipzig.

Palisa (J.). — Observations des comètes (I, 1870) et (II, 1870), faites à Vienne..

Grant (R.). — Observations de petites planètes et de Neptune, faites à Glasgow.

Gasparis (A. de). — Éléments approchés de Camille, planète perdue.

(1) Voir *Bulletin*, t. I, p. 87, 280, 363.

Maywald. — Éphéméride pour l'opposition de (39) Lætitia, en 1871.

Möller (A.). — Éléments et éphéméride de (101) Hélène. — Éléments, éphéméride et observations de (113) Amalthée.

Tietjen (F.) et Oppolzer. — Observations, éléments et éphéméride de (113) Amalthée.

Tietjen (F.). — Observations et éphéméride de (103) Hera.

Rumker (G.). — Observations des comètes (II, III, IV, 1870).

Winnecke (A.). — Découverte d'une nouvelle comète; éléments de cette comète.

Tiele (B.), Bruhns (C), Vogel (H.), Peters (C.-F.-W.), Rümker (G.) et Oppolzer. — Observations, éléments et éphéméride de la comète (I, 1871).

Oppolzer. — Cet astronome a retrouvé la planète Hélène.

Luther. — Communication des éléments de la comète de Tuttle, trouvés dans les papiers de Tischler, et calcul de l'éphéméride de cette comète pour 1871. — *Nota.* Cette comète vient d'être retrouvée à Marseille, par M. Borrelly.

Kaiser (F.). — Observations de planètes, d'étoiles de comparaison, d'occultations, faites à Leyde.

Stephan (E.). — Lettre annonçant la découverte d'une comète, par M. Borrelly. (Cette comète est la même que celle de Winnecke.)

Spörer. — Observations des taches du Soleil.

Palisa (Z.) et Luther (R.). — Observations de (113) Amalthée.

Bruhns (C.) et Tietjen (F.). — Observations de la comète (I, 1871).

Vogel (H.) — Observations spectroscopiques de la comète

(I, 1871); deux raies brillantes, d'éclats très-différents, ont été observées.

Vogel (H.). — Description de l'Observatoire de Bothkamp. — Latitude de l'Observatoire; sa hauteur au-dessus du niveau de la mer. — Sa différence de longitude avec celui d'Altona. — Dimensions de l'équatorial; chambre noire; appareils photographiques et spectroscopiques. — L'instrument est bien réglé, et M. Vogel pense qu'on pourrait l'employer à des déterminations de positions absolues, sans avoir à craindre d'erreurs supérieures à 10 secondes. La puissance de la lunette a été essayée sur de faibles nébuleuses et sur des étoiles doubles très-voisines; elle ne laisse rien à désirer.

Tietjen (F.). — Éléments de (112) Iphigénie.

Secchi (Le P. A.). — Découverte d'une nouvelle combinaison spectroscopique permettant de voir en même temps les images des taches et des protubérances solaires avec les raies spectrales. Les protubérances se dessinent comme des lignes brillantes; on peut mesurer avec précision leur hauteur et leur position par rapport aux taches et aux facules. — Le P. Secchi a examiné le spectre de la comète de Winnecke, et a trouvé qu'il consiste en une bande de couleur verte; il est du reste de même nature que celui des comètes déjà étudiées.

Birmingham (J.). — Observations des bandes de Jupiter; leurs changements d'aspect. Observations d'étoiles variables.

Hornstein (C.). — Calcul de l'orbite de la comète de Hind, de 1847, présenté comme exemple de l'extension que l'auteur a faite de la méthode d'Olbers au cas d'une orbite elliptique très-allongée.

Bruhns (C.). — Observations de petites planètes, et des comètes de Coggia (II, 1870), de d'Arrest et de Winnecke (1870).

Geelmuyden (H.). — Observations de la comète de Coggia, faites à Christiania.

Oppolzer. — Sur la comète de Winnecke (III, 1819). — M. Oppolzer a voulu voir si les observations de cette comète, comme celles de la comète d'Encke, conduiraient à l'existence d'un milieu résistant.

A cet effet, il est parti des éléments de la comète conclus des observations de 1819, 1858 et 1869, et il a cherché les perturbations de ces éléments, causées par Jupiter et Saturne, en négligeant toutefois le carré des forces pertubatrices, ce qui lui a permis de grandes simplifications dans le calcul. Il a trouvé que le moyen mouvement déduit des observations de 1858 à 1869 est (comme cela doit être dans l'hypothèse d'un milieu résistant) plus fort que celui déduit des observations de 1819 à 1858, mais d'une si petite quantité que la différence peut être attribuée à l'effet des termes négligés, de telle sorte qu'on ne peut pas formuler de conclusion rigoureuse.

Dunér (N.) — Observations du compagnon de Sirius, et comparaison avec l'éphéméride d'Auwers.

Hall (A.). — Observations et éléments de la comète (I, 1871).

Mathiessen (L.). — Observations et orbite du bolide du 27 septembre 1870. — Ce magnifique bolide, dont le diamètre apparent était les deux tiers environ de celui de la Lune, a pu être observé avec soin en plus de quarante stations. Ce riche matériel d'observations a permis à M. Mathiessen de se livrer à une discussion approfondie du phénomène; l'extrémité de la trajectoire visible, ou le point où a eu lieu l'explosion était à une hauteur d'environ deux milles géographiques; pendant une partie de sa course, le bolide a suivi à peu près une ligne droite; ce n'est qu'en pénétrant dans les couches plus denses de l'atmosphère que la courbure de la trajectoire s'est accentuée de plus en plus; la vitesse moyenne du météore était de neuf milles par seconde; son diamètre réel, de 1200 pieds. Le mouvement géocentrique est représenté par une hyperbole, et le mouvement héliocentrique aussi; l'auteur en conclut que ce corps est étranger à notre système solaire, et qu'il a dû venir d'une des constellations du ciel austral.

Oppolzer. — Éléments et éphéméride de (113) Amalthée.

Kowalczyk. — Éléments corrigés de (69) Hespérie, déduits d'observations faites pendant huit oppositions. — Observations de petites planètes, faites à Varsovie.

Möller (A.). — Observations de petites planètes, faites à Lund.

Zenker (W.). — Observations des protubérances solaires, dans une lumière monochromatique. — L'appareil de M. Zenker est un spectroscope ordinaire auquel on a ajouté une deuxième fente, placée entre l'objectif et le plan focal; la largeur de cette fente varie à la volonté de l'observateur. Avec un tel spectroscope, on peut voir dans son ensemble l'image d'une protubérance, ce qui ne pouvait se faire facilement dans la méthode de Zöllner; enfin, on peut adapter l'instrument à des télescopes de grande distance focale, sans avoir recours aux forts oculaires de Zöllner.

Plummer (J.). — Observations de petites planètes, faites à Durham.

Schulhof (L.). — Éphémérides hypothétiques pour l'opposition de (66) Maïa, en 1871. — En vue de retrouver cette planète, aujourd'hui perdue, M. Schulhof donne cinq systèmes d'éléments différents les uns des autres, et représentant néanmoins assez bien les observations connues de la planète, et il construit les éphémérides correspondantes.

Tempel. — Découverte d'une nouvelle comète à l'Observatoire de Milan.

Winnecke (A.), Bruhns (C.), Weiss (E.), Schulhof (L.) et Rümker (G.). — Observations, éléments et éphéméride de la comète (II, 1871).

Sandberg (A.-J.). — Éphéméride pour l'opposition de (92) Ondine, en 1871. T. F.

MATHEMATISCHE ANNALEN, publiées par MM. Clebsch (A.) et Neumann (C.) [1].

Reiss (M.). — *Études de géométrie analytique.* (42 p.)

L'auteur, enlevé malheureusement depuis à la science, étudie par la géométrie analytique les relations entre des points situés sur des

---

[1] Voir *Bulletin*, t. II, p. 173.

courbes ou dans le plan. C'est ainsi que sont développées les relations entre six points sur une conique, dix points d'une courbe du troisième ordre, etc., et ces relations sont mises sous une forme qui les rend indépendantes du choix des axes.

THOMAE (J.). — *Sur les séries hypergéométriques supérieures, et en particulier sur la série*

$$1 + \frac{a_0 a_1 a_2}{b_0 b_1 b_2} x + \frac{a_0(a_0+1) a_1(a_1+1) a_2(a_2+1)}{b_0(b_0+1) b_1(b_1+1) b_2(b_2+1)} x^2 + \ldots.$$

(18 p.)

L'auteur part de l'équation linéaire

$$(1-x)\frac{d^h y}{(d\log x)^h} + (-A_1 - B_1 x)\frac{d^{h-1} y}{(d\log x)^{h-1}}$$
$$+ (A_2 - B_2 x)\frac{d^{h-2} y}{(d\log x)^{h-2}} + \ldots + [(-1)^h A_h - B_h x] y = 0.$$

Si l'on pose (¹)

$$F_\varepsilon\begin{pmatrix} \alpha, \alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(h-1)} \\ \beta, \beta', \beta'', \ldots, \beta^{(h-1)} \end{pmatrix} x$$
$$= x^\varepsilon \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^{hn} x^n \Pi(\varepsilon-\alpha)\ldots\Pi(\varepsilon-\alpha^{(h-1)})\Pi(-\varepsilon-\beta)\ldots\Pi(-\varepsilon-\beta^{(h-1)})}{\Pi(n+\varepsilon-\alpha)\ldots\Pi(n+\varepsilon-\alpha^{(h-1)})\Pi(-n-\varepsilon-\beta)\ldots\Pi(-n-\varepsilon-\beta^{(h-1)})},$$

l'équation différentielle est satisfaite par $2h$ de ces fonctions F_ε convenablement choisies. Ces $2h$ séries sont appelées par M. Thomae *séries hypergéométriques d'ordre h*. L'auteur étudie, en particulier, celles du troisième ordre, au sujet desquelles il donne le théorème suivant :

Toutes les séries hypergéométriques du troisième ordre dont les exposants diffèrent de nombres entiers s'expriment en fonction linéaire et homogène de trois quelconques d'entre elles, les coefficients de la relation linéaire étant des fonctions rationnelles de x.

CLEBSCH (A.). — *De la représentation sur le plan des surfaces réglées du quatrième ordre, qui possèdent une courbe double du troisième degré.* (22 p.)

(¹) Où Π est le signe employé par Gauss pour les intégrales eulériennes.

L'auteur détermine d'abord les expressions des coordonnées, soit d'un point, soit d'un plan tangent de la surface en fonction de deux paramètres. Par exemple, les coordonnées homogènes x_i d'un point de la surface sont données par les formules

$$\rho x_i = a_i + \lambda b_i + \lambda^2 c_i + \mu(\alpha_i + \lambda\beta_i + \lambda^2\gamma_i).$$

Ces formules se déduisent immédiatement de la définition que M. Cremona a adoptée pour ces surfaces dans les *Mémoires de l'Académie de Bologne* (t. VIII). Les formules qui déterminent le plan tangent sont de la même forme que les précédentes, ce qui doit paraître évident d'après les deux théorèmes suivants que démontre M. Clebsch :

La surface est formée par celles des cordes d'une cubique gauche donnée qui appartiennent à un complexe linéaire. La cubique gauche est la courbe double de la surface.

La surface est le lieu des intersections des plans osculateurs d'une cubique gauche qui appartiennent à un complexe linéaire.

La surface développable formée par les plans osculateurs est la développable des plans tangents doubles de la surface.

Le Mémoire se termine par l'étude détaillée et complète des divers éléments géométriques se rapportant à la surface.

Brioschi (F.). — *Des substitutions de la forme*

$$\Theta(r) \equiv \varepsilon\left(r^{n-2} + ar^{\frac{n-3}{2}}\right)$$

pour un nombre n premier de lettres. (4 p.; fr.)

L'auteur établit le théorème suivant :

Les substitutions de la forme précédente ne peuvent être des substitutions conjuguées que dans les deux cas de $n = 7$, $n = 11$.

Pour $n = 7$, on aura un système de 4.6.7 substitutions conjuguées, et les fonctions invariables par ce système ne pourront avoir que 30 valeurs.

Pour $n = 11$, il y a un système de 6.10.11 substitutions conjuguées, et une fonction de 11 lettres invariable par ce système ne pourra avoir que 60480 valeurs.

Brill (A.). — *Deuxième Note relative aux modules d'une classe d'équations algébriques.* (4 p.)

Cette Note contient une démonstration nouvelle des résultats établis par MM. Cremona et Casorati dans une Note intitulée : *Osservazioni intorno al numero dei moduli delle equazioni, etc.*, et communiquée à l'Institut de Milan. Dans leur livre sur les fonctions abéliennes, MM. Clebsch et Gordan avaient adopté, pour les courbes de même genre, des formes normales différentes de celles qui avaient été choisies par Riemann. M. Cremona a donné les formules de transformation de ces formes normales pour les cas de $p = 4, 5, 6$. M. Brill établit les mêmes résultats par une voie purement analytique.

Reye (Th.). — *Les surfaces algébriques, leurs courbes d'intersection et leur génération par des faisceaux projectifs.* (29 p.)

Désignons par

F^n une surface d'ordre n;

$C^{p,q}$ l'intersection de deux surfaces F^p, F^q;

$[n, p, q]$ les points communs à F^n, F^p, F^q;

$N(n)$ le nombre de points déterminant une F^n;

$N\left(\frac{n}{p}\right)$ le nombre des points d'une F^p déterminant une courbe $C^{n,p}$ sur F^p;

$N\left(\frac{n}{p,q}\right)$ le nombre des points d'une $C^{p,q}$ par lequel un groupe (n, p, q) de points d'intersection de la $C^{p,q}$ avec une F^n est déterminé.

Dans la première Partie se trouvent déterminés les nombres précédents, et démontrés quelques théorèmes qui s'y rattachent.

Dans la seconde Partie, l'auteur étudie les différents modes de génération des surfaces et des courbes par des faisceaux ou des réseaux projectifs, et fait l'application des résultats obtenus à la théorie des polaires, des courbes et des surfaces algébriques.

Neumann (C.). — *Sur la théorie du potentiel.* (1 p.)

Hoppe (R.). — *Représentation conforme d'une surface du second degré sur le plan.* (10 p.)

Il s'agit, dans ce Mémoire, du problème principal de la théorie des cartes géographiques. On sait que la théorie des surfaces homo-

focales permet de représenter l'ellipsoïde sur un plan avec similitude des éléments infiniment petits, et d'ailleurs, quand on a une solution du problème, on obtient sans peine toutes les autres. L'auteur étudie les détails de la solution connue depuis longtemps.

HAASE (J.-C.-F.). — *Sur la théorie des courbes planes du $n^{ième}$ ordre avec* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ *points doubles ordinaires ou de rebroussement.*

L'auteur donne des propositions analogues à celles de M. Chasles sur la génération de ces courbes, qui ont été étudiées analytiquement par plusieurs autres géomètres, et en particulier par M. Clebsch (*Journal de Borchardt*, t. LXIV).

ROSANES (J.). — *Sur les triangles placés en perspective.* (4 p.)

« Si deux triangles ABC, *abc* sont en perspective de deux manières différentes, l'une d'elles se déduisant de l'autre par une simple permutation des lettres A, B, C, ils sont encore en perspective d'une troisième manière qui correspond à la troisième permutation circulaire des lettres A, B, C. »

SCHROETER (H.). — *Sur les triangles en perspective.* (10 p.)

Cet article se rapporte à la même question que le précédent.

HIERHOLZER (C.). — *Sur les coniques dans l'espace.* (24 p.)

La détermination des coniques dans l'espace exige, comme on sait, 8 conditions. M. Chasles, dans une Communication extrêmement importante (*C. R.*, 1865, p. 389), a donné les nombres de coniques satisfaisant à 8 conditions élémentaires. Malheureusement M. Chasles n'a pas encore communiqué les démonstrations des nombreux théorèmes que lui doit cette théorie. M. Lüroth a établi par une voie géométrique (*Journal de Borchardt*, t. LXVII) le nombre des coniques touchant 8 droites. Dans le Mémoire dont nous rendons compte, M. Hierholzer emploie les méthodes analytiques.

Il commence par étudier les cônes tangents à six droites et établit que leurs sommets forment une surface du 8e ordre ayant les 6 droites pour droites doubles, et contenant, en outre, les 30 droites qui rencontrent 4 des précédentes.

Si l'on ajoute la condition de contact avec une nouvelle droite, les sommets des cônes décrivent une courbe du 34e ordre. Enfin, il y a 92 cônes touchant 8 droites.

Comme cas particulier, on obtient le théorème suivant, déjà énoncé par MM. Lüroth et Nöther. Il y a un seul cône touchant 8 droites, dont l'une est rencontrée par les 7 autres.

L'auteur indique, en outre, un grand nombre d'autres théorèmes, qui, dans des cas particuliers, confirment plusieurs propositions déjà connues.

Enneper (A.). — *Recherches sur quelques points de la théorie générale des surfaces*. (37 p.)

L'auteur développe un grand nombre de relations différentielles intéressantes, relatives aux systèmes de coordonnées curvilignes tracées sur les surfaces. Il en fait l'application à quelques questions déjà traitées par d'autres géomètres ([1]).

Lommel (E.). — *Intégration de l'équation*

$$x^{m+\frac{1}{2}}\frac{d^{2m+1}y}{dx^{2m+1}} \mp y = 0$$

par les fonctions de Bessel. (12 p.)

Meissel. — *De la détermination du nombre de nombres premiers compris entre deux limites données*. (5 p.)

L'auteur arrive à cette conclusion, que les Tables de Burckhardt sont correctes pour le premier million au moins. Il promet de continuer ses utiles recherches.

Von der Mühll (K.). — *Sur le problème de températurs stationnaires*. (6 p.)

Il est admis généralement, dans la théorie du mouvement de la chaleur, qu'après un temps suffisamment long l'état de température d'un corps s'approche d'un état limite qui est indépendant des températures initiales.

M. Von der Mühll démontre, en toute rigueur, cette importante proposition. G. D.

([1]) *Voir* en particulier, dans le *Journal de l'École Polytechnique*, le Mémoire de M. O. Bonnet, sur la théorie des surfaces applicables.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Tome LXXII.

N° 15. Séance du 10 avril 1871.

CHASLES. — *Propriétés des systèmes, relatives, toutes, à certaines séries de normales en rapport avec d'autres lignes de divers points.*

M. Chasles énonce d'abord 20 théorèmes divers, c'est-à-dire qui ne présentent pas un caractère commun; puis 27 théorèmes dans lesquels une série de droites rencontrent une droite fixe en des points d'où partent d'autres droites; enfin 13 théorèmes dans lesquels se trouvent des conditions de parallélisme ou de perpendicularité de certaines séries de droites.

« Toutes les propositions dont je donne ici les énoncés, dit M. Chasles, ont été démontrées d'une manière générale par le *Principe de correspondance*, bien qu'un certain nombre se puissent conclure de quelques cas particuliers, notamment quand il se trouve certains points ou droites fixes dans les conditions de la question. »

BOUSSINESQ (J.). — *Étude nouvelle sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques dont certaines dimensions sont très-petites par rapport à d'autres.* Second Mémoire : *Des plaques planes.*

Suite du Mémoire présenté dans la séance précédente.

N° 16. Séance du 17 avril 1871.

BOUSSINESQ (J.). — *Méthode nouvelle sur la résolution d'une classe importante et très-nombreuse d'équations transcendantes.*

Cette troisième Partie du travail de l'auteur a pour objet la résolution par approximations successives d'équations dont les premiers membres sont définis par des équations différentielles de forme déterminée; c'est là un genre de questions qui se présente fréquemment en Physique mathématique.

N° 17. Séance du 24 avril 1871.

CHASLES. — *Propriétés des systèmes de coniques, dans lesquels se trouvent des conditions de perpendicularité entre diverses séries de droites.*

Chaque série de droites donne lieu généralement à trois questions : la recherche de la courbe enveloppe de ces droites, celle de la courbe sur laquelle se trouve leurs pieds de perpendicularité, et celle de la courbe lieu des points de rencontre de ces droites et des coniques auxquelles elles appartiennent.

M. Chasles présente les énoncés de 44 nouvelles propositions, chaque proposition renfermant un théorème relatif à chacune des questions qui viennent d'être indiquées.

Delaunay. — *Calcul de quelques nouveaux termes de la série qui exprime le coefficient de l'équation séculaire de la Lune.*

M. Delaunay communiqua à l'Académie, en 1859, le résultat auquel il était parvenu dans le calcul du coefficient de l'équation séculaire de la Lune ; il trouva, en prenant le siècle pour unité de temps, que le coefficient du carré du temps dans l'expression de la longitude moyenne de la Lune avait pour valeur $+6'',11$. (*Comptes rendus*, t. XLVIII, p. 823.)

Depuis cette époque, M. Delaunay a repris le calcul de l'équation séculaire de la Lune, en ajoutant aux termes déjà calculés de nouveaux termes des neuvième et dixième ordres ; il donne alors la valeur complète du coefficient en question, et trouve, en réduisant en nombres, la nouvelle valeur $+6'',176$; c'est une augmentation de $0'',066$ pour la valeur de ce coefficient obtenue en 1859.

N° 18. Séance du 1er mai 1871.

Chasles. — *Théorèmes divers concernant les systèmes de coniques représentés par deux caractéristiques.*

M. Chasles donne les énoncés de 100 nouveaux théorèmes concernant : 1° les tangentes aux points d'une droite D, ou menées par un point S ; 2° les tangentes et diamètres ; 3° les diamètres ; 4° les diamètres conjugués ; 5° les asymptotes ; 6° les deux tangentes menées d'un même point à chaque conique ; 7° les deux points de chaque conique sur une droite ; 8° les coniques coupées par deux droites.

N° 19. Séance du 8 mai 1871.

Bourget (J.). — *Influence de la résistance de l'air dans le mouvement vibratoire des corps sonores.*

Dans un Mémoire approuvé par l'Académie (*Comptes rendus*, t. LX, 1865), M. Bourget avait donné la théorie complète du mouvement vibratoire des plaques circulaires ; soumettant ses résultats à l'expérience, il avait constaté que les sons observés sont notablement différents des sons calculés ; et l'écart, qui peut aller à plusieurs tons, ne peut pas être attribué à des erreurs d'observation. En cherchant la cause de ces perturbations, M. Bourget a été conduit à la placer dans la résistance de l'air comme force perturbatrice, et supposant provisoirement cette résistance, dont la loi est inconnue, proportionnelle à la vitesse, il arrive, par une analyse fort simple, à des lois remarquables, qui peuvent se formuler ainsi :

Considérons comme mouvement normal celui qui aurait lieu dans le vide. Si une membrane vibre dans un milieu résistant, les carrés des nombres de vibrations sont diminués d'une quantité constante pour chacun des sons successifs qui composent la série des harmoniques. La forme des lignes nodales, au contraire, n'est nullement modifiée par la résistance du milieu.

TREMESCHINI (G.-A.). — *Formes successives d'une tache solaire observée dans les premiers jours de mai.*

N° 20. Séance du 15 mai 1871.

CHASLES. — *Propriétés des courbes d'ordre et de classe quelconques démontrées par le Principe de correspondance.*

« Je me propose, dans ma Communication de ce jour, dit M. Chasles, de montrer que, si le mode de raisonnement qui constitue le *Principe de correspondance* jouit ainsi d'un privilége précieux dans la théorie générale des systèmes de courbes, il s'applique aussi, et avec la même facilité, dans la théorie générale des courbes géométriques, considérées soit isolément avec des points et des droites, soit associées entre elles : questions regardées généralement comme étant du domaine propre de l'Analyse. »

Cette importante Communication de M. Chasles renferme les énoncés de plus de cent propositions nouvelles, qui se trouvent répartis dans les Chapitres dont les titres suivent :

CHAPITRE I. — *Propriétés d'une conique.*

CHAPITRE II. — *Propriétés d'une conique en rapport avec une courbe géométrique* U_m *ou* U^n.

Chapitre III. — *Propriétés d'une courbe géométrique, concernant des systèmes de deux points ou de deux droites conjugués par rapport à une conique.*

Chapitre IV. — *Propriétés diverses des courbes géométriques auxquelles donne lieu la présence d'une conique.*

Chapitre V. — *Propriétés des courbes géométriques.*

Bertrand (J.). — *Considérations relatives à la théorie du vol des iseaux.*

N° 21. Séance du 29 mai 1871.

N° 22. Séance du 5 juin 1871.

Cazin (A.). — *Nouvelle méthode pour mesurer le magnétisme en unités mécaniques.*

N° 23. Séance du 12 juin 1871.

Serret (J.-A.). — *Mémoire sur le principe de la moindre action.*

« La première idée de la propriété qui constitue le principe dit *de la moindre action*, est due à Euler; ce grand géomètre démontra effectivement, dès 1744, à la fin de son *Traité des isopérimètres*, que, dans les trajectoires décrites par des forces centrales, l'intégrale de la vitesse multipliée par l'élément de la courbe est toujours un *maximum* ou un *minimum*. Lagrange montra ensuite, en 1760 (*Œuvres de Lagrange*, t. I, p. 365), que la même propriété peut être étendue au mouvement d'un système quelconque de corps, pourvu que le *principe des forces vives* ait lieu, et il en développa l'application à la solution d'un assez grand nombre de problèmes. Aussi l'illustre auteur de la *Mécanique analytique* jugea-t-il plus tard que la propriété dont il s'agit méritait, à raison de son importance, de faire l'objet d'un nouveau principe général de Dynamique, qu'il appela *de la moindre action*, sans se dissimuler la défectuosité de cette dénomination renouvelée de Maupertuis.

» Pour faire usage du principe de la moindre action dans la solution des problèmes de Mécanique, il suffit d'égaler à zéro la *variation* de l'intégrale dont la valeur est un *maximum* ou un *minimum*, et le résultat qu'on obtient ainsi ne diffère pas, au fond, de la formule générale de la Dynamique.

» Il est donc peu important, à ce point de vue, de savoir si le *maximum* ou le *minimum* a lieu effectivement ; ce qu'il faut, c'est, je le répète, que la variation de l'intégrale soit nulle, et la démonstration que Lagrange a donnée de son principe n'établit pas autre chose.

» Mais il n'en est pas moins d'un haut intérêt pour l'analyse et pour la Mécanique générale qu'une propriété aussi remarquable du mouvement soit connue exactement. »

C'est en ces termes que M. Serret pose la question qu'il doit aborder; voici l'énoncé du principe dont il présente une démonstration complète :

Lorsque le principe des forces vives est applicable à un système de points matériels libres ou liés entre eux et sollicités par des forces données, le mouvement du système est toujours tel, que la somme des quantités de mouvement des divers corps multipliés par les éléments des trajectoires respectives a, entre deux positions quelconques du système, une intégrale minimum. C'est-à-dire que l'intégrale dont il s'agit est moindre dans le mouvement réel que dans le mouvement nouveau qui aurait lieu si, rendant le premier mouvement impossible par l'introduction des liaisons nouvelles, on obligeait le corps à suivre, sous l'action des mêmes forces, des trajectoires infiniment voisines des premières, pour passer de la première position à la deuxième, tout en laissant subsister l'équation des forces vives et en conservant la valeur de la constante qui exprime la différence entre la demi-somme des forces vives et la fonction des forces.

M. Serret se proposait donc de déterminer le signe de la variation seconde de l'intégrale que l'on a à considérer ; c'était là une question extrêmement difficile. Pour calculer cette variation seconde, M. Serret fait usage des formules de la Dynamique mises sous la forme générale que Lagrange leur a donnée, et arrive ainsi à une expression symétrique, mais qui, malgré le choix très-heureux des notations, présente encore une très-grande complication. Arrivé à ce point, M. Serret a l'idée ingénieuse d'introduire $n(n-1)$ fonctions arbitraires: si l'on assujettit ces fonctions à vérifier autant de relations convenablement choisies, l'expression d'abord fort compliquée de la variation seconde se réduit à une forme très-simple, qui permet d'en reconnaître immédiatement le signe. Ainsi, en restant dans la question générale, la proposition énoncée se trouve très-habilement démontrée. Cette analyse fort remarquable de M. Serret est la première

application importante qui ait été faite du *calcul des variations* à la distinction du maximum et du minimum.

Il reste à examiner, dans cette question délicate, des détails sur lesquels M. Serret se propose de revenir plus tard.

BOILLOT (A.). — *Plan d'études appliqué à la connaissance des astres.* Troisième partie : *Constitution physique du Soleil.*

Voir les *Comptes rendus*, des 1er et 15 mai 1871.

TISSERAND. — *Sur les surfaces orthogonales.*

M. Tisserand se propose de trouver les systèmes triplement orthogonaux de la forme

$$\frac{X}{\rho - a} + \frac{Y}{\rho - b} + \frac{Z}{\rho - c} = U,$$
$$\frac{X}{\mu - a} + \frac{Y}{\mu - b} + \frac{Z}{\mu - c} = U,$$
$$\frac{X}{\nu - a} + \frac{Y}{\nu - b} + \frac{Z}{\nu - c} = U,$$

où U, X, Y, Z sont quatre fonctions à déterminer; U est une fonction de x, y, z; X ne renferme que x, Y que y, Z que z; a, b, c désignent trois constantes réelles.

Par l'intégration directe des équations qui expriment l'orthogonalité, il arrive à un système orthogonal triple et un de surfaces du 4e ordre, contenant les constantes a, b, c, A, B, C, ces dernières étant assujetties à être de même signe. C'est celui que M. Darboux avait trouvé par d'autres considérations. L. P.

MÉLANGES.

APPLICATION DU PRINCIPE DU DERNIER MULTIPLICATEUR A L'INTÉGRATION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU SECOND ORDRE;

PAR M. LAGUERRE.

1. Soient $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ deux polynômes du second degré en x et en y, ne différant que par les termes du premier degré et la valeur de la constante.

Considérons le système d'équations différentielles

$$(1) \qquad \frac{dx}{d\xi} = \frac{dy}{d\eta} = \frac{\sqrt{f(x,y)}}{\sqrt{\varphi(\xi,\eta)}},$$

dont le nombre est inférieur de deux unités au nombre des variables.

En désignant par $F(x, y, z, u)$ une fonction du second degré, homogène et convenablement choisie, on peut poser

$$f(x,y) = F(x,y,a,b)$$

et

$$\varphi(\xi,\eta) = F(\xi,\eta,\alpha,\beta),$$

a, b, α et β étant des quantités constantes.

Cela posé, λ désignant une constante arbitraire, il est facile de voir que l'équation

$$(2) \qquad \lambda = 2\sqrt{f(x,y)\varphi(\xi,\eta)} - \xi\frac{df}{dx} - \eta\frac{df}{dy} - \alpha\frac{df}{da} - \beta\frac{df}{db}$$

est une intégrale du système d'équations (1).

Il suffit, pour cela, de vérifier que la différentielle de l'expression précédente s'annule en vertu des seules relations (1).

Or on a

$$\begin{aligned} d\lambda = {} & \frac{\sqrt{f(x,y)}}{\sqrt{\varphi(\xi,\eta)}}\left(\frac{d\varphi}{d\xi}d\xi + \frac{d\varphi}{d\eta}d\eta\right) \\ & + \frac{\sqrt{\varphi(\xi,\eta)}}{\sqrt{f(x,y)}}\left(\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy\right) - \frac{df}{dx}d\xi - \frac{df}{dy}d\eta \\ & - dx\left(\xi\frac{d^2 f}{dx^2} + \eta\frac{d^2 f}{dx\,dy} + \alpha\frac{d^2 f}{da\,dx} + \beta\frac{d^2 f}{db\,dx}\right) \\ & - dy\left(\xi\frac{d^2 f}{dx\,dy} + \eta\frac{d^2 f}{dy^2} + \alpha\frac{d^2 f}{da\,dy} + \beta\frac{d^2 f}{db\,dy}\right). \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que, les polynômes $f(x, y)$ et $\varphi(\xi, \eta)$ étant respectivement égaux à $F(x, y, a, b)$ et à $F(\xi, \eta, \alpha, \beta)$ qui sont du second degré par rapport aux variables, on a les relations suivantes :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d^2\varphi}{d\xi^2}, \quad \frac{d^2 f}{dx\,da} = \frac{d^2\varphi}{d\xi\,d\alpha}, \ldots;$$

d'où, en vertu d'un théorème connu sur les fonctions homogènes,

$$\xi \frac{d^2 f}{dx^2} + \eta \frac{d^2 f}{dx\,dy} + \alpha \frac{d^2 f}{dx\,da} + \beta \frac{d^2 f}{dx\,db} = \frac{d\varphi}{d\xi}$$

et

$$\xi \frac{d^2 f}{dx\,dy} + \eta \frac{d^2 f}{dy^2} + \alpha \frac{d^2 f}{dy\,da} + \beta \frac{d^2 f}{dy\,db} = \frac{d\varphi}{d\eta}.$$

La valeur de $d\lambda$ devient, par suite,

$$d\lambda = (\sqrt{\varphi}\,dx - \sqrt{f}\,d\xi)\left(\frac{1}{\sqrt{f}}\frac{df}{dx} - \frac{1}{\sqrt{\varphi}}\frac{d\varphi}{d\xi}\right)$$
$$+ (\sqrt{\varphi}\,dy - \sqrt{f}\,d\eta)\left(\frac{1}{\sqrt{f}}\frac{df}{dy} - \frac{1}{\sqrt{\varphi}}\frac{d\varphi}{d\eta}\right),$$

et elle s'annule évidemment en vertu des relations (1).

2. Soit l'équation du second ordre,

(3) $$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{F\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{f(x, y)}},$$

où F désigne une fonction quelconque de $\frac{dy}{dx}$.

Supposons que nous connaissions une intégrale particulière de l'équation

(4) $$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{F\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)}{\sqrt{\varphi(\xi, \eta)}},$$

et soit

(5) $$\eta = \theta(\xi)$$

cette intégrale; si l'on imagine les variables ξ et η liées par cette relation dans les équations (1), elles deviennent

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{dy}{\theta'(\xi)\,d\xi} = \frac{\sqrt{f(x, y)}}{\sqrt{\varphi(\xi, \eta)}},$$

ou bien encore

(6) $$\frac{dx}{\frac{1}{\sqrt{\varphi(\xi, \eta)}}} = \frac{dy}{\frac{\theta'(\xi)}{\sqrt{\varphi(\xi, \eta)}}} = \frac{d\xi}{\frac{1}{\sqrt{f(x, y)}}}.$$

On peut aussi éliminer ξ entre les équations précédentes; on a

$$\frac{dy}{dx} = \theta'(\xi),$$

d'où

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\theta''(\xi)\sqrt{\varphi(\xi, \eta)}}{\sqrt{f(x, y)}};$$

comme $\eta = \theta(\xi)$ est une solution particulière de l'équation (4), on a

$$\theta''(\xi)\sqrt{\varphi(\xi, \eta)} = \mathrm{F}\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right) = \mathrm{F}\left(\frac{dy}{dx}\right);$$

l'équation du second ordre entre x et y est donc

$$(3) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mathrm{F}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{f(x, y)}}.$$

3. D'après ce que j'ai dit plus haut, l'équation (2), si l'on y fait $\eta = \theta(\xi)$, est une intégrale du système d'équations du premier ordre (6).

On peut immédiatement appliquer à ces équations le principe du dernier multiplicateur de Jacobi ([1]), car on a évidemment

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi(\xi, \eta)}}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{\theta'(\xi)}{\sqrt{\varphi(\xi, \eta)}}\right) + \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\sqrt{f(x, y)}}\right) = 0;$$

on a donc pour deuxième intégrale

$$\int \left(\frac{d\xi}{d\lambda}\right) \frac{\theta'(\xi)dx - dy}{\sqrt{\varphi(\xi, \eta)}} = \text{const.};$$

et cette dernière équation sera l'intégrale, avec deux constantes arbitraires, de l'équation (3), ξ étant exprimé, en vertu des équations (2) et (5), en fonction de λ, x et y.

([1]) Jacobi, *Theoria nova multiplicatoris, etc.* (*Journal de Crelle*, t. 27, p. 256).

CARACTÈRE DE CONVERGENCE DES SÉRIES (¹);

PAR M. V. ERMAKOF.

(Traduit du russe par M. J. Hoüel.)

Ma Communication est relative au caractère général de convergence des séries *infinies, à termes de signe constant et décroissants*,

$$(1) \qquad f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+\ldots.$$

Ma démonstration est fondée sur ce théorème connu, dû à Cauchy :

La série (1) *est convergente, si l'intégrale définie*

$$(2) \qquad \int_0^\infty f(x)\,dx$$

a une valeur finie, et divergente dans le cas contraire.

Supposons que $\varphi(x)$, pour x croissant à partir d'une limite constante quelconque, soit constamment positive, croisse à l'infini, et satisfasse à l'inégalité $\varphi(x) > x$. Nous appellerons une fonction ainsi déterminée une *fonction conjuguée de première espèce*. Comme exemples de fonctions assujetties à cette condition, on peut citer les fonctions

$$(3) \qquad x+1,\quad 2x,\quad x^2,\quad e^x,\ldots$$

Nous allons démontrer maintenant ce théorème :

La série (1) *sera convergente ou divergente, selon que le rapport*

$$(4) \qquad \frac{\varphi'(x)f[\varphi(x)]}{f(x)},$$

pour x croissant jusqu'à l'infini, tendra vers une limite plus petite ou plus grande que l'unité.

Démontrons d'abord la première partie du théorème. Supposons que le rapport (4) tende vers une limite moindre que l'unité. Dans ce cas, on peut trouver une quantité $\alpha < 1$, telle que, pour toute va-

(¹) Communiqué dans la séance du $\frac{23 \text{ août}}{4 \text{ septembre}}$ 1871 du troisième Congrès des Naturalistes russes tenu à Kiev.

leur de x supérieure à un certain nombre n, on ait

$$\frac{\varphi'(x)f[\varphi(x)]}{f(x)} < \alpha.$$

On tire de là

$$\int_n^\infty \varphi'(x)f[\varphi(x)]dx < \alpha \int_n^\infty f(x)dx.$$

En posant $\varphi(n) = m$, on aura, d'après la propriété de la fonction $\varphi(x)$, $m > n$. En changeant, dans l'intégrale du premier membre, $\varphi(x)$ en z, il vient

$$\int_m^\infty f(z)dz < \alpha \int_n^\infty f(x)dx,$$

d'où l'on tire aisément

$$\int_n^\infty f(z)dz < \frac{1}{1-\alpha} \int_n^m f(x)dx.$$

Le second membre de la dernière inégalité est une quantité positive et finie; par conséquent, le premier membre, c'est-à-dire l'intégrale définie (2), sera aussi une quantité finie.

Démontrons maintenant la seconde partie du théorème. Supposons que la limite du rapport (4) soit plus grande que l'unité. La limite du rapport (4) peut être aussi égale à l'unité, si ce rapport arrive à l'unité par des valeurs décroissantes. Dans les deux cas, l'intégrale définie (2) sera infiniment grande. En effet, dans ces deux cas, pour toute grandeur de x supérieure à un certain nombre positif n, on aura

$$\frac{\varphi'(x)f[\varphi(x)]}{f(x)} > 1,$$

d'où l'on tire

$$\int_n^\infty \varphi'(x)f[\varphi(x)]dx > \int_n^\infty f(x)dx,$$

et, en changeant dans le premier membre $\varphi(x)$ en z,

$$\int_m^\infty f(z)dz > \int_n^\infty f(x)dx,$$

ou

$$\int_n^\infty f(z)dz > \int_n^\infty f(x)dx + \int_n^m f(x)dx.$$

La dernière inégalité n'est satisfaite pour aucune valeur finie de l'intégrale définie $\int_a^x f(x)\,dx$; par suite, l'intégrale définie (2) est infiniment grande.

Transformons maintenant de deux autres manières le caractère de convergence que nous venons d'obtenir. Posons

$$\varphi(x) = z,$$

d'où

$$x = \psi(z);$$

le rapport (4) deviendra

$$(5)\qquad \frac{f(x)}{\psi'(z)f[\psi(z)]}.$$

La fonction $\psi(z)$ est positive, elle croît à l'infini, et satisfait à l'inégalité $\psi(z) < z$. Nous l'appellerons *fonction conjuguée de seconde espèce*. A toute fonction conjuguée de première espèce correspond une fonction réciproque conjuguée de seconde espèce. Aux fonctions (3) correspondent les fonctions conjuguées de seconde espèce

$$x - 1,\quad \tfrac{1}{2}x,\quad x^{\frac{1}{2}},\quad \log x, \ldots$$

Soit, de plus, $\theta(x)$ une fonction conjuguée quelconque de première ou de seconde espèce. Posons

$$x = \theta(z) \quad \text{et} \quad \varphi[\theta(z)] = \Phi(z);$$

la fonction $\Phi(z)$ sera évidemment aussi une fonction conjuguée de première ou de seconde espèce. Le rapport (4) se changera dans le suivant,

$$(6)\qquad \frac{\Phi'(z)f[\Phi(z)]}{\theta'(z)f[\theta(z)]}.$$

Ici les fonctions conjuguées $\Phi(z)$ et $\theta(z)$ satisfont à l'inégalité $\Phi(z) > \theta(z)$. Le théorème démontré plus haut peut s'exprimer comme il suit :

L'intégrale définie (2) sera une quantité finie, si l'un des rapports (4), (5), (6) tend vers une limite moindre que l'unité, et une quantité infinie si l'un de ces rapports tend vers une limite plus grande que l'unité, ou tend vers l'unité, mais en convergeant vers cette limite par des valeurs décroissantes.

Dans une dissertation pour le grade de magister, intitulée : « Convergence des séries infinies, d'après leur forme extérieure », le professeur Bougaïef, à Moscou, a donné une règle pour obtenir, au moyen du théorème des séries conjuguées, un nombre infini de caractères de convergence, qui s'expriment par le rapport de deux termes de la série, et sont renfermés dans la formule générale que nous avons démontrée,

$$\frac{\Phi'(z) f[\Phi(z)]}{\theta'(z) f[\theta(z)]} \lessgtr 1.$$

Prenons la première forme (4) du caractère de convergence obtenu, et cherchons à déterminer une fonction $\varphi(x)$ qui donne le caractère de convergence le plus simple et le plus sensible. Pour résoudre ce problème, nous nous servirons des deux théorèmes suivants :

Désignons par $\varphi^k(x)$ une fonction qui indique que l'opération représentée par le symbole φ doit être effectuée k fois sur la variable x. Nous allons maintenant démontrer ce théorème :

I. *Les fonctions $\varphi^k(x)$ et $\varphi(x)$ donnent une sensibilité identique pour les caractères de convergence et de divergence.*

Établissons ce théorème dans un cas particulier, pour $k=2$. Posons

$$\Phi(x) = \varphi[\varphi(x)].$$

En remplaçant, dans le premier facteur du second membre de l'identité

$$\frac{\Phi'(x) f[\Phi(x)]}{f(x)} = \frac{\varphi'[\varphi(x)] f\{\varphi[\varphi(x)]\}}{f[\varphi(x)]} \, \frac{\varphi'(x) f[\varphi(x)]}{f(x)},$$

$\varphi(x)$ par z, il vient

$$\frac{\Phi'(x) f[\Phi(x)]}{f(x)} = \frac{\varphi'(z) f[\varphi(z)]}{f(z)} \, \frac{\varphi'(x) f[\varphi(x)]}{f(x)},$$

d'où l'on tire, pour $x=\infty$, $z=\infty$,

$$\lim \frac{\Phi'(x) f[\Phi(x)]}{f(x)} = \left\{ \lim \frac{\varphi'(x) f[\varphi(x)]}{f(x)} \right\}^2.$$

Cette équation fait voir que les limites des deux rapports

$$\frac{\Phi'(x)f[\Phi(x)]}{f(x)}, \quad \frac{\varphi'(x)f[\varphi(x)]}{f(x)}$$

sont simultanément supérieures, inférieures ou égales à l'unité, c'est-à-dire que les fonctions $\Phi(x)$ et $\varphi(x)$ donnent des caractères de convergence d'une égale sensibilité. On peut facilement étendre cette démonstration au cas général où k est un nombre entier ou fractionnaire, positif ou négatif.

II. *De deux fonctions conjuguées de première espèce, la plus grande est celle qui donne le caractère le plus sensible de convergence ou de divergence.*

Soient $\Phi(x)$ et $\theta(x)$ deux fonctions conjuguées de première espèce, satisfaisant à l'inégalité $\Phi(x) > \theta(x)$. Si la série (1) est convergente, alors on a, d'après le théorème que nous avons démontré,

$$\lim \frac{\Phi'(x)f[\Phi(x)]}{\theta'(x)f[\theta(x)]} \leqq 1,$$

d'où

$$\lim \frac{\Phi'(x)f[\Phi(x)]}{f(x)} \leqq \lim \frac{\theta'(x)f[\theta(x)]}{f(x)}.$$

La dernière inégalité montre que $\Phi(x)$ donne un caractère de convergence plus sensible que $\theta(x)$.

Supposons maintenant que la série (1) soit divergente; alors

$$\lim \frac{\Phi'(x)f[\Phi(x)]}{\theta'(x)f[\theta(x)]} \geqq 1,$$

d'où

$$\lim \frac{\Phi'(x)f[\Phi(x)]}{f(x)} \geqq \lim \frac{\theta'(x)f[\theta(x)]}{f(x)}.$$

Par suite, $\Phi(x)$ donne encore un caractère de divergence d'une plus grande sensibilité.

Les deux théorèmes que nous venons de démontrer nous donnent le moyen de décider laquelle de deux fonctions conjuguées de première espèce donne le caractère de convergence le plus simple et le plus sensible. Prenons, par exemple, les deux fonctions e^x et x^x. Comme $\lim \frac{x^x}{e^x} = \infty$, alors, d'après le théorème II, x^x donnera un

caractère plus sensible que e^x. En posant

$$\varphi(x) = e^x,$$

on a

$$\varphi^2(x) = \varphi[\varphi(x)] = e^{e^x}.$$

Comme $\lim \frac{e^{e^x}}{x^x} = \infty$, alors, d'après le théorème II, e^{e^x} donne un caractère plus sensible que x^x. Ces trois fonctions peuvent donc, sous le rapport du degré de sensibilité, être rangées dans l'ordre suivant,

$$e^x, \quad x^x, \quad e^{e^x}.$$

D'après le théorème I, la première et la dernière de ces fonctions donnent des caractères de la même sensibilité; donc les trois fonctions donnent des caractères également sensibles; mais, parmi ces fonctions, e^x est la plus simple.

En la comparant de la même manière à toute autre fonction connue, on arrivera toujours à cette conclusion que e^x donne le plus simple parmi les caractères de convergence les plus sensibles.

Démontrons actuellement qu'il n'y a pas de fonction conjuguée de première espèce qui donne un caractère de convergence de sensibilité maximum. Cela résulte de ce que, étant donnée une fonction $\varphi(x)$, on peut toujours trouver une autre fonction $\Phi(x)$ qui donne un caractère de convergence plus sensible. Comme fonction $\Phi(x)$ jouissant de cette propriété, on a la fonction

$$\Phi(x) = \varphi^x(x),$$

où l'opération indiquée par le symbole φ doit être répétée x fois sur la variable x. En effet, pour $x > 1$, $\varphi^x(x) > \varphi(x)$, d'où il suit, en vertu du théorème II, que $\varphi^x(x)$ donne un caractère de convergence plus sensible que $\varphi(x)$. Ici on ne peut pas établir que $\varphi^x(x)$ et $\varphi(x)$ donnent des caractères également sensibles; car le théorème I n'a plus lieu ici.

Pour revenir à la fonction e^x, son inverse est $\log x$. Cette fonction donne la règle suivante :

La série (1) *est convergente, si la limite de l'un des rapports*

(7) $$\frac{e^x f(e^x)}{f(x)}, \quad \frac{x f(x)}{f(\log x)}$$

est moindre que l'unité, et divergente si l'un de ces rapports tend vers une limite plus grande que l'unité, ou tend vers l'unité en passant par des valeurs décroissantes. Si l'un des rapports (7) *croît en tendant vers l'unité, la série* (1) *pourra bien être convergente ou divergente.*

On peut démontrer que ce caractère de convergence est plus sensible que tous les caractères connus jusqu'à présent; mais nous ne nous arrêterons pas à cettte démonstration.

Pour toutes les séries employées dans l'Analyse, les rapports (7) tendent vers zéro ou vers l'infini. En général, on ne peut trouver une fonction analytique $f(x)$, telle que les rapports (7) tendent vers une limite finie.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Gauss (F.-G.). — Fünfstellige vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Gr. 8°. Berlin, Rauh. $\frac{2}{3}$ Thlr.

General Bericht über die europäische Gradmessung für das Jahr 1869. Gr. 4°. Berlin, Reimer. 1 $\frac{1}{6}$ Thlr.

Guillemin (A.). — Le Soleil. Illustré de 58 fig. sur bois. 2e édition. In-8°, 272 p. Paris, Hachette. 1 fr.

Guthrie (Fr.). — The Laws of Magnitude; or the Elementary Rules of Arithmetic and Algebra demonstrated. Post-8°, 188 p. London, Trübner. 5 sh.

Haan (*D. Bierens de*). — Over eenige nieuwe herleidingsformulen bij de theorie der bepaalde integralen. Uitgegeven door de koninglijke Akademie van Wetenschappen. 4°. 2 en 65 bl. Amsterdam, Van der Post. 1 fl. 40 c.

Hechel (C.). — Leitfaden zum Unterricht in der ebenen Trigonometrie. Gr. 8°. Reval, Kluge. $\frac{1}{2}$ Thlr.

Hoffmann (A.). — Mathematische Geographie. 8°. Paderborn, Schöningh. $\frac{?}{3}$ Thlr.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

HOÜEL (J.). — COURS DE CALCUL INFINITÉSIMAL, professé à la Faculté des Sciences de Bordeaux. — Première partie (Cours autographié); 375 p. in-4°. Paris, Gauthier-Villars, 1870-1871.

Carnot, « cherchant à savoir en quoi consiste le véritable esprit du calcul infinitésimal », résume ainsi sa théorie, dans ses *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* : « Qu'il soit difficile ou non d'en donner une démonstration générale, la vraie métaphysique de l'analyse infinitésimale, telle qu'on l'emploie et telle que tous les géomètres conviennent qu'il faut l'employer pour la facilité des calculs, n'en est pas moins le principe des compensations d'erreurs » (p. 47, édition de 1839); et plus loin encore (p. 215) : « Le mérite essentiel, le sublime, on peut le dire, de la méthode infinitésimale, est de réunir la facilité des procédés ordinaires d'un simple calcul d'approximation à l'exactitude des résultats de l'analyse ordinaire. »

S'inspirant de l'idée de Carnot, M. Hoüel fonde le calcul infinitésimal sur la considération des *équations imparfaites,* et il reste fidèle au point de vue adopté, non par Carnot précisément, mais plutôt par M. Duhamel, dans la première édition de son Cours d'Analyse. Sans discuter ici ce point de vue de l'auteur, nous devons cependant reconnaître que toutes les notions relatives aux grandeurs, à la continuité, aux différentielles, etc...., sont présentées avec une grande netteté et une extrême rigueur. Ces développements, qui concernent ce qu'on peut appeler, avec Carnot, la métaphysique du calcul infinitésimal, forment l'objet des cinq premières leçons.

Avant d'aborder le calcul infinitésimal, M. Hoüel consacre une trentaine de pages à l'exposé des principes élémentaires de la théorie des déterminants; c'est là une sage précaution, car ce calcul algorithmique joue un rôle important dans toutes les branches de l'analyse. Nous devons dire ici que l'identité écrite au n° 35 suppose le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & p' & p'' \\ q & 1 & q'' \\ r & r' & 1 \end{vmatrix}$$

égal à l'unité; c'est une condition que l'auteur a oublié de mentionner.

La partie du cours actuellement publiée se compose de 45 leçons : les 26 premières renferment les définitions relatives aux dérivées et aux différentielles, l'étude du mécanisme du calcul différentiel, puis les premiers principes du calcul intégral, et enfin l'application du calcul infinitésimal au développement en série et à la recherche des valeurs maxima et minima des fonctions; les 18 leçons suivantes sont destinées aux applications géométriques; dans la dernière leçon, il est traité des déterminants fonctionnels et du changement de variables dans les intégrales multiples.

Nous nous contenterons de cette indication générale sur la distribution du cours, car la reproduction détaillée des titres des leçons nous fournirait seulement une table de matières semblable à celle qu'on rencontre dans tous les traités de calcul différentiel et ne nous apprendrait absolument rien sur la manière dont est conçu l'ouvrage que nous voulons analyser.

M. Hoüel fait suivre la définition des différentielles de celle des intégrales définies; puis, immédiatement après les applications fondamentales du calcul différentiel au développement en série et à la recherche des maxima et minima, il s'occupe de l'intégration des expressions différentielles et donne : l'intégration des fonctions rationnelles; celle des irrationnelles du second degré, des différentielles binômes; l'intégration par réductions successives; les intégrales définies, les intégrales culériennes (XXe, XXIe,..., XXIVe leçons). Cet intervertissement de l'ordre habituellement suivi nous semble une heureuse innovation. Nous avons encore remarqué, dans les règles de différentiation, l'introduction systématique des fonctions hyperboliques, au même titre et sur le même pied que les fonctions circulaires ; c'est un bon exemple à suivre.

Nous devons maintenant ajouter que toutes les questions sont développées avec le plus grand soin; les exemples sont variés et parfaitement choisis; et l'on rencontre, soit dans la partie théorique, soit dans les applications analytiques ou géométriques, une grande richesse de détails; il nous faudrait suivre pas à pas, si nous voulions noter tout ce que nous avons remarqué. Signalons cependant la question du changement de variables, la recherche des valeurs maxima et minima des fonctions, le problème des quadratures et des cubatures.

Dans la théorie du maximum et du minimum, l'auteur aurait

peut-être dû consacrer au moins une remarque à un cas particulier qui se présente très-fréquemment et pour lequel il est utile d'indiquer la direction qu'il est bon de donner au calcul : c'est celui où la fonction est homogène par rapport aux variables dont elle dépend, ces variables étant liées elles-mêmes par des relations homogènes. On pouvait aussi, dans la question des points multiples (XXXIIIme leçon), compléter l'étude des points doubles par l'observation suivante, qui est assez importante : c'est qu'en un point de rebroussement de 1re espèce, le contact effectif de la tangente est, en général, du 1er ordre seulement, tandis qu'il est nécessairement d'un ordre supérieur au premier pour le rebroussement de 2e espèce. Là se présentait aussi, naturellement, la détermination des cercles osculateurs en un point multiple.

M. Hoüel a su, en définitive, donner l'attrait de la nouveauté à un sujet éminemment classique; la part qu'il prend avec nous à la publication de ce Recueil nous empêche d'exprimer librement notre opinion sur son nouvel ouvrage, digne pendant de la *Théorie élémentaire des quantités complexes*. Nous nous bornerons à demander que notre collaborateur veuille bien nous donner la suite de son cours; cette suite est d'autant plus désirable qu'on est obligé d'aller chercher dans des Mémoires disséminés, dans les collections les plus variées, les traces des progrès récents de l'analyse, et la publication de M. Hoüel sera certainement accueillie avec reconnaissance.

L. P.

ЧЕБЫШЕВЪ (П.). — *Теорія сравненій*. — Санктпетербургъ, въ типографіи Императорской Академіи Наукъ. 1849 (¹).

Nous croyons utile de signaler à nos lecteurs, malgré sa date déjà ancienne, cet excellent Traité élémentaire de Théorie des nombres, qui se distingue de la plupart de ceux que nous connaissons par une exposition assez claire et assez développée pour rendre accessible à quiconque possède les éléments d'algèbre les principes de cette branche des Mathématiques, où les commençants rencontrent souvent tant de difficultés.

L'auteur a facilité notablement l'intelligence de diverses proposi-

(¹) Tchebychef (P.), *Théorie des congruences*. Saint-Pétersbourg; typographie de l'Académie impériale des Sciences, 1849. — 1 vol. in-8°, x-280 pages.

tions, en les faisant suivre toujours d'exemples numériques. Nous allons indiquer brièvement le contenu de cet ouvrage, dont il serait bien à désirer que l'on publiât une traduction dans une des langues de l'Europe occidentale.

L'Introduction traite des propriétés des nombres premiers entre eux et de la décomposition des nombres en facteurs premiers ; elle se termine par d'importantes propositions sur les nombres en progression arithmétique.

Chapitre I. *De la congruence en général.* — Définition. Propriété d'une congruence. Solution des congruences. Résidus minima. Nombre des solutions d'une congruence.

Chapitre II. *Congruence du premier degré.* — Résolution dans le cas d'un module premier avec le coefficient de l'inconnue. Théorèmes de Fermat et d'Euler. Application de ces théorèmes à la résolution des congruences du premier degré. Congruences où le module n'est pas premier avec le coefficient de l'inconnue.

Chapitre III. *Des congruences de degré supérieur en général.* — Réduction à l'unité du coefficient de la plus haute puissance de l'inconnue. Limite supérieure du nombre des solutions. Théorème de Wilson, etc. Évanouissement des termes dont le degré est supérieur ou égal au module. Caractère auquel on reconnaît si l'équation a autant de solution qu'il y a d'unités dans son degré.

Chapitre IV. *Des congruences du second degré.* — Réduction à la forme $x^2 \equiv q \pmod{p}$. Nombre des solutions de cette congruence. Du symbole $\left(\frac{q}{p}\right)$. Expressions pour la détermination de ce symbole. Valeur de $\left(\frac{2}{p}\right)$. Loi de réciprocité de deux nombres premiers. Méthode pour calculer la valeur de $\left(\frac{q}{p}\right)$. Résolution des équations $\left(\frac{x}{p}\right) = \pm 1$. Résolution de la congruence $z^2 \equiv q \pmod{p}$ pour p premier et $= 4n + 3$. Cas où le module est un nombre composé.

Chapitre V. *Des congruences binômes.* — De la congruence $x^m - A \equiv 0 \pmod{p}$, p étant un nombre soit premier, soit composé.

Chapitre VI. *Des congruences de la forme $a^x \equiv A \pmod{p}$.* — De la congruence $a^x \equiv A \pmod{p}$ en général, et en particulier de la con-

gruence $a^x \equiv 1 \pmod{p}$. Des solutions de la congruence $a^x \equiv A \pmod{p}$. Des indices. Résolution des congruences binômes à l'aide d'une table d'indices. Théorèmes pour la détermination des racines primitives. Exemple de cette détermination. Autre méthode. Nombre des racines primitives.

Chapitre VII. *Des congruences du second degré à deux inconnues.* — De la congruence $x^2 + Ay^2 + B \equiv 0 \pmod{p}$. Diviseurs de $x^2 \pm Ay^2$. Détermination de ces diviseurs dans le cas de A premier. Propriétés des formes quadratiques. Expression des diviseurs de $x^2 \pm ay^2$ à l'aide de ces propriétés. Détermination des diviseurs linéaires au moyen des formes quadratiques.

Chapitre VIII. *Application de la théorie des congruences à la décomposition des nombres en facteurs premiers.* — Cette décomposition se ramène à la détermination des diviseurs de la forme $a^m \pm 1$. Détermination des diviseurs des nombres fondée sur la théorie des diviseurs de $x^2 \pm ay^2$.

Appendice. I. Sur les résidus quadratiques. — II. Sur la détermination des racines primitives. — III. Sur la détermination du nombre des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée.

Dans cette dernière Note, l'auteur démontre les théorèmes suivants :

1° Si $\varphi(x)$ désigne le nombre des nombres premiers moindres que x, n un nombre entier quelconque, et ρ une quantité >0, la somme

$$\sum_{x=2}^{x=\infty}\left[\varphi(x+1)-\varphi(x)-\frac{1}{\log x}\right]\frac{(\log x)^n}{x^{1+\rho}}$$

sera une fonction qui, pour ρ tendant vers zéro, convergera vers une limite finie.

2° De $x = 2$ à $x = \infty$, la fonction $\varphi(x)$ satisfait un nombre infini de fois à l'inégalité

$$\varphi(x) > \int_2^x \frac{dx}{\log x} - \frac{ax}{(\log x)^n}$$

et à l'inégalité

$$\varphi(x) < \int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{ax}{(\log x)^n},$$

quelque petite que soit la quantité positive a, et quelque grand que soit le nombre n.

3° L'expression $\frac{x}{\varphi(x)} - \log x$, pour $x = \infty$, ne peut avoir d'autre limite que -1.

4° Si l'expression

$$\frac{(\log x)^n}{x}\left(f(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x}\right),$$

pour $x = \infty$, a pour limite une quantité finie ou l'infini, $f(x)$ ne pourra représenter $\varphi(x)$ aux quantités près de l'ordre $\frac{x}{(\log x)^n}$.

5° Si la fonction $\varphi(x)$ peut s'exprimer aux quantités près de l'ordre de $\frac{x}{(\log x)^n}$ en fonction algébrique de x, $\log x$, e^x, son expression sera

$$\frac{x}{\log x} + \frac{1.x}{(\log x)^2} + \frac{1.2.x}{(\log x)^3} + \ldots + \frac{1.2.3\ldots(n-1).x}{(\log x)^n}.$$

L'ouvrage est terminé par plusieurs tables numériques, savoir :

I. Table des nombres premiers inférieurs à 6000.

II. Racines primitives et indices pour les modules premiers inférieurs à 200.

III. Diviseurs linéaires de la forme quadratique $x^2 + ay^2$ pour toutes les valeurs de a depuis 1 jusqu'à 101.

IV. Diviseurs linéaires de la forme quadratique $x^2 - ay^2$ pour toutes les valeurs de a depuis 1 jusqu'à 101.

On voit que l'Ouvrage de l'éminent mathématicien russe contient une riche collection de matériaux importants, et qu'une étude plus approfondie et une traduction complète de cet excellent Traité sur la théorie des nombres mériteraient de trouver place dans une de nos collections mathématiques. J. H.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

T. VII, année 1870 [1].

COLLET. — ***Intégration des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction.*** (52 p.)

L'auteur commence par rappeler, dans une Introduction, les travaux de Cauchy, de Pfaff, de Jacobi, d'Ampère, de Bour et de Boole, qui ont quelque rapport avec la question dont il s'occupe. Cela posé, il se propose le problème suivant :

Étant données les relations

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_m = 0$$

entre une fonction V, les variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$ dont elle dépend, et les dérivées de V par rapport à ces mêmes variables, trouver l'expression de V en fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_n$ qui satisfait aux équations proposées.

Le problème que se propose M. Collet au début de son travail n'est pas, on le voit, énoncé avec toute la précision nécessaire. Étant données les m premières équations différentielles

$$f_i = 0,$$

la première question qu'on doit se proposer est celle de savoir si les équations sont compatibles.

L'auteur, pour résoudre le problème qu'il s'est proposé, commence par rechercher les relations qui expriment que

$$p_1\,dq_1 + \ldots + p_n\,dq_n$$

est une différentielle exacte.

Supposons que les fonctions p_i soient déterminées par les équations

$$f_i = a_i,$$

où les a_i sont des constantes arbitraires ou déterminées, les conditions d'intégrabilité de ce système d'équations simultanées sont

---

[1] Voir *Bulletin*, t. I, p. 27.

exprimées par les équations connues

$$(f_i, f_k) = 0.$$

Et ces conditions, l'auteur le démontre, sont nécessaires et suffisantes.

Dans un second paragraphe, l'auteur revient au problème qu'il s'est proposé, et il suppose que l'on ait entre les quantités p_i, au nombre de n, un nombre de relations

$$f_i = 0, \quad f_m = 0$$

insuffisant pour les déterminer. Les recherches du § I apprennent que les équations

$$(f_i, f_k) = 0$$

devront être des conséquences des équations données. Il pourra donc se présenter plusieurs cas. Ou bien ces relations seront identiquement satisfaites, ou bien elles seront des conséquences des premières, ou enfin, n'étant pas satisfaites en vertu des premières, elles conduiront à de nouvelles relations entre les p_i, q_i. On reconnaît donc sans difficulté que le problème sera impossible ou qu'il conduira à un système d'équations dans lequel les relations d'intégrabilité seront satisfaites en vertu des proposées. On est donc ramené au problème suivant :

Étant données entre les quantités p_i, q_i, en nombre $2n$, s relations

$$f_1 = a_1, \ldots, \quad f_s = a_s,$$

qui satisfont aux conditions d'intégrabilité, trouver entre les mêmes quantités une nouvelle relation

$$f_{s+1} = a_{s+1}$$

qui satisfasse aussi aux mêmes conditions.

L'auteur, on le voit, admet encore que, si les fonctions f_i satisfont aux conditions d'intégrabilité, il y aura une solution commune. Quoique cette proposition ne soit pas difficile à démontrer, son omission ôte un peu de clarté au travail du jeune et habile géomètre.

Collet. — *Du facteur intégrant pour les expressions différentielles du 1er ordre renfermant un nombre quelconque de variables indépendantes.* (30 p.)

Dans ce nouveau et élégant travail, l'auteur se propose de recher-

cher sous quelles conditions l'expression

$$X_1\,dx_1 + \ldots + X_n\,dx_n$$

devient une différentielle exacte, quand on la multiplie par un facteur convenablement choisi. Cette question est très-intéressante, et elle offre, on le voit, une application remarquable des principes posés par l'auteur dans le Mémoire précédent. Soit

$$(1)\qquad (h, k) = X_h \frac{d\mu}{dx_k} - X_k \frac{d\mu}{dx_h} + \mu\left(\frac{dX_h}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_h}\right).$$

On aura $(h, k) = 0$, et la considération de ces équations conduit à la relation bien connue

$$(2)\quad X_h\left(\frac{dX_k}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_k}\right) + X_k\left(\frac{dX_m}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_m}\right) + X_m\left(\frac{dX_h}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_h}\right) = 0,$$

qui doit être identiquement satisfaite quels que soient h, k, m. L'auteur démontre d'abord que les équations de condition (2), en nombre $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$, ne sont pas toutes distinctes, et qu'elles se réduisent à $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ réellement indépendantes.

Mais, quand ces premières conditions d'intégrabilité sont satisfaites, le facteur intégrant doit encore satisfaire à $n-1$ équations aux dérivées partielles. Les conditions pour que ces équations soient compatibles sont recherchées par M. Collet, qui démontre qu'elles se réduisent aux $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ déjà trouvées précédemment. L'auteur examine ensuite différents problèmes se rattachant au problème principal; il traite en particulier le cas où le facteur intégrant est le produit de plusieurs fonctions dépendant chacune d'une seule variable indépendante.

Didon. — *Sur une intégrale double.* (8 p.)

L'intégrale double

$$\iint \frac{X_n(x)\,X_{n'}(y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

est nulle toutes les fois que n' est différent de n, et égale à

$$(-1)^m . 2\pi \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots 2m}\,\frac{1}{4m+1},$$

si

$$n = n' = 2m.$$

L'auteur déduit de cette détermination le résultat suivant :

$$\int\int (1 - 2ax + a^2)^{-\mu-\frac{1}{2}} (1 - 2by + b^2)^{-\mu-\frac{1}{2}} (1 - x^2y^2)^{\mu-\frac{1}{2}} \, dx \, dy$$
$$= \frac{2\pi}{b^{\mu+\frac{1}{2}}} \int_0^{\sqrt{ab}} \alpha^{2\mu} (1 + \alpha^4)^{-\mu-\frac{1}{2}} \, d\alpha.$$

On suppose $ab < 1$ et μ entier positif.

Radau (R.). — *Note sur la rotation des corps solides.* (2 p.)

L'auteur revient sur un travail publié dans le Recueil en 1869, pour indiquer qu'il avait mal compris l'énoncé d'une proposition de l'éminent géomètre anglais M. Sylvester.

Stephan (E.). — *Voyage de la Commission française envoyée par le Ministre de l'Instruction publique sur la côte orientale de la presqu'île de Malacca, pour y observer l'éclipse totale de Soleil du 18 août 1868.* (34 p.)

Compte rendu intéressant du voyage et des travaux de l'Expédition française pour l'observation de l'éclipse, composée de MM. Stephan, Rayet, Tisserand. On sait que ces savants sont arrivés en temps utile, que leur expédition, comme celle de M. Janssen, a pleinement réussi, et qu'elle a fait honneur à notre pays.

Darboux (G.). — *Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre.* (12 p.)

Ce travail est le développement de deux Notes insérées par l'auteur aux *Comptes rendus* (t. LXX, p. 675 et 746).

Darboux (G.) — *Sur une série de lignes analogues aux lignes géodésiques.* (6 p.)

Saint-Loup (L.). — *Étude expérimentale de l'attraction exercée par une bobine sur un barreau de fer doux.* (30 p.)

Gruey (L.-J.). — *Recherches sur la flexion de la lunette méridienne.* (36 p.)

Didon (F.). — *Développements sur certaines séries de polynômes à un nombre quelconque de variables.* (22 p.)

Dans ce remarquable travail, l'auteur étend certaines recherches

de M. Hermite relatives à des polynômes associés. M. Hermite a trouvé deux séries de polynômes $U_{m,n}$, $V_{m,n}$, qui jouissent de la propriété que l'intégrale double

$$\int\int U_{m,n} V_{m',n'}\, dx\, dy,$$

étendue à toutes les valeurs des variables limitées par l'inégalité

$$x^2 + y^2 < 1,$$

soit nulle, tant que m, n ne sont pas égaux respectivement à m', n'.

L'auteur montre que cette série de polynômes n'est pas la seule qui existe, qu'il en existe une infinité d'autres satisfaisant aux mêmes conditions. Parmi tous ces systèmes, il en est un qui se distingue des autres par cette propriété que les deux séries de polynômes sont identiques.

Enfin, l'auteur indique plus généralement une série de polynômes $P_{m,n}$, tels que

$$\int\int P_{m,n} P_{m',n'} f(x, y)\, dx\, dy = 0,$$

quand on n'a pas $m = m'$ $n, = n'$. Ces polynômes permettent de réaliser l'approximation indéfinie des fonctions de deux variables, et ils ont les rapports les plus étroits avec l'intégrale double

$$\int\int \frac{f(z, z')\, dz\, dz'}{(x - z)(y - z')}.$$

TERQUEM (A.). — *Étude sur le timbre des sons produits par des chocs discontinus, et, en particulier, par la sirène.* (100 p.)

G. D.

THE QUARTERLY JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS. — Edited by J.-J. SYLVESTER and N.-M. FERRERS, assisted by G.-G. STOKES, A. CAYLEY and M. HERMITE, corresponding in Paris. — Vol. XI, 1870 (¹).

N° 41, juin 1870.

WALTON (William). — *Sur la relation qui existe entre la vitesse de*

(¹) *Journal trimestriel de Mathématiques pures et appliquées*, publié par MM. SYLVESTER et FERRERS, avec le concours de MM. Stokes, Cayley et Hermite, correspondant à

rotation instantanée et la vitesse angulaire de l'axe instantané d'un corps qui tourne librement autour d'un point fixe, et sur les axes de plus grande et de moindre mobilité. (14 p.)

Soient ω la vitesse de rotation du corps autour de l'axe instantané; Ω la vitesse angulaire de cet axe; a, b, c les moments d'inertie principaux; h, g^2 les constantes des forces vives et des aires : la relation trouvée pourra s'écrire

$$\Omega^2 = \frac{(a+b+c)h^2 - 2hg^2}{abc\omega^2} - \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\omega^4},$$

en désignant par λ_1, λ_2, λ_3 trois expressions de la forme

$$\lambda_1 = \frac{h(b+c) - g^2}{bc}, \ldots$$

Cayley (A.). — *Sur les surfaces du 4ᵉ degré* $(\star \between U, V, W)^2 = 0$. (Suite.)

Les variables U, V, W sont des formes quadratiques de coordonnées. Parmi les surfaces considérées se trouvent les réciproques de plusieurs surfaces de 6ᵉ, 8ᵉ, 9ᵉ, 10ᵉ et 12ᵉ ordre (anneau parabolique, anneau elliptique, etc).

Citons, comme exemple, la surface réciproque de l'anneau parabolique. Si nous désignons par θ un paramètre variable, les coordonnées de la parabole pourront s'exprimer par $a\theta^2$, $2a\theta$, 0; l'équation d'une sphère de rayon k, ayant son centre sur cette parabole, sera

$$(x - a\theta^2 w)^2 + (y - 2a\theta w)^2 + z^2 - k^2 w^2 = 0,$$

et l'anneau parabolique sera l'enveloppe de cette sphère. La réciproque de l'anneau se trouve en cherchant d'abord la réciproque de la sphère

$$a\theta^2 X + 2a\theta Y + W + k\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = 0,$$

puis l'enveloppe de cette réciproque, qui est

$$(aY^2 - XW)^2 - k^2X^2(X^2 + Y^2 + Z^2) = 0.$$

Cette équation est celle de la surface du 6ᵉ degré, qui est la réciproque de l'anneau parabolique. Cet anneau est une surface du 6ᵉ ordre.

Paris. Londres, chez Longmans et Cᶦᵉ, Paternoster Row. On donne chaque année quatre livraisons in-8° de 6 feuilles, dont le prix est de 5 shillings (6ᶠʳ,25). Fondé en 1859.

Frost (Andrew). — *Solution générale du problème des quinze écolières.*

Il s'agit ici d'un problème d'analyse combinatoire, d'arrangements par groupes de trois sans répétition des mêmes couples.

Besant (W.-H.). — *Notes mathématiques.*

I. Sur un problème de dynamique.

II. Sur l'aberration.

III. Formule relative aux glissettes.

IV. Sur une propriété des lignes pédales.

Roberts (Samuel). — *Note sur un évectant binaire.*

Frost (Percival). — *Sur la théorie du solénoïde d'Ampère.*

L'auteur s'est efforcé de simplifier la démonstration des formules connues.

Horner (Joseph). — *Sur le calcul des carrés magiques.*

Wolstenholme (John). — *Sur l'article concernant les porismes* (*Quart. Journ.*, n° 30).

Walton (W.). — *Sur la pression que supporte un point fixe autour duquel tourne un corps solide invariablement lié à ce point.*

La pression cherchée est de la forme $a + b\left(\frac{\omega}{\rho}\right)^2$, en désignant par ω la vitesse angulaire du corps autour de l'axe instantané, et par ρ la portion de l'axe instantané interceptée par une certaine surface du second degré qui fait partie du corps solide.

Wolff (J.-F.). — *Note sur la proposition 7 du VIe livre d'Euclide.*

Frost (Pr). — *Théorème relatif à l'action qu'un courant lancé dans une hélice, qui enveloppe un cylindre de forme quelconque, exerce sur le pôle d'un aimant.*

Jeffery (Henry). — *Sur les développées de courbes du 3e degré.*

Cayley (A.). — *Sur une relation qui existe entre deux cercles.*

Le lieu géométrique des points d'où l'on peut mener à deux cercles donnés quatre tangentes, qui forment un faisceau harmonique, est une section conique qui passe par les huit points de contact des tangentes communes aux deux cercles. Cette conique peut se réduire à deux droites; il faut pour cela que les rayons c, c' et la distance des

centres d satisfassent à la relation

$$c^2 + c'^2 = \tfrac{1}{2} d^2.$$

Considérons maintenant le point d'intersection P′ des polaires d'un point P par rapport à deux coniques données. Si P décrit une droite, P′ décrira une conique qui passe par les trois points conjugués des coniques données, et si la droite P passe par l'un de ces points conjugués, la conique P′ se réduit à deux droites dont la première passe par le même point conjugué, la seconde étant la droite fixe qui joint les deux autres points conjugués. Ainsi, quand le lieu de P est une droite qui passe par un point conjugué, le lieu de P′ est une autre droite qui passe par le même point.

Quelle est la condition qui doit être remplie pour que les deux droites dont il a été question plus haut soient des lieux géométriques de l'espèce qui vient d'être définie? Il faut pour cela que leur point d'intersection soit un point conjugué des deux cercles, ce qui donne la condition

$$c = c' = \tfrac{1}{2} d;$$

les deux cercles sont égaux et se touchent. Les deux droites en question se coupent alors à angles droits et passent par le point de contact des deux cercles.

Cayley (A.). — *Sur le porisme relatif au polygone inscrit et circonscrit et à la correspondance réciproque des couples de points sur une conique.*

Walton (W.). — *Note sur les courbes rhiziques.*

Soit $f(x)$ une fonction entière de la variable complexe x, et posons

$$x = u + iv;$$

nous aurons

$$f(x) = P + iQ,$$

P et Q étant des fonctions des variables réelles u, v. L'auteur appelle *courbes rhiziques* les deux courbes $P = 0$, $Q = 0$, à cause du rapport qu'elles offrent avec les *racines* de l'équation $f(x) = 0$. Il démontre que ces courbes se coupent à angles droits, etc.

N° 42, novembre 1870.

Cayley (A.). — *Sur un problème d'élimination.*

Soient les quatre formes

$$P = (\alpha, \ldots \between x, y, z)^k, \quad Q = (\alpha', \ldots \between x, y, z)^k,$$
$$U = (a, \ldots \between x, y, z)^m, \quad V = (b, \ldots \between x, y, z)^n;$$

il s'agit de trouver la forme de relation qui doit exister entre les quatre systèmes de coefficients pour qu'il existe dans le faisceau

$$\lambda P + \mu Q = 0$$

une courbe qui passe par deux des points d'intersection des courbes $U = 0$, $V = 0$.

Routh (E.-J.). — *Équilibre d'un corps pesant et rugueux reposant sur un autre corps de même nature.*

Routh (E.-J.). — *Moment d'inertie d'un quadrilatère.*

Cayley (A.). — *Sur les surfaces du 4e degré* $(\ast \between U, V, W)^2 = 0$. (Suite.)

L'éminent géomètre considère ici une surface étudiée par M. de la Gournerie, en 1863.

Walton (W.). — *Sur les axes de traction et de percussion.*

Lorsqu'un corps solide tourne autour d'un point fixe, la pression supportée par ce point fait généralement un certain angle avec l'axe de rotation instantané. L'auteur étudie deux cas particuliers : celui où la pression coïncide avec l'axe instantané et celui où elle est perpendiculaire à cet axe. Dans le premier cas, il donne à l'axe instantané le nom d'*axe de traction* (*axis of lug*); dans le second, celui d'*axe de percussion* (*axis of kik*). Il examine les conditions que remplissent ces axes.

Horner (J.). — *Sur l'algèbre des carrés magiques.*

Frost (P.). — *Théorie de l'électro-dynamique.*

Jeffery (H.). — *Sur les développées des courbes du 3e degré.* (Suite.)

Cockle (sir James). — *Sur le mouvement des fluides.* (Suite.)

Walton (W.). — *Démonstration d'une propriété des fonctions elliptiques.*

Si l'on pose

$$x = \cos\theta \cos\varphi, \quad y = \sin\theta \sin\varphi,$$

l'équation différentielle

$$\frac{d\theta}{\Delta\theta} + \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = 0$$

peut se ramener à la forme

$$dx^2 - dy^2 = k^2[(x\,dy - y\,dx)^2 - dy^2],$$

et en faisant

$$dy = p\,dx, \quad 1 - k^2 = k_1^2,$$

on aura

$$y = px - \frac{1}{k}\sqrt{1 - k_1^2 p^2}.$$

Cette équation appartient au type étudié par Clairaut; pour l'intégrer, il suffit d'y considérer p comme une constante, et si nous désignons cette constante par $\frac{1}{\Delta\mu}$, il vient

$$x - y\Delta\mu = \cos\mu.$$

C'est le théorème sur l'addition des arguments, car l'intégration directe donne

$$F(\theta) + F(\varphi) = F(\mu).$$

Walton (W.). — *Démonstration de l'existence d'une racine de toute équation.*

Cayley (A.). — *Sur les développées et les courbes parallèles.*

N° 43, avril 1871.

Walton (W.). — *Sur les asymptotes étoilées des courbes rhiziques.*

Les asymptotes de chacune de ces courbes rayonnent d'un centre commun et divisent l'espace en angles égaux, comme les raies d'une roue.

Le centre des asymptotes d'une courbe rhizique coïncide avec le centre analogue de la courbe conjuguée.

Besant (W.-H). — *Les équations d'Euler déduites de celles de Lagrange.*

Il s'agit des équations différentielles de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.

Ball (R.-S.). — *Les petites oscillations d'un point matériel et celles d'un corps solide.*

L'auteur a combiné la méthode de Lagrange avec certains théorèmes de cinématique, dus à M. Chasles, et il est arrivé à une série

de propositions qu'il se borne à énoncer, la démonstration ayant été fournie ailleurs.

WOLSTENHOLME (J.). — *Sur les courbes osculatrices.*

CAYLEY (A.). — *Un exemple de discriminant spécial.*

Si les coefficients $(a, \ldots)$ de la courbe

$$(a, \ldots \between x, y, z)^n = 0$$

sont tels que cette courbe ait des nœuds ou points doubles, le discriminant de la forme générale $(* \between x, y, z)^n$ s'évanouit identiquement par la substitution des coefficients particuliers $(a, \ldots)$. La courbe particulière dont il s'agit a néanmoins un discriminant *spécial* qu'on ne peut pas déduire du discriminant général, et dont la réduction à zéro exprime la condition que la courbe possède un nœud de plus.

M. Cayley donne un exemple relatif à une courbe du 4ᵉ degré.

HORNER (J.). — *Algèbre des carrés magiques.* (Suite.)

JEFFERY (H.). — *Sur les conicoïdes concycliques.*

Une série de théorèmes sur les surfaces concycliques du second degré.

CAYLEY (A.). — *Sur l'enveloppe d'une certaine surface du second degré.*

Il s'agit de trouver l'enveloppe de la surface

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2 = 0$$

dont les coefficients variables a, b, c, d doivent satisfaire aux deux relations

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + d\delta^2 = 0,$$

$$\frac{p^2}{a} + \frac{q^2}{b} + \frac{r^2}{c} + \frac{s^2}{d} = 0.$$

M. Cayley trouve une équation du degré 24, quoiqu'il puisse démontrer *à priori* qu'elle doit se réduire au degré 12.

CAYLEY (A.). — *Tables des formes binaires du 3ᵉ degré qui ont pour déterminants les nombres négatifs multiples de 4 depuis* — 4 *jusqu'à* — 400; *ceux de la forme* $-4h+1$ *depuis* — 3 *jusqu'à* — 99; *enfin les nombres* — 972, — 1228, — 1336, — 1836, — 2700.

WALTON (W.). — *Sur la transformation des deux équations simul-*

tanées

$$\frac{a(b-c)}{a-\alpha}+\frac{b(c-a)}{b-\beta}+\frac{c(a-b)}{c-\gamma}=0,$$

$$\frac{\alpha(\beta-\gamma)}{a-\alpha}+\frac{\beta(\gamma-\alpha)}{b-\beta}+\frac{\gamma(\alpha-\beta)}{c-\gamma}=0.$$

Glaischer (J.-W.-L.). — *Sur l'équation de Riccati.*

Walton (W.). — *Sur la courbure des courbes rhiziques aux points multiples.*

Cayley (A.). — *Remarque sur le calcul de logique.*

Il s'agit de la manière dont Boole a formulé le syllogisme en 1848.

Cayley (A.). — *Sur l'inversion d'une surface du second degré.*

R. R.

PROCEEDINGS of the Royal Society of Edinburgh. Session 1869-70. — In-8°.

Thomson (sir William). — *Sur les forces qui agissent sur les solides plongés dans un liquide en mouvement.* (4 p.)

Thomson (sir William). — *Sur l'équilibre de la vapeur contre la surface courbe d'un liquide.* (5 p.)

Tait. — *Sur le flux d'électricité sur les surfaces conductrices.* (20 p.)

Tait. — *Sur le mouvement permanent d'un fluide incompressible parfait dans deux dimensions.* (1 p.)

Tait. — *Sur le mouvement le plus général d'un fluide incompressible parfait.* (2 p.)

Application des quaternions à l'étude du mouvement d'un fluide, en vue surtout du cas des tourbillons.

Tait. — *Notes mathématiques.*

1° De l'équation

$$4x=(x+1)^2-(x-1)^2,$$

écrite sous la forme

$$x^3=\left[\frac{x(x+1)}{2}\right]^2-\left[\frac{x(x-1)}{2}\right]^2,$$

on conclut que tout cube est la différence de deux carrés, dont l'un au moins est divisible par 9.

2° Si

$$x^3 + y^3 = z^3,$$

alors

$$(x^3 + z^3)^3 y^3 + (x^3 - y^3)^3 z^3 = (z^3 + y^3)^3 x^3,$$

ce qui prouve l'impossibilité de trouver deux entiers dont la somme des cubes soit un cube.

SANG (E.). — *Remarques sur les théories de l'action capillaire.* (2 p.)

SMITH (W. R.). — *Note sur la théorie du professeur Bain concernant la 4e proposition du Ier Livre d'Euclide.* (3 p.)

M. Bain, partant de l'idée de M. Stuart Mill, que toute démonstration non fondée sur une déduction syllogistique se rattachant aux définitions n'est autre chose qu'une *expérience,* en conclut que la démonstration donnée par Euclide de l'égalité de deux triangles qui ont un angle égal compris entre côtés égaux n'est en réalité qu'une induction, ni plus ni moins qu'une conclusion tirée d'une expérience de physique. Les partisans de cette doctrine oublient la différence fondamentale qui existe entre ces deux sortes d'*expérience.* Nous ne connaissons sur la constitution des corps que ce que l'expérience nous révèle, et c'est seulement par induction que nous pouvons en déduire des lois générales. Une figure de géométrie, au contraire, est comme une création de notre intelligence; si notre conception de cette figure reste identique, ses propriétés resteront nécessairement identiques, et il suffira d'une seule *expérience* pour nous la faire connaître démonstrativement. Cette expérience se fait par l'intuition, qui seule peut nous montrer les conceptions abstraites de la géométrie, et pour laquelle les représentations matérielles ne sont que de grossiers auxiliaires.

LEITCH (W.). — *Moyen simple de déterminer approximativement la longueur d'onde de la lumière.* (11 p.)

TAIT. — *Note sur les équations linéaires aux différentielles partielles.* (2 p.)

Application des quaternions à l'intégration de ces équations.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

T. LXXII (¹).

N° 24. Séance du 19 juin 1871.

BOUSSINESQ (J.). — *Théorie de l'intumescence liquide appelée* onde solitaire *ou* de translation, *se propageant dans un canal rectangulaire.*

M. Boussinesq se propose d'établir théoriquement les lois des ondes observées par J. Scott Russel et par M. Bazin dans des canaux rectangulaires, sensiblement horizontaux et de longueur indéfinie, contenant un liquide de profondeur constante, et aussi la formule que M. Bazin a déduite de ses expériences (*Savants étrangers*, t. XIX, et Rapport de M. Clapeyron, *Compte rendu*, 10 août 1863), pour calculer la vitesse d'un courant de débit constant, propagé dans le même liquide.

CHEUX (A.). — *Sur l'aurore boréale du* 9 *avril* 1871, *observée à Angers.* — *Sur la lumière zodiacale observée à Angers le* 19 *février* 1871.

BRIFFAUT. (A.) — *Sur un bolide observé à Tours le* 17 *mars* 1871.

SAGOLS. — *Sur un bolide observé au sémaphore du cap Sicié le* 14 *juin* 1871.

N° 25. Séance du 26 juin 1871.

CHASLES. — *Propriétés des diamètres des courbes géométriques.*

M. Chasles s'occupe des diamètres d'une courbe d'ordre m et énonce, à l'occasion de ces droites, de nombreuses propositions qu'il obtient encore par l'application du principe de correspondance.

« Newton, dans son *Énumération des courbes du* 3ᵉ *ordre*, a fait connaître et a appelé *diamètre* d'une courbe une certaine droite, qui est le lieu des centres de gravité (ou centres des moyennes distances) des points dans lesquels une série de droites parallèles rencontre la courbe.

» Cette belle propriété des courbes géométriques paraît être la

(¹) Voir *Bulletin*, t. II, p. 241.

première que l'on ait connue. Newton la présentait comme une généralisation, ainsi que celle du rapport constant des produits des segments faits sur deux transversales parallèles à deux axes fixes, des propriétés des sections coniques. Elles étaient susceptibles elles-mêmes d'une certaine généralisation, qu'on obtient par une simple perspective, dans laquelle les droites parallèles deviennent des droites concourantes en un même point. Le théorème des diamètres conduit ainsi, comme l'a fait remarquer M. Poncelet [1], au beau théorème de Côtes, démontré par Maclaurin, savoir que, « si sur des transver-
» sales partant d'un point fixe on prend les centres des moyennes
» harmoniques des points d'intersection de ces droites et d'une
» courbe géométrique, le lieu de ces points est une droite [2], »
droite que l'on a appelée depuis *axe harmonique* du point fixe.

» On s'est fort peu occupé jusqu'ici de la conception des *diamètres* de Newton, dont on ne trouve peut-être quelques propriétés que dans un Mémoire de Steiner. Bien que le théorème de Côtes n'ait pas été non plus le sujet de recherches spéciales, il intervient dans la belle théorie des *polaires* des courbes de Bobillier [3], où il prend une importance réelle par son association avec la courbe même que l'on appelle la *polaire* d'une courbe donnée U. Que celle-ci soit d'ordre m, la polaire est une courbe d'ordre $(m-1)$ qui passe par les points de contact des $m(m-1)$ tangentes de U qu'on peut mener par un point fixe. Ce point est dit le *pôle* de la polaire. Bobillier considère la polaire de la courbe d'ordre $(m-1)$, laquelle est d'ordre $m-2$; puis la polaire de celle-ci, et ainsi de suite, et arrive à une conique dont la polaire est une droite. Cette droite est précisément l'*axe harmonique* du point fixe, relatif à la courbe d'ordre m. Un théorème général fort important, concernant deux quelconques des polaires successives [4], renferme en particulier cette double proposition, relative à la première polaire d'une courbe et à la dernière, c'est-à-dire à l'*axe harmonique* :

» *La polaire d'un point* P *est le lieu des points dont les axes harmoniques passent par ce point* P.

---

(1) *Mémoires sur les centres des moyennes harmoniques*; voir *Journal de Crelle*, t. 3.

(2) MACLAURIN, *Traité des courbes géométriques*.

(3) Voir *Annales de Mathématiques* de Gergonne, t. XVIII. 1827-1828, p. 89, 157 153, et t. XIX, p. 106, 138, 302.

(4) *Ibid.*, t. XIX, p. 302-307

» Et réciproquement : *L'axe harmonique d'un point est le lieu des points dont les polaires passent par le point.*

» Cette double propriété des *axes harmoniques* est la clef de cette théorie. Ainsi l'on conclut immédiatement du second énoncé que : *Une droite, considérée comme axe harmonique,* $a(m-1)^2$ *pôles, qui sont les points d'intersection des polaires de deux points de la droite*; et, par suite, que ces $(m-1)^2$ points appartiennent aux polaires de tous les autres points de la droite; que *ces polaires forment donc un faisceau d'ordre* $(m-1)$; d'où se conclut aussi que $2(m-2)$ *de ces polaires sont tangentes à une droite quelconque* : proposition fort utile, et de laquelle dérive aussi cette propriété fondamentale de la théorie des axes harmoniques, savoir que :

» *La courbe enveloppe des axes harmoniques des points d'une droite* D *est de la classe* $(m-1)$.

» C'est-à-dire que $(m-1)$ axes harmoniques passent par un même point I. En effet, les axes qui passent par ce point ont leurs pôles sur la polaire du point I; or cette polaire, d'ordre $m-1$, a $(m-1)$ points sur la droite D; ce sont les pôles des $(m-1)$ axes harmoniques passant par le point I.

» On reconnaît aussi que cette courbe de la classe $(m-1)$ est de l'ordre $2(m-2)$, c'est-à-dire qu'elle a $2(m-2)$ points sur une droite quelconque L. En effet, un point de la courbe est l'intersection des axes harmoniques de deux points infiniment voisins a, a' de la droite D. Ce point d'intersection est le pôle d'une polaire passant par les deux points a, a', et conséquemment tangente à la droite D en a. Mais les polaires de tous les points de la droite forment un faisceau d'ordre $(m-1)$; il y en a donc $2(m-2)$ qui sont tangentes à la droite D. Or les axes harmoniques des $2(m-2)$ points de contact sont tangents à leur courbe enveloppe aux points où ils coupent la droite L; ce qui démontre que la courbe est de l'ordre $2(m-2)$.

» Steiner, dans un travail fort étendu, concernant les courbes algébriques et leurs transversales rectilignes, dont l'analyse a été communiquée à l'Académie de Berlin, en mai 1851 ([1]), a considéré les *diamètres* de Newton, et en fait connaître quelques propriétés. On y

([1]) Voir *Journal de Mathématiques*, de Crelle, t. 49, p. 7-106; 1854. Une traduction, due au regretté M. Woepcke, avait déjà paru dans le *Journal de Mathématiques*, de M. Liouville, t. XVIII, p. 315-356; 1853.

trouve notamment la classe et l'ordre de la courbe enveloppe de ces diamètres, et deux théorèmes que j'indiquerai parmi ceux qui font le sujet de ma Communication. J'ignore si les démonstrations du beau Mémoire de Steiner ont été publiées depuis sa mort, et si d'autres géomètres se sont occupés aussi de cette théorie des diamètres.

» C'est par le principe de correspondance que je démontre toutes les propositions qui vont suivre, et que je réunis ici comme nouvel exemple des applications si variées de ce mode de raisonnement. »

Les théorèmes énoncés sont répartis sous les titres suivants : § I. Où l'on considère deux séries de points qui se correspondent anharmoniquement sur les droites de l'infini; § II. Où l'on considère les points de rencontre des diamètres et de la courbe U_m. § III. Où l'on considère les tangentes et les normales de la courbe U_m. § IV. Où l'on considère une courbe $U_{m'}^{n'}$, en rapport avec les diamètres de la courbe U_m. § V. Diamètre d'une courbe U_m en relation avec une courbe unicursale $U_{m'}$.

SECCHI (Le P.). — *Sur les relations qui existent, dans le Soleil, entre les facules, les protubérances et la couronne.*

ROGER (E.). — *Théorie des phénomènes capillaires.* Deuxième Mémoire.

JORDAN (C.). — *Théorèmes sur les groupes primitifs.*

Les principales difficultés de la théorie des substitutions se rencontrent dans la recherche des groupes primitifs. Les propriétés générales de ces groupes méritent donc une attention spéciale; mais on n'en connait qu'un petit nombre. M. Jordan montre que plusieurs des théorèmes connus sont susceptibles d'être considérablement généralisés. L. P.

MÉLANGES.

SUR UNE PROPRIÉTÉ DE L'HYPERBOLOIDE DE RÉVOLUTION;

PAR M. LAGUERRE.

1. M. Bertrand a démontré depuis longtemps que les normales principales d'une ligne à double courbure donnée ne peuvent être

les normales principales d'une autre ligne à double courbure, à moins qu'il n'existe une relation linéaire entre les deux courbures de la courbe donnée.

Les courbes gauches, qui jouissent de cette remarquable propriété, se présentent d'elles-mêmes quand on étudie la déformation des surfaces gauches.

Considérons une surface gauche; il est commode dans un grand nombre de questions de déterminer chaque point de la surface par sa position sur la génératrice rectiligne qui le contient, cette génératrice étant elle-même déterminée par le point où elle rencontre la ligne de striction et les angles qu'elle fait avec cette ligne.

Les formules propres à ce système de coordonnées s'établissent immédiatement. Je transcrirai seulement les suivantes.

Appelons :

σ la longueur de l'arc de la ligne de striction compris entre une origine arbitraire fixe et le point m, où la génératrice coupe cette ligne;

ρ le rayon de courbure de la ligne de striction au point m;

τ son rayon de torsion en ce point;

ω l'angle que fait la génératrice considérée avec la tangente à la ligne de striction;

θ l'angle que fait la normale principale au point m à la ligne de striction avec la droite menée perpendiculairement à la génératrice dans le plan tangent à la surface en ce point;

dE l'angle infiniment petit de deux génératrices consécutives.

Posons, en outre, pour abréger,

$$\frac{dE}{d\sigma} = \frac{\sin\omega}{k}.$$

On a, entre ces diverses quantités, les deux relations suivantes :

$$(1) \qquad \frac{d\omega}{d\sigma} + \frac{\sin\theta}{\rho} = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{1}{k} + \frac{1}{\tau} = \frac{d\theta}{d\sigma} + \frac{\cos\theta}{\operatorname{tang}\omega}\,\frac{1}{\rho}.$$

2. Supposons maintenant que l'on déforme la surface de façon

que les génératrices rectilignes demeurent des droites; la surface donnée se transforme en une autre surface gauche dont la ligne de striction est la transformée de la ligne de striction de la surface primitive.

Les quantités σ, ω et k conservent la même valeur pendant la déformation; les quantités variables θ, τ et ρ sont liées entre elles par les équations (1) et (2).

On peut se donner, par exemple, arbitrairement la valeur de θ en fonction de σ; on déduira alors des relations précédentes les valeurs de ρ et τ; la recherche de la nouvelle ligne de striction se ramènera à l'intégration d'équations aux différences ordinaires.

Si l'on élimine θ entre les équations (1) et (2), on obtient une équation différentielle entre ρ, τ et σ à laquelle doit satisfaire la ligne de striction, quelle que soit la déformation de la surface.

3. Supposons, en particulier, que la surface donnée soit un hyperboloïde de révolution; dans ce cas ω et k sont des quantités constantes dont la valeur détermine complétement la surface.

L'équation (1) donne alors

$$\frac{\sin\theta}{\rho} = 0.$$

Écartons le cas où l'on aurait $\rho = \infty$, et où, par conséquent, la ligne de striction serait une ligne droite; on déduit de là

$$\sin\theta = 0;$$

l'équation (1) devient alors

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tang\omega}\,\frac{1}{\rho}. \tag{3}$$

Les deux courbures de la ligne de striction sont ainsi liées par une relation linéaire, et l'on en déduit la proposition suivante :

De quelque façon que l'on déforme un hyperboloïde de révolution, en conservant la rectitude des génératrices la courbe, en laquelle se transforme le cercle de gorge de l'hyperboloïde jouit de la propriété qu'en chacun de ses points il y existe une relation linéaire entre ses deux courbures.

4. Réciproquement, étant donnée une courbe jouissant de cette propriété, on peut mettre la relation qui existe entre les deux courbures sous la forme (3); les constantes ω et k déterminent un hyperboloïde; et l'on peut toujours déformer cet hyperboloïde de façon que son cercle de gorge se transforme en la courbe donnée.

La recherche des surfaces réglées développables sur un hyperboloïde de révolution est donc ramenée à la solution du problème suivant :

Trouver toutes les courbes gauches qui jouissent de la propriété signalée par M. Bertrand.

NOTE SUR LA FORMULE DE GOMPERTZ ET SUR SON APPLICATION AU CALCUL DES PROBABILITÉS DE LA VIE HUMAINE;

PAR M. CH. SIMON.

En Angleterre, les actuaires ou calculateurs des compagnies d'assurances sur la vie font un fréquent usage, depuis plusieurs années, d'une formule qui est due à Benjamin Gompertz ([1]), et qui a pour objet de représenter, au moyen de deux constantes seulement, la loi de la mortalité humaine telle qu'elle résulte de l'observation, du moins pour la classe de personnes qui participe habituellement aux assurances.

Gompertz y est parvenu par des considérations physiologiques qui nous paraissent singulièrement hasardées. Il suppose que chaque individu possède, à un âge donné, un certain pouvoir vital, ou un certain pouvoir de résister aux causes de mort (c'est, comme on voit, un commentaire assez inattendu d'un aphorisme célèbre de Bichat),

---

([1]) *Philosophical Transactions*, 1825. *On the nature of the Function expressive of the law of human Mortality*. On peut lire à ce sujet, dans le t. IX du *Journal of the Institute of Actuaries* (1860-1861), une curieuse discussion de priorité entre M. Edmonds, qui réclame pour lui-même l'honneur de la découverte, ou tout au moins le mérite d'y être parvenu par une voie indépendante, et M. de Morgan (décédé en mars 1871), qui s'est fait le défenseur des droits de Gompertz. Nous ne connaissons pas assez les pièces du procès pour nous prononcer personnellement; mais l'opinion publique, en Angleterre, paraît avoir donné gain de cause à M. de Morgan.

et que ce pouvoir diminue à chaque instant d'une quantité proportionnelle à sa valeur; de sorte que l'intensité de la mortalité, à l'âge t, peut être représentée par une expression de la forme Aq^t, A et q étant des constantes à déterminer par l'observation. En admettant ce point de départ, si l'on désigne par V le nombre des vivants, à l'âge t, d'une table donnée, on pourra poser

$$dV = - VAq^t dt;$$

puis, en intégrant,

$$V = Ce^{-\frac{A}{Lq}q^t}.$$

Si l'on fait $e^{-\frac{A}{Lq}} = G$, et si l'on détermine la constante C par la condition que V soit égal à un nombre donné V_0 pour $t = 0$, en laissant d'ailleurs arbitraire l'origine du temps ou l'âge initial de la table, on aura enfin

$$(1) \qquad V = V_0 G^{(q^t - 1)};$$

telle est la formule que nous voulions faire connaître. Au moyen de valeurs convenables de G et de q, elle représente assez fidèlement, dans des limites fort étendues, les diverses tables de mortalité employées en Angleterre pour les diverses catégories de têtes assurées. On peut donc l'accepter comme une formule empirique et approximative, sans attacher plus d'importance qu'il ne convient à la théorie sur laquelle son auteur a cru devoir l'appuyer. A ce titre, elle remplace avec avantage les anciennes formules de Moivre et de Lambert; elle paraît préférable à toutes celles qui ont été essayées depuis.

Toutefois, un même système de valeurs de G et de q ne peut pas servir à représenter une table entière, depuis la naissance jusqu'à la limite extrême de l'existence. Afin de déterminer les valeurs de ces constantes pour une table donnée, il convient de prendre pour V_0 le nombre des vivants de cette table à l'âge de dix ou de douze ans, et de compter le temps t à partir de cet âge, sans lui attribuer de valeurs négatives. On peut alors prendre dans la table les nombres V_n et V_{2n} correspondants à $t = n$ et à $t = 2n$, en faisant $n = 25$ ou 30, et l'on a

$$(2) \qquad \begin{cases} \log V_n - \log V_0 = (q^n - 1)\log G, \\ \log V_{2n} - \log V_0 = (q^{2n} - 1)\log G. \end{cases}$$

En divisant ces deux équations membre à membre, on élimine G, et l'on a, pour calculer q,

$$q^n + 1 = \frac{\log V_{2n} - \log V_0}{\log V_n - \log V_0}.$$

On obtient ensuite G au moyen de l'une des deux équations (2). Or, les valeurs de G et de q varient d'une table à l'autre, c'est-à-dire avec les diverses catégories de têtes; mais q varie beaucoup moins que G, et la plupart des actuaires anglais regardent q comme indépendant de la catégorie de têtes que l'on considère. M. Makeham, qui a acquis une grande autorité en ces matières, adopte la valeur

$$q = 1,089023.$$

Cette valeur est plus grande que 1, comme on devait s'y attendre. Le coefficient G, au contraire, est nécessairement plus petit que 1; car la fonction V est constamment décroissante, et si l'on désigne par ω la limite extrême de la table, on doit avoir à très-peu près $G^{(q^\omega - 1)} = 0$.

Sans entrer dans une discussion de faits pour laquelle les documents nous manquent, nous supposerons, pour simplifier, qu'on ne considère que des têtes soumises à la même loi de mortalité, et nous nous bornerons à faire voir comment la formule (1), si on la regardait comme suffisamment établie, non par la théorie, mais par l'expérience, pourrait servir à résoudre les principales difficultés que soulève le calcul des probabilités de la vie humaine et des assurances sur la vie. Nous choisirons pour exemples la détermination de la vie moyenne ou de l'annuité viagère pour plusieurs têtes et le problème de survie, c'est-à-dire les questions dont toutes les autres dépendent. Les Anglais n'emploient guère la formule de Gompertz que pour corriger les tables de mortalité, en faisant disparaître les écarts fortuits que laissent subsister des observations trop peu nombreuses ou trop peu comparables; mais, si les tables sont corrigées d'après la formule, la formule peut remplacer les tables.

I. *Vie moyenne et annuité viagère.* — Considérons d'abord une seule tête A, actuellement âgée de a, l'âge étant compté à partir d'une origine arbitraire. Le nombre des vivants à l'âge a est, par la formule (1),

$$V_a = V_0 G^{(q^a - 1)};$$

et à l'âge $a+x$

$$V_{a+x} = V_0 G^{(q^{a+x}-1)}.$$

Si l'on pose $G_a = G^{q^a}$, on aura

$$V_{a+x} = V_a G_a^{(q^x-1)};$$

et l'on voit que la probabilité $\frac{V_{a+x}}{V_a}$, pour une tête de l'âge a, d'atteindre l'âge $a+x$, est $G_a^{(q^x-1)}$. Il en résulte que si l'on désigne par W_a la vie moyenne de cette tête, par U_a la valeur actuelle d'une annuité viagère de 1 franc sur la même tête, et par r l'intérêt de 1 franc pour un an, on aura

$$W_a = \frac{1}{G_a}\int_0^{\omega-a} G_a^{q^x}\,dx = \frac{1}{G_a}\int_0^{\infty} G_a^{q^x}\,dx,$$

$$U_a = \frac{1}{G_a}\sum_1^{\omega-a} G_a^{q^x}(1+r)^{-x}.$$

Dans cette dernière expression, la somme Σ s'étend à toutes les valeurs entières de x, depuis 1 inclusivement jusqu'à la limite d'existence de la tête A, ou jusqu'à l'infini, car cela revient au même. On pourrait, si l'on voulait, transformer cette somme en intégrale, soit par la formule d'Euler, soit en substituant une annuité *continue* à l'annuité payable par termes équidistants. On aurait alors à calculer, pour les valeurs de a comprises entre 0 et ω, les tables de deux intégrales définies de la forme

$$\int_0^{\infty} G_a^{q^x}\,dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} G_a^{q^x} e^{-hx}\,dx,$$

où h est une constante positive qui dépend du taux de l'intérêt. Mais les tables ainsi construites n'offriraient aucun avantage sur les tables usuelles de la vie moyenne et de l'annuité viagère pour une tête. Quand il ne s'agit que d'une seule tête, la méthode usuelle est évidemment préférable à l'emploi d'une formule artificielle; il n'en est plus de même quand on considère simultanément plusieurs têtes. Pour deux têtes réunies, la méthode usuelle est déjà très-pénible; pour plus de deux têtes, elle conduit à des calculs tout à fait impraticables. La formule de Gompertz permettrait de ramener, dans tous

les cas, les problèmes sur plusieurs têtes aux problèmes sur une seule tête.

En effet, soit un groupe de têtes A, B, C,... actuellement âgées de a, b, c,... années, tous les âges étant comptés à partir de la même origine; et soit

$$G_a = Gq^a, \quad G_b = Gq^b, \quad G_c = Gq^c, \ldots.$$

La probabilité que ce groupe subsistera au bout du temps x aura pour expression

$$\frac{V_{a+x}}{V_a}\,\frac{V_{b+x}}{V_b}\,\frac{V_{c+x}}{V_c} = (G_a G_b G_c)^{(q^x-1)}.$$

Considérons une tête M, dont l'âge m sera déterminé par la formule

$$(3) \qquad q^m = q^a + q^b + q^c + \ldots,$$

et soit $G_m = Gq^m$. La probabilité que cette tête M sera vivante au bout du temps x sera $G_m^{(q^x-1)}$; et, comme $G_m = (G_a G_b G_c)$, on voit que la tête M et le groupe ABC... ont, quel que soit x, la même probabilité de subsister au bout du temps x. De là résulte immédiatement :

1° Que la vie moyenne de la tête M est égale à la vie moyenne du groupe ABC....

2° Que la valeur actuelle d'une annuité viagère sur la tête M est égale à la valeur actuelle de la même annuité sur les têtes réunies A, B, C,....

Ainsi, le groupe ABC... pourra être remplacé par la tête unique M, dont l'âge sera calculé par la formule (3).

Nous avons supposé, pour plus de simplicité, que toutes les têtes considérées appartenaient à la même catégorie, ou que le coefficient G était le même pour toutes ces têtes; il est facile de voir comment il faudrait modifier le calcul de l'*âge moyen* m, si G variait d'une tête à l'autre, pourvu toutefois que l'exposant q restât constant.

II. *Problème de survie.* — Bornons-nous d'abord à considérer deux têtes A et B, âgées actuellement de a et de b années, et proposons-nous de calculer la probabilité P_{ab} que A meure avant B, ou bien la probabilité contraire P_{ba} que B meure avant A.

En conservant les notations précédentes, on aura

$$V_{a+x} = V_a\, G_a^{(q^x-1)};$$
$$V_{b+x} = V_b\, G_b^{(q^x-1)}.$$

La probabilité que A meure entre l'âge $a+x$ et l'âge $a+x+dx$ est

$$-\frac{dV_{a+x}}{V_a} = -\,LG_a\, Lq\, G_a^{(q^x-1)} q^x dx.$$

La probabilité que la tête B soit vivante à cette époque est $G_b^{(q^x-1)}$. On conclut de là

$$P_{ab} = -\,LG_a\, Lq \int_0^\infty (G_a G_b)^{(q^x-1)} q^x dx;$$

et, par suite, en observant que $(G_a G_b)^{(q^x-1)}$ est égal à zéro pour $x=\infty$, et à 1 pour $x=0$,

$$P_{ab} = \frac{LG_a}{LG_a + LG_b}.$$

La probabilité contraire a pour expression

$$P_{ba} = \frac{LG_b}{LG_a + LG_b}.$$

Si le coefficient G, dont dépendent G_a et G_b, a la même valeur pour les deux têtes, ces formules deviennent

$$P_{ab} = \frac{q^a}{q^a + q^b} = \frac{q^{a-b}}{1 + q^{a-b}},$$
$$P_{ba} = \frac{q^b}{q^a + q^b} = \frac{1}{1 + q^{a-b}};$$

et l'on voit que, dans cette hypothèse, les probabilités P_{ab} et P_{ba} ne dépendent que de la différence $a-b$ des âges des deux têtes.

Soient maintenant trois têtes A, B, C, âgées actuellement de a, b, c années. On calculera d'abord les probabilités P_{bc}, P_{ac}, P_{ab}, relatives à ces têtes considérées deux à deux (ces trois fractions sont, d'ailleurs, liées entre elles par une relation évidente), et l'on en déduira les probabilités relatives aux trois têtes considérées simultanément. Si l'on veut avoir, par exemple, la probabilité P_{abc}, que ces

trois têtes s'éteindront dans un ordre déterminé, A, B, C, on trouvera, par les méthodes ordinaires du calcul des probabilités,

$$P_{abc} = \frac{P_{ab} \times P_{ac} \times P_{bc}}{P_{ab} + P_{ac} - P_{ab} \times P_{ac}}.$$

La probabilité que la tête A s'éteindra la première, quel que soit l'ordre des décès des deux autres, serait

$$P_{abc} + P_{acb} = \frac{P_{ab} \times P_{ac}}{P_{ab} + P_{ac} - P_{ab} \times P_{ac}};$$

et la probabilité que la tête C s'éteindra la dernière aurait pour expression

$$P_{abc} + P_{bac} = P_{ac} \times P_{bc} \times \frac{1 - P_{ac} + 1 - P_{bc}}{1 - P_{ac} \times P_{bc}}.$$

Ces résultats s'étendraient facilement à un nombre quelconque de têtes, mais nous ne développerons pas davantage ce sujet. Nous avons voulu seulement appeler l'attention des lecteurs de ce *Bulletin* sur une formule, peu connue en France, qui pourrait donner lieu à beaucoup d'applications intéressantes, si elle était suffisamment contrôlée par l'observation [1].

---

(1) On lit dans les *Proceedings* de la Société Mathématique de Londres, t. I, séance annuelle : « The Society had lost two of its members by death namely : M. Benjamin Gompertz F. R. S., F. R. A. S., an eminent mathematician, and especially well known for the discovery of an important formula with respect to the law of mortality. »

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

SCHULENBURG (A. von der). — Die Gleichungen der drei ersten Grade (¹). Altona, 1871; Verlagsbureau; in-8, 142 p. Prix : 4 fr.

L'auteur de ce petit Traité annonce que son but est de publier les résultats nouveaux et importants qu'il a trouvés dans l'étude des équations. Il se borne pour le moment aux trois premiers degrés, et, s'il publie ses recherches, c'est uniquement, dit-il, à cause de leur importance pour la théorie et la pratique, et de leurs conséquences relatives aux équations de degré supérieur.

« Des erreurs de faits, des fautes positives, dit-il, on n'en trouvera pas dans mon livre. » Aussi se borne-t-il à demander aux critiques compétents d'attirer son attention sur les défauts d'ordre ou de précision qu'ils pourraient relever dans l'exposition. Du reste, « l'opinion que les équations générales du 5e ordre ne sont pas résolubles algébriquement est erronée ».

C'est la dernière phrase de la Préface. En réalité, tout ce que le livre contient, en dehors des méthodes très-connues, est un mode d'approximation des racines de l'équation du 3e degré, que déjà M. *Hermann* a donné d'une manière à la fois plus précise, plus élevée et plus complète dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (²).

G. D.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

BULLETINS de l'Académie royale des Sciences de Belgique (³).

T. XXIX, janvier-juin 1870.

Montigny (Ch.). — *Notice sur la séparation des trajectoires décrites dans l'atmosphère par des rayons de même origine sidérale, mais*

(¹) A. von der Schulenburg, *Les équations des trois premiers degrés*. Altona, 1871.

(²) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. VI, 2e série : *Sur le cas irréductible de l'équation du 3e degré*, par A. Hermann, ancien élève de l'École Normale supérieure.

(³) Voir *Bulletin*, t. I, p. 281.

de réfrangibilité différente, et sur les effets de cette séparation à l'égard de la scintillation. (19 p.)

Les rayons lumineux de même origine sidérale, mais de réfrangibilité différente, décrivent dans l'atmosphère des trajectoires différentes avant d'arriver à la pupille ou à l'objectif d'une lunette. Si l'ouverture de l'objectif était un point mathématique, deux quelconques des rayons colorés perçus par l'œil ne se rencontreraient qu'en ce point. Mais, en réalité, la première rencontre des deux faisceaux cylindriques courbes qui aboutissent à l'objectif a lieu d'autant plus loin de cet objectif que celui-ci a un diamètre plus grand. Dès lors, le passage d'une onde aérienne, traversant un faisceau lumineux à une distance donnée, doit produire des effets différents, selon le diamètre de l'objectif. Par exemple, si l'on observe à l'œil nu une étoile à 80 degrés de distance zénithale, une onde aérienne traversant le faisceau rouge à 500 mètres dans les conditions de réflexion totale n'arrêtera aucun rayon violet, car la première rencontre du faisceau violet avec le faisceau rouge a lieu alors à 180 mètres environ de l'objectif. Si, au contraire, on observe l'étoile à l'aide d'une lunette de 10 centimètres d'ouverture, la même onde aérienne arrêtera des rayons violets et, par conséquent, des rayons de toutes les couleurs, puisque le faisceau violet aura rencontré le faisceau rouge à plus de 3000 mètres de l'objectif.

Ainsi à l'œil nu ou avec l'objectif étroit on pourrait constater une variation de couleur, tandis qu'avec l'objectif large on ne constaterait qu'une variation d'éclat. Une autre influence du diamètre de la lunette résulte de ce que les faisceaux courbes qui se dirigent vers l'objectif se rencontrent non-seulement plus loin, mais aussi plus haut quand le diamètre est grand.

Enfin l'absence des rayons correspondants aux raies, que l'analyse spectrale révèle dans la plupart des étoiles, doit affecter certaines phases de leur scintillation.

Lorsque les raies sont nombreuses et importantes, la scintillation est moindre, mais aussi moins régulière.

CATALAN (Eug.). — *Remarques sur l'équation $x^m - 1 = 0$.* (16 p.)

p et q étant premiers entre eux, le quotient de

$$1 + x^p + x^{2p} + \ldots + x^{(q-1)p} \quad \text{par} \quad 1 + x + x^2 + \ldots + x^{q-1}$$

reste le même si l'on remplace p par q et réciproquement. Ce quo-

tient est

$$X = (1 - x)\Sigma x^{ap+bq}$$

(a et b pouvant prendre toutes les valeurs entières non négatives), pourvu que l'on néglige dans X les termes dont le degré surpasse $(p-1)(q-1)$. L'équation $X = 0$ est réciproque et tous ses coefficients sont égaux à ± 1.

Si $m(=pq)$ est impair, les racines de $x^m - 1 = 0$ sont données par trois équations réciproques, dont les deux premières ont tous leurs coefficients égaux à l'unité; la troisième est $X = 0$; $e^{\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}}$, $e^{\frac{2\pi}{q}\sqrt{-1}}$ et $e^{\left(\frac{2\pi}{p}+\frac{2\pi}{q}\right)\sqrt{-1}} = \gamma$ sont respectivement racines primitives de ces trois équations; $\gamma\lambda$ donne toutes les racines de $X = 0$ et seulement ces racines, si λ n'est divisible ni par p ni par q. On en déduit facilement les racines d'une autre équation $Z = 0$, obtenue en faisant $x + \frac{1}{x} = z$ dans $X = 0$.

Quand m, toujours supposé impair, est décomposé en plusieurs facteurs premiers entre eux deux à deux, on peut obtenir des résultats analogues, mais plus compliqués. Si, par exemple, $m = pqr$, les racines de $x^m - 1 = 0$ sont données par quatre équations dont les trois premières sont réciproques et analogues aux deux premières du cas précédent, et dont la quatrième est

$$X_1 = (1 - x)^2\Sigma x^{ap+bq+cr} = 0,$$

pourvu que dans X_1 on néglige les termes dont le degré surpasse $m - p - q - r + 2$. Le polynôme X_1 est décomposable de trois manières en un produit de deux facteurs entiers dont les termes ont pour coefficients $+1$ et -1, et aussi de trois manières en un produit de trois facteurs entiers analogues aux précédents.

De ces considérations résultent quelques propriétés relatives à l'analyse indéterminée.

p et q étant premiers entre eux, des deux équations

$$ap + bq = n, \quad ap + bq = pq - p - q - n,$$

l'une admet, pour a et b, une solution en nombres entiers non négatifs, l'autre n'en admet pas. L'équation

$$ap + bq = (p - 1)(q - 1)$$

admet toujours une solution. Le nombre des solutions de

$$ap + bq = \alpha pq + \beta$$

est égal au nombre des solutions de $ap + bq = \beta$, augmenté de α. L'équation

$$ap + bq = n$$

admet une seule solution quand n est compris entre $(p - 1)(q - 1)$ et $pq - 1$ inclusivement.

Bernaerts (G.). — *Note sur la nature du Soleil.* (12 p.)

L'auteur expose des raisons à l'appui de ses idées sur la constitution physique du Soleil. Modifiant l'opinion de M. Faye et du R. P. Secchi, il croit que le noyau gazeux du Soleil est recouvert d'une couche liquide incandescente, de faible épaisseur, enveloppée à son tour de nuages incandescents et lumineux. Cette hypothèse permettrait, d'après l'auteur, de rendre compte, mieux que par les précédentes, de la nature des taches, de leur périodicité, de leurs mouvements et de leur répartition. La formation de l'enveloppe liquide, empiétant de plus en plus sur le noyau central gazeux, serait le premier échelon qui conduit à la formation d'une croûte solide, la première étape dans la voie de l'extinction d'un astre quelconque. Elle suivrait l'état nébuleux ou purement gazeux; elle constituerait l'état lumineux; elle précéderait l'état obscur, ou la solidification externe du globe.

Mensbrugghe (G. van der). — *Sur la viscosité superficielle des lames de solution de saponine.* (8 p.)

M. Plateau a démontré que la couche superficielle des liquides a une viscosité propre, plus forte dans certains liquides, plus faible dans d'autres, que la viscosité de l'intérieur. Les résultats obtenus par ce physicien ne s'accordant guère avec les idées qui ont généralement cours à ce sujet, M. van der Mensbrugghe a pensé qu'on ne peut assez multiplier les preuves expérimentales de l'existence de la viscosité superficielle propre des liquides. Il a choisi, à cet effet, une solution aqueuse de saponine, signalée par M. Plateau comme possédant une viscosité superficielle énorme, qui ne peut être attribuée à la présence d'une pellicule de nature solide. Il décrit une expérience où la répulsion électrique s'ajoute à cette viscosité superficielle pour maintenir ouverte pendant quelque temps, avec un

bord libre, une lame de solution de saponine, malgré la tension de ses deux faces et la forte pression capillaire qui s'exerce à ce bord libre. Celui-ci est irrégulièrement dentelé, et l'action de l'électricité en détache des lamelles qui voltigent dans l'air et qui, après être retombées, se transforment en gouttelettes.

MONTIGNY (Ch.). — *Notice sur la scintillation et sur son intensité pendant l'aurore boréale observée à Bruxelles le 5 avril* 1870. (14 p.)

Vérification expérimentale des résultats annoncés dans la Note précédente du même auteur (*voir* plus haut), en observant, au mois d'avril 1870, au moyen d'une lunette à objectif variable munie d'un scintillomètre à rotation (*voir* le t. XVII des *Bulletins*), les étoiles de première grandeur Sirius et Rigel, à des distances zénithales comprises entre 70 et 85 degrés.

L'apparition des aurores boréales est caractérisée dans nos contrées par un accroissement très-sensible de la scintillation des étoiles. L'auteur en trouve la cause dans les changements atmosphériques dont ces aurores sont souvent les précurseurs.

QUETELET (Ad.). — *Des lois concernant le développement de l'homme.* (11 p.)

Cette Note est un résumé de l'*Anthropométrie,* ouvrage dans lequel M. Quetelet recherche les lois qui, pour chaque époque de l'existence de l'homme, régissent sa taille, son poids, sa force et ses autres qualités physiques.

Que l'on suppose tous les hommes de vingt ans d'un même pays couchés sur l'horizontale *ca*, dans le même sens, les pieds en *c*, les têtes des plus grands en *a*, des plus petits en *b*; qu'on élève en chaque point, de *b* en *a*, des perpendiculaires ou ordonnées égales en hauteur au nombre de têtes qui viennent s'appuyer en chacun de ces points; les extrémités supérieures de ces perpendiculaires seront sur une courbe régulière et symétrique par rapport à la perpendiculaire au milieu de *ba*. Cette courbe, que l'auteur appelle binômiale, est une de celles que l'on emploie dans le calcul des probabilités pour rendre plus sensible la répartition des événements. De là résulte que l'on peut considérer l'homme de taille moyenne comme un type et les différences entre cet homme et les autres comme des erreurs accidentelles commises dans la réalisation de ce type et se répartissant suivant la loi ordinaire des probabilités.

Si, au lieu de considérer les tailles, on considère les poids, la courbe binômiale obtenue n'est plus symétrique par rapport à son ordonnée maxima, c'est-à-dire que les deux termes du binôme ne sont plus égaux.

Cette loi semble embrasser tous les corps vivants, non-seulement ceux de l'espèce humaine, mais les corps similaires du règne animal et même du règne végétal.

Melsens. — *Sur les forces élastiques des gaz liquéfiables.* (2 p.)

T. XXX, juillet-décembre 1870.

De Tilly (J.-M.). — *Note sur les surfaces à courbure moyenne constante* (9 p.).

L'expression « courbure moyenne » est employée ici dans le sens que lui donne M. Bertrand [1]; mais, pour éviter tout équivoque, l'auteur eût mieux fait de dire simplement « surfaces à courbure constante ».

Son Mémoire peut être étudié au point de vue philosophique et au point de vue géométrique ordinaire.

On y trouve, au premier point de vue, des raisons nouvelles et peut-être nécessaires à l'appui de cette proposition, déjà déduite par M. Hoüel des travaux de M. Beltrami : que l'axiome XI (dit *postulatum*) d'Euclide ne pourra jamais être démontré par la géométrie plane.

Si l'on parvenait à appliquer rigoureusement des idées analogues à la géométrie des trois dimensions, ce qui ne paraît pas facile, on aboutirait à cette conclusion, déjà bien probable, sinon certaine, que l'axiome XI d'Euclide est un principe expérimental séparé, c'est-à-dire qu'il ne peut se déduire par le raisonnement des principes expérimentaux qui le précèdent.

L'auteur ajoute que la démonstration ne peut pas se faire non plus par la mécanique des systèmes plans.

Sans doute la preuve mécanique, si elle était possible, ne serait pas absolue, car la mécanique s'appuie elle-même sur d'autres principes expérimentaux, mais cette preuve serait au moins fort curieuse. L'auteur démontre qu'elle est impossible.

---

[1] *Calcul différentiel*, p. 741.

Si, en second lieu, écartant comme oiseuse la question des parallèles, on se place au point de vue géométrique ordinaire, on trouve dans la Note de M. de Tilly une méthode nouvelle pour établir *à priori* la géométrie et la mécanique des surfaces à courbure constante négative, ou pseudosphères.

Malheureusement, pour suivre les déductions de l'auteur, surtout au second point de vue, il faut lire à la fois deux de ses Mémoires, en prenant les calculs dans l'un et leur interprétation dans l'autre, ce qui en rend l'étude difficile.

CATALAN (E.). — *Sur la détermination de l'aire de l'ellipsoïde* (7 p).

Legendre a représenté par deux formules différentes l'aire d'un ellipsoïde quelconque.

La première formule permet de développer le résultat en séries. On la retrouve aisément en faisant usage d'une méthode remarquable donnée par M. Catalan ([1]) et fondée sur la variation d'un paramètre, fonction des variables indépendantes. Mais pour ce cas la méthode de M. Catalan n'est pas plus simple que celle de Legendre.

Il en est autrement pour la seconde formule, dans laquelle l'aire de l'ellipsoïde est réduite aux intégrales elliptiques, et que Legendre obtint en décomposant la surface de l'ellipsoïde en rectangles formés par des lignes de courbure, décomposition qui conduit à des calculs très-pénibles, tandis que la méthode de M. Catalan donne rapidement la même formule.

L'auteur a fait observer, il y a six ans ([2]), que cette méthode plus rapide équivaut à la décomposition de la surface en rectangles formés par des sections parallèles à l'un des plans principaux, et par leurs trajectoires orthogonales, ou, si l'on veut, par des lignes de niveau et des lignes de plus grande pente.

Dans sa Note actuelle, il fait voir que le premier procédé de Legendre équivaut, lui-même, à cette dernière décomposition.

L'emploi des lignes de niveau et de plus grande pente est donc préférable, dans ce cas, à celui des lignes de courbure.

En combinant les deux expressions de l'aire de l'ellipsoïde, M. Catalan arrive à l'intégrale définie suivante, probablement

---

([1]) *Journal de Liouville*, t. IV, 1839, p. 330 et suivantes.

([2]) *Mélanges mathématiques*, p. 7.

connue, dit-il :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{1-a^2\sin^2\varphi - b^2\cos^2\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}\, l\, \frac{1+\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}{1-\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}$$

$$= \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} - 1 + a\mathrm{E}(\mathrm{K},\mu)$$

$$+ \frac{1-a^2}{a}\mathrm{F}(\mathrm{K},\mu), \quad \left(\mathrm{K}=\frac{b}{a},\ \sin\mu = a\right),$$

F et E représentant les intégrales elliptiques de première et de seconde espèce, d'après les notations de Legendre.

MENSBRUGGHE (G. van der). — *Sur un principe de statique moléculaire avancé par M. Lüdtge.* (10 p.)

D'après les travaux de M. Plateau et de Dupré, la tension des lames liquides est tout à fait indépendante de leur épaisseur, tant que cette dernière surpasse le double du rayon d'activité sensible de l'attraction moléculaire ; au-dessous de cette limite, la force contractile irait en diminuant.

Dans une Note récemment insérée dans les *Annales de Poggendorff*, M. Lüdtge a cherché à prouver que les lames liquides acquièrent au contraire une tension d'autant plus forte qu'elles deviennent plus minces.

L'expérience principale sur laquelle il appuie sa conclusion consiste à insuffler de l'air dans un cylindre creux aux extrémités duquel il a réalisé successivement deux lames liquides planes. La lame formée en dernier lieu aura, en général, la plus grande épaisseur ; or M. Lüdtge prétendait que sous l'action de l'air insufflé elle prenait aussi la plus forte courbure, donc la tension la plus faible.

M. van der Mensbrugghe a répété l'expérience, mais, au lieu de comparer les courbures ou les flèches des deux lames, ce qui pourrait faire attribuer à l'influence des tensions des différences dues à d'autres causes, il s'est assuré par un moyen précis que la flèche de l'une des lames ne change pas pendant que cette lame diminue d'épaisseur. On doit donc admettre que la tension est indépendante de cette épaisseur.

L'auteur démontre que la forme la plus convenable à donner aux lames pour observer une variation éventuelle de leur tension est la forme hémisphérique.

Il décrit encore d'autres expériences curieuses, relatives aux phénomènes qui se produisent lorsqu'un fil de cocon est inséré dans une lame de liquide glycérique.

L'explication complète de ces différents phénomènes s'appuie sur les principes de la statique moléculaire des liquides, branche importante de la physique mathématique. Nous y reviendrons.

Plücker (J.). — *Note sur le stéréographe de poche.* (6 p.)

On sait que le levé des plans peut s'effectuer avec exactitude par la photographie, au moyen d'un nombre assez limité de perspectives, dont on déduit géométriquement les projections horizontales et les cotes de niveau de tous les points remarquables.

D'après le rapport sur l'Exposition universelle de 1867, il paraissait désirable de réduire à des proportions plus modestes le matériel nécessaire aux opérations photographiques du levé. C'est le but que l'auteur s'est proposé.

Son stéréographe, dont toutes les parties peuvent être mises en poche, sauf le pied qui forme une canne de dimensions usuelles, peut rendre de bons services aux topographes.

T. XXXI, janvier-juin 1871.

Quetelet (Ad.). — *Sur l'Anthropométrie ou sur la mesure des différentes facultés de l'homme.*

Développement de la taille humaine.

Extension remarquable de cette loi. (19 p. en deux Notes séparées.) Voir l'analyse du t. XXIX.

Catalan (E.). — *Sur l'équation de Riccati.* (6 p.)

L'équation de Riccati se ramène aisément à la forme

$$dy = a(x^m + y^2)\,dx.$$

On sait que son intégration est possible lorsque l'exposant peut être mis sous l'une ou l'autre des formes

$$-\frac{4k}{2k+1}, \quad -\frac{4(k+1)}{2k+1},$$

k étant un nombre entier mais les calculs sont très-compliqués. Cette Note a pour objet leur simplification.

D'abord si l'exposant appartient à la seconde forme, on le ramène à la première en posant

$$x = \frac{1}{u}, \quad y = -\frac{u}{a} - u^2 v.$$

Il suffit donc de considérer la première forme.

Posant

$$\alpha = (2k+1)\, a x^{\frac{1}{2k+1}}.$$

et

$$y_k = \frac{(-1)^{k-1}}{\alpha} + \cfrac{1}{\cfrac{3(-1)^{k-2}}{\alpha} + \cfrac{1}{\cfrac{5(-1)^{k-3}}{\alpha} + \dots + \cfrac{1}{\cfrac{2k-1}{\alpha} + \cfrac{1}{x^{\frac{2k}{2k+1}} y}}}},$$

l'intégrale générale est

$$y_k = \operatorname{tang}\left[c + (-1)_k \alpha\right].$$

MELSENS. — *Note sur les explosions des chaudières à vapeur.* (15 p.)

L'auteur pense, avec M. Boutigny ([1]), que l'état sphéroïdal de l'eau est une des causes principales d'explosion des chaudières, et que l'on peut empêcher, jusqu'à un certain point, la production de cet état en hérissant de pointes le fond des chaudières. Il décrit les expériences et les appareils qui lui ont servi à vérifier ce dernier fait, et propose de remplacer, dans les chaudières, les rivets ordinaires par des rivets plongeant dans l'eau, auxquels on pourrait donner la force convenable. Le placement des rivets plongeants ne présente pas plus de difficulté que celui des rivets ordinaires. Il reste à trouver un moyen pratique de nettoyer intérieurement les chaudières à pointes.

DUPREZ (F.). — *Discussion des observations d'électricité atmosphérique recueillie à Gand, et comparaisons entre ces observations et celles faites en d'autres lieux.* Seconde partie. (26 p.)

Dans la première partie de ce travail, l'auteur a comparé les électricités positive et négative de l'air sous le rapport de leur fréquence; dans cette seconde partie, il les considère au point de vue de leurs tensions. Il examine l'influence des principales circonstances atmosphériques sur les deux électricités.

([1]) T. XXVI des *Bulletins*.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DE SAINT-PÉTERSBOURG (¹).

T. XIV (suite et fin), 1869-1870.

BOUNIAKOWSKY (V.). — *Sur les congruences binômes exponentielles à base 3, et sur plusieurs nouveaux théorèmes relatifs aux résidus et aux racines primitives* (26 col.; fr.).

L'auteur donne, dans ce Mémoire, la résolution de la congruence

$$q.3^x \mp r \equiv 0 \pmod{P}.$$

Il commence par traiter le cas particulier de $q = r = 1$, qui présente deux cas, suivant que le module impair P est de l'une ou de l'autre des deux formes $6n \pm 1$; puis il passe de là au cas de q et de r quelconques.

Les principes sur lesquels est fondée sa solution le conduisent à une suite de théorèmes sur les racines primitives, dont voici les premiers :

Si $p = 24n + 5$ *et* $\frac{p-1}{4} = 6n + 1$ *sont premiers,* 3 *est une racine primitive de* p;

Si $p = 12n + 11$ *et* $\frac{p-1}{2} = 6n + 5$ *sont premiers,* $p - 3$ *est une racine primitive de* p;

Si $p = 40n + 7$ *et* $\frac{p-1}{2} = 20n + 3$ *sont premiers,* 10 *est une racine primitive de* p;

Etc.

SOMOFF (J.). — *Note relative à une démonstration donnée par Cauchy des équations générales de l'équilibre* (11 col.; fr.).

Cauchy a donné (²) une démonstration des équations générales de l'équilibre qui n'est pas déduite du principe des vitesses virtuelles. M. Somoff fait voir que cette théorie n'est pas satisfaisante.

« Le principe fondamental que Cauchy se propose de démontrer peut être énoncé ainsi : pour qu'il y ait équilibre entre des forces

---

(¹) Voir *Bulletin*, t. I, p. 240.

(²) *Exercices de Mathématiques*, t. II, 1827. *Voir* MOIGNO, *Leçons de Mécanique analytique : Statique*, XIIᵉ Leçon, p. 271.

appliquées à un système de points matériels et les résistances qui proviennent des liaisons auxquelles ces points sont assujettis, dans le cas où une seule fonction des coordonnées doit être nulle en vertu des liaisons pour tous les déplacements virtuels du système, il faut : 1° que les projections des forces sur les axes des coordonnées rectangulaires, auxquels on rapporte les points, soient proportionnelles aux dérivées partielles de cette fonction prises relativement aux coordonnées respectives, et 2° que le rapport de chaque projection à la dérivée respective soit le même pour toutes les forces. Or la démonstration que donne Cauchy de cette seconde proposition est en défaut, parce que l'équation de laquelle il tire l'égalité de rapport des projections de deux forces aux dérivées respectives devient dans plusieurs cas illusoire. »

L'auteur passe ensuite en revue les démonstrations du principe des vitesses virtuelles données par Lagrange et par Ampère. Il termine en insistant sur la nécessité, signalée par Cournot (*Bulletin de Férussac*, t. VIII, 1827), et par Ostrogradsky dans ses divers écrits sur la mécanique, d'exprimer les conditions des déplacements virtuels par des *inégalités*, et non par des équations, comme la plupart des auteurs de *Traités de Mécanique* se contentent de le faire.

Bouniakowsky (V.). — *Sur un théorème relatif à la théorie des résidus, et de son application à la démonstration de la loi de réciprocité de deux nombres premiers* (15 col.; fr.).

Le théorème qui sert de point de départ à l'auteur est le suivant :

« Soient a et r deux entiers impairs, premiers entre eux; le nombre a est supposé donné, et r astreint seulement à rester compris entre les limites 1 et $2a-1$ inclusivement. Cela posé, en désignant par p un nombre premier absolu quelconque (2 excepté), mis sous la forme $p = 2an + r$, on aura toujours

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{a-1}{2}n+m} \quad (\text{mod. } p),$$

ou bien, en faisant usage du symbole connu,

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}n+m},$$

l'exposant m étant *indépendant* de n. »

Bouniakowsky (V.). — *Sur le symbole de Legendre* $\left(\frac{a}{p}\right)$ (15 col.; fr.).

Suite des deux articles précédents du même auteur.

M. Bouniakowsky donne ici l'expression de l'exposant m, dans le théorème énoncé ci-dessus, en fonction de r, de a et d'une quantité auxiliaire qui dépend de ces deux derniers nombres. Il parvient à une expression du symbole $\left(\frac{a}{p}\right)$ par des fonctions numériques, essentiellement différentes par la forme de celle qui a été donnée par Gauss.

Nyrén (M.-M.). — *Détermination du coefficient constant de la précession au moyen d'étoiles de faible éclat* (32 col.; fr.) (¹).

MÉLANGES.

SUR UNE CLASSE PARTICULIÈRE DE SURFACES RÉGLÉES;

Par M. G. DARBOUX.

Les recherches sur les *axes* que j'ai publiées dans ce *Bulletin* m'ont conduit à l'étude de surfaces réglées remarquables formées de ces droites. Ces surfaces offrent une grande variété; mais leur étude est simple; elles comprennent comme cas particulier les surfaces *tétraédrales symétriques*, la *quadrispinale* et la *quadricuspinale* de M. de la Gournerie. Les propriétés des axes, c'est-à-dire des normales à un système de quadriques homofocales, expliquent les propositions si remarquables qu'a données M. de la Gournerie (²).

Dans la Note dont j'ai parlé plus haut, j'ai indiqué, d'après M. Chasles, quelles sont les propriétés caractéristiques des droites nommées *axes* par M. Reye (³). Si on les définit au moyen d'une seule surface du second degré, ce sont les droites perpendiculaires à

(¹) *Voir* une analyse de ce travail, *Bulletin*, t. I, p. 289.

(²) *Recherches sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques*, avec des Notes de M. Cayley. Paris, 1867, Gauthier-Villars.

(³) *Geometrie der Lage*, Hanovre, Carl Rümpler.

leur polaire. Si l'on emploie un système de surfaces homofocales, ce sont les normales à toutes ces surfaces. Enfin, on peut les définir, indépendamment de toute quadrique, par cette propriété qu'elles coupent les quatre faces d'un tétraèdre en quatre points, dont le rapport anharmonique est constant.

Si l'on considère un *axe* R et un système de quadriques homofocales, l'axe sera normal à l'une des surfaces; soit r le pied de cette normale. Il y aura à considérer, en même temps que le rayon R, le pied r et le plan P, mené par r perpendiculairement au rayon. Une propriété fondamentale des surfaces homofocales doit être rappelée ici : L'axe R est le lieu des pôles du plan P par rapport à toutes les surfaces homofocales. Ainsi, les axes sont aussi les droites lieux des pôles d'un plan par rapport à toutes les quadriques homofocales.

On peut se proposer des questions très-variées sur le système géométrique formé des éléments P, R, r.

1° Les plans P enveloppent une surface : quel est le lieu des points de contact de ces plans avec la quadrique du système homofocal qui leur est tangente, c'est-à-dire le lieu du point de rencontre r du plan avec son axe?

On résout cette question au moyen des théorèmes suivants :

« Si, par les différents points d'un plan, on mène les trois plans tangents aux surfaces homofocales passant en chacun de ces points, l'enveloppe de ces plans tangents est une surface de troisième classe, tangente aux quatre plans du tétraèdre conjugué aux quadriques et inscrite dans la développable Π enveloppe de toutes les quadriques.

» Si, par les différents points d'une droite, on mène les différents plans tangents aux surfaces homofocales passant en chacun de ces points, l'enveloppe de ces plans est une développable de la 5ᵉ classe, tangente à huit plans tangents de la développable Π, et aux quatre faces du tétraèdre conjugué. Cette développable est, d'ailleurs, circonscrite au paraboloïde, lieu des axes des plans passant par la droite, et elle admet cette droite comme tangente double. »

Ces propositions conduisent à la solution suivante de la question proposée :

Soit une surface S, de classe q, et n'étant ni tangente aux faces du tétraèdre, ni inscrite dans la développable Π. Ses plans tangents touchent chacun une des quadriques homofocales, et une seule. Le lieu des points de contact de ces plans tangents de la surface S avec

la quadrique correspondante est une surface Σ, d'ordre $5q$, ayant les quatre focales des quadriques pour lignes multiples d'ordre q, contenant au moins $4q$ droites situées sur la développable Π. Les surfaces Σ et S se correspondent point par point; elles sont du même genre.

C'est ainsi que, dans un travail précédent, j'ai montré (¹) qu'à un point qui peut être considéré comme une surface de 1re classe, correspond une surface du 5e ordre qui peut être représentée sur le plan.

Si la surface S est inscrite m fois dans la développable Π, l'ordre de la surface correspondante Σ diminue de $8m$, et l'ordre de multiplicité de chaque focale de $2m$.

Si la surface S devient tangente aux faces du tétraèdre, chaque contact diminue l'ordre de Σ d'une unité, et d'une unité aussi l'ordre de multiplicité de la focale située dans la face considérée.

Il faut cependant indiquer, non pas un cas d'exception, mais plutôt un fait singulier qui se présente dans l'application des propositions précédentes. Si l'on se donne *à priori* la surface Σ et que l'on mène les plans tangents aux quadriques passant en chacun des points de Σ, ces plans enveloppent une surface S; si l'on applique à la surface S les propositions précédentes, on trouvera pour Σ un ordre triple de l'ordre de cette surface. Cela tient à ce que chacun des points de Σ est donné par trois plans tangents de S; la surface tout entière sera, en quelque manière, obtenue trois fois (²).

2° Supposons que l'on se donne une surface Σ d'ordre m, et que par chacun de ses points on mène les plans tangents aux quadriques du système passant en ce point, quelle sera la classe de la surface S enveloppée par ces plans?

On trouve que la surface S est en général de la classe $3m$, et qu'elle

---

(¹) Voir *Bulletin*, t. II, p. 40.

(²) Un fait analogue se rencontre dans la théorie des surfaces réglées. On sait que l'ordre d'une surface réglée engendrée par une droite s'appuyant sur trois directrices peut être facilement calculé par une formule due à M. Salmon. Cette formule est en défaut dans la plupart des cas où l'on doit obtenir une surface du second degré; l'ordre qu'elle indique alors est 4, à cause du double mode de génération par des droites des surfaces du second degré. Par exemple, si l'on cherche l'ordre d'une surface réglée engendrée par une droite, s'appuyant sur trois coniques se coupant deux à deux en deux points, on trouve 4 au lieu de 2 pour l'ordre de la surface. Le même fait se présentera toutes les fois que le mode de description ou de génération considéré fournira les 2 systèmes de génératrices rectilignes.

est inscrite m fois dans la développable Π. Cette classe diminue de 2 unités, toutes les fois que la surface Σ vient passer par une focale. Dans le cas général, la surface S est tangente m fois à chaque face du tétraèdre.

3° Quand un point décrit une courbe, d'ordre n, les plans tangents aux surfaces homofocales qui passent en ce point enveloppent une développable de la classe $5n$. Ce nombre doit être diminué d'une unité pour chaque point commun à la courbe et à l'une des focales [1]. La développable générale de la classe $5n$ est tangente à $8n$ plans tangents de Π, et n fois à chaque face du tétraèdre. Ces nombres doivent être diminués, le premier de deux, le second d'une seule unité, pour chaque point commun à la courbe et à l'une des focales.

4° Enfin, prenons une développable de classe n, Δ_n. Les points de contact des plans tangents de cette développable forment, en général, une courbe d'ordre $3n$. Cet ordre sera diminué d'une unité pour tout plan tangent commun aux développables Δ_n et Π déjà considérées. C'est ainsi qu'à un cône circonscrit à l'une des quadriques correspond une courbe d'ordre 2, la courbe de contact du cône. En général, une développable circonscrite à l'une des quadriques suivant une courbe d'ordre p est de classe p et est tangente à $2p$ plans tangents de Π; la courbe correspondante, qui est précisément ici la courbe de contact de la développable, est bien de l'ordre indiqué par la formule.

5° Les axes des plans tangents d'une surface quelconque non développable forment un système de rayons rectilignes, dont j'ai dit quelques mots dans un travail précédent; mais, si l'on considère une surface développable, les axes de ses plans forment une surface réglée K. C'est précisément celle que nous nous proposons d'étudier.

Soit donc une développable Δ_n, de classe n, et cherchons l'ordre de la surface réglée formée par les axes des plans de Δ_n. D'après la réciprocité entre les plans et les axes, les axes des plans tangents à la surface réglée K seront tangents à Δ_n. Cherchons le nombre de plans tangents qu'on peut mener à K par une droite. Les axes de tous les plans tangents passant par une droite forment un paraboloïde. Nous sommes donc conduits à résoudre la question suivante :

Combien y a-t-il de génératrices, d'un même système, d'une sur-

[1] Nous comptons toujours le cercle de l'infini au nombre des focales.

face réglée du second ordre, tangentes à une surface développable? En d'autres termes, combien y a-t-il de plans tangents communs à Δ_n et au paraboloïde?

Ce nombre est évidemment égal à $2n$; mais, comme le paraboloïde est tangent aux quatre faces du tétraèdre conjugué, si la surface Δ_n est tangente α fois en tout à ces faces, parmi les $2n$ plans tangents à la fois à Δ_n et au paraboloïde, il y en aura α qui seront fixes et ne devront pas être comptés. On a donc la proposition suivante :

A une surface développable de classe n, Δ_n, tangente α fois en tout aux faces du tétraèdre conjugué, correspond une surface réglée d'ordre $2n - \alpha$, formée par les axes des plans de Δ_n. Cette surface réglée peut aussi être considérée comme l'enveloppe des plans dont les axes sont tangents à Δ_n.

Les surfaces réglées K, que nous considérons, se distinguent de toutes les autres par cette propriété qu'elles sont formées d'axes, c'est-à-dire de droites coupant les quatre faces d'un tétraèdre en quatre points dont le rapport anharmonique est constant. Réciproquement, toute surface réglée de cette nature étant donnée, en faisant correspondre à chaque génératrice le plan dont elle est axe, l'enveloppe de ce plan sera une surface développable d'où l'on pourra déduire la surface réglée. Comme il y a une infinité de systèmes de surfaces homofocales dont les mêmes droites sont axes, la correspondance pourra s'établir au moyen de plusieurs surfaces développables.

On pourrait, du reste, définir directement les surfaces réglées K de la manière suivante, qui se rapproche de la définition de M. de la Gournerie.

Par chaque point P de l'espace (x', y', z', t') on peut mener un seul rayon, tel que, sur ce rayon, les rapports anharmoniques du point A et des 4 points où le rayon rencontre les 4 faces du tétraèdre soient donnés. Ce rayon est défini par les équations suivantes :

$$x = x'\frac{a-u}{a-v},\quad y = y'\frac{b-u}{b-v},\quad z = z'\frac{c-u}{c-v},\quad t = t'\frac{d-u}{d-v},$$

qui donnent les coordonnées d'un point de la droite en fonction de la seule variable u. Pour avoir le point A et les 4 points dans les faces, il faut donner à u les 5 valeurs v, a, b, c, d, dont les rapports anharmoniques sont bien constants.

Alors une surface réglée L pourra être considérée comme le lieu

des axes s'appuyant sur une courbe C_n et coupés par cette courbe et par les 4 faces du tétraèdre en 5 points dont les rapports anharmoniques soient constants.

Il résulte de là un moyen simple de former l'équation de la surface; car, si les équations de la courbe sont

$$f(x, y, z, t) = 0, \quad f_1(x, y, z, t) = 0,$$

celles de la surface s'obtiendront en éliminant u, entre les deux équations

$$f\left[\frac{x(a-K)}{a-u}, \frac{y(b-K)}{b-u}, \ldots\right] = 0,$$

$$f_1\left[\frac{x(a-K)}{a-u}, \ldots\right] = 0.$$

Mais nous conserverons la définition déjà donnée par le système des surfaces homofocales.

D'après cette définition, la surface réglée K est *le lieu des pôles des plans de Δ_n par rapport à toutes les quadriques homofocales*. De là résulte la propriété fondamentale de la surface réglée K, sa double génération.

Car, si l'on considère les pôles des plans par rapport à une quadrique ρ, ces pôles forment une courbe C_n, polaire réciproque de Δ_n. Le lieu de ces courbes, quand on prend toutes les quadriques homofocales, constitue la surface réglée K. D'ailleurs, d'après un théorème relatif aux surfaces homofocales et dû encore à M. Chasles, on sait que quatre de ces courbes divisent les génératrices de K en quatre points, dont le rapport anharmonique est constant.

Donc, les surfaces réglées K peuvent être engendrées par des courbes d'ordre n, lieu des points formant sur chaque génératrice, avec les quatre points où celle-ci est coupée par les quatre faces du tétraèdre, des divisions homographiques.

Les sections des surfaces réglées par chaque plan du tétraèdre se composent : 1° de n droites, axes des plans tangents à Δ_n menés par le sommet opposé ; 2° d'une courbe du $n^{ième}$ ordre, polaire réciproque de Δ_n, par rapport à la focale (surface infiniment aplatie) située dans ce plan.

Non-seulement les courbes C_n, tracées sur la surface, forment des divisions homographiques sur la génératrice ; mais encore ce sont

des figures homographiques, puisqu'elles sont les polaires réciproques d'une même développable.

Il résulte de là que, si l'une des faces du tétraèdre est à l'infini et que, par un point de l'espace, on mène des droites parallèles et égales aux segments des génératrices compris entre deux courbes C_n ou entre deux faces du tétraèdre, les extrémités de ces segments décrivent des courbes toujours homothétiques entre elles et homographiques à l'une quelconque des courbes C_n tracées sur la surface ([1]).

Ainsi s'expliquent et deviennent intuitives les belles propriétés signalées par M. de la Gournerie. Pour obtenir toutes les surfaces étudiées par ce géomètre dans son remarquable livre, il suffira de prendre pour Δ_n toute développable tétraédrale symétrique déterminée par des équations de la forme

$$\begin{aligned} A m^{\alpha} + B n^{\alpha} + C p^{\alpha} + D q^{\alpha} &= 0, \\ A' m^{\alpha} + \ldots &= 0; \end{aligned}$$

mais, pour fixer les idées, nous ne parlerons, dans ce qui va suivre, que des développables de 4e classe D_4 circonscrites à deux surfaces du 2e ordre, et des surfaces réglées K_8 qui leur correspondent.

Soit donc une développable D_4, circonscrite à deux surfaces quelconques du 2e ordre. A cette développable, tant qu'elle n'est tangente à aucune des faces du tétraèdre, correspond une surface réglée d'ordre 8, qu'on peut aussi considérer comme engendrée par les courbes du 4e ordre, polaires réciproques de D_4 par rapport à chaque quadrique homofocale. Elle sera coupée par chaque face (A) du tétraèdre opposée au sommet A : 1° suivant 4 droites, axes des plans de D_4 passant par A; 2° suivant une courbe du 4e ordre et de 8e classe polaire réciproque de la développable D_4 par rapport à la focale qui se trouve dans la face (A).

([1]) M. Laguerre a signalé un cas particulier de ce théorème (*Nouvelles Annales de Mathématiques*). On mène les normales à une surface du second ordre en tous les points d'une section plane, et l'on prolonge ces normales jusqu'à un plan principal. Si, par un point de l'espace, on mène des droites parallèles et égales aux portions de normales considérées, l'extrémité de ces droites forme une conique.

En effet, la surface réglée des normales en tous les points d'une section plane appartient évidemment à la classe de celles que nous étudions. Elle peut être engendrée, soit par des droites, soit par des coniques. On sait, d'ailleurs, qu'elle a été étudiée d'abord par M. Chasles, qui en a donné les principales propriétés.

Comme la développable D_4 dépend des fonctions elliptiques, il en est de même de la surface K ; toutes les sections planes de cette surface seront des courbes du 8ᵉ ordre à 20 points doubles. En d'autres termes, la ligne double sera du 20ᵉ ordre, elle sera coupée en 6 points par chaque génératrice.

Si nous supposons que la développable D_4 ait une de ses coniques doubles dans l'une des faces du tétraèdre, la conique polaire, réciproque de cette ligne double, par rapport à la focale située dans cette face, deviendra une ligne double de la surface réglée K. Comme la développable D_4 peut avoir jusqu'à 4 coniques doubles dans les faces du tétraèdre, on voit que la surface réglée K peut avoir pour lignes doubles 1, 2, 3 ou 4 coniques situées dans les plans des faces du tétraèdre. La *quadrispinale* correspond au cas de 4 coniques doubles, celui où la développable D_4 est conjuguée au même tétraèdre que les quadriques homofocales. Il résulte de là les théorèmes suivants :

« La quadrispinale est le lieu des courbes polaires réciproques d'une développable D_4, par rapport aux quadriques inscrites dans une autre développable conjuguée au même tétraèdre que la première.

» Elle a 4 coniques doubles, polaires réciproques des lignes doubles de D_4, par rapport aux coniques infiniment aplaties faisant partie du système des surfaces homofocales. »

Soit

$$(1)\qquad \sum \frac{x^2}{a-\rho} = \frac{x^2}{a-\rho} + \frac{y^2}{b-\rho} + \frac{z^2}{c-\rho} + \frac{t^2}{d-\rho} = 0$$

l'équation des surfaces inscrites dans une même développable ou homofocales. Soient

$$(2)\qquad \begin{cases} Am^2 + Bn^2 + Cp^2 + Dq^2 = 0, \\ A'm^2 + B'n^2 + C'p^2 + D'q^2 = 0 \end{cases}$$

les équations de la développable D_4. Le pôle du plan $(mnpq)$, par rapport à la quadrique (5), est donné par les formules

$$(3)\qquad \lambda x = m(a-\rho),\quad \lambda y = n(b-\rho),\ldots.$$

Ce pôle devra donc satisfaire aux deux équations

$$(4)\qquad \sum \frac{A x^2}{(a-\rho)^2} = 0,\quad \sum \frac{A' x^2}{(a-\rho)^2} = 0,$$

qui représentent la courbe polaire réciproque de D_4, par rapport à la surface (ρ). Le résultat de l'élimination de ρ entre ces équations sera l'équation de la quadrispinale. L'équation obtenue ainsi doit être du 16e ordre et elle se réduira au 8e après la suppression du facteur $x^2y^2z^2t^2$ qu'elle doit évidemment contenir.

Au lieu de chercher l'équation de la surface, on peut exprimer les coordonnées d'un de ses points, en fonction de deux paramètres. Les formules (2) étant linéaires conduisent sans peine à des expressions de m, n, p, q en fonction d'un paramètre variable ρ_1 de la forme suivante

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} m^2 &= K(\rho_1-\alpha),\\ n^2 &= K'(\rho_1-\beta),\\ p^2 &= K''(\rho_1-\gamma),\\ q^2 &= K'''(\rho_1-\delta);\end{aligned}\right.$$

d'où l'on déduit pour x, y, z, t, en vertu des formules (3),

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \lambda x &= K(\rho-a)\sqrt{\rho_1-\alpha},\\ \lambda y &= K'(\rho-b)\sqrt{\rho_1-\beta},\\ \lambda z &= K''(\rho-c)\sqrt{\rho_1-\gamma},\\ \lambda t &= K'''(\rho-d)\sqrt{\rho_1-\delta}.\end{aligned}\right.$$

Les lignes $\rho_1 =$ const. sont les droites, les courbes $\rho =$ const. sont les courbes du 4e ordre. Dans le cas où l'une des faces du tétraèdre est rejetée à l'infini et où l'on a des surfaces homofocales, ces formules prennent la forme plus simple

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= K\,(\rho-a)\sqrt{\rho_1-\alpha},\\ Y &= K'(\rho-b)\sqrt{\rho_1-\beta},\\ Z &= K''(\rho-c)\sqrt{\rho_1-\gamma}.\end{aligned}\right.$$

On déduit de ces formules

$$(8)\qquad \sum \frac{dX}{d\rho}\frac{dX}{d\rho_1} = \Sigma\, K^2(\rho-a).$$

Donc, pour une valeur de ρ, le premier membre sera nul, et la courbe du 4e ordre, correspondant à la valeur ρ, annulant le second membre de l'équation (8), sera perpendiculaire à toutes les génératrices. Cette belle proposition est due à M. de la Gournerie.

Nous allons démontrer, dans la suite, une propriété équivalente à celle-ci.

Mais auparavant nous devons faire remarquer que les formules (6) conduisent sans peine à la détermination de la courbe double de la surface. En effet, tout point appartiendra à la courbe double quand il sera donné par deux systèmes de valeurs de ρ et de ρ_1. Soient ρ, ρ_1, ρ', ρ'_1 ces deux valeurs. On devra avoir

$$K^2 (\rho - a)^2 (\rho_1 - \alpha) = \mu K^2 (\rho' - a)^2 (\rho'_1 - \alpha),$$
$$K'^2 (\rho - b)^2 (\rho_1 - \beta) = \mu K'^2 (\rho' - b) (\rho'_1 - \beta),$$

et les équations analogues. Éliminons μ, ρ_1, ρ'_1. Nous serons conduits à la relation suivante entre ρ et ρ',

$$\begin{vmatrix} (\rho - a)^2, & (\rho - a)^2\alpha, & (\rho' - a)^2, & (\rho' - a)^2\alpha \\ (\rho - b)^2, & (\rho - b)^2\beta, & (\rho' - b)^2, & (\rho' - b)^2\beta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

Après la suppression du facteur $(\rho - \rho')^2$ cette équation prend la forme

$$A\rho^2\rho'^2 + B\rho\rho'(\rho + \rho') + C(\rho^2 + \rho'^2) + D\rho\rho' + E(\rho + \rho') + F = 0.$$

C'est l'intégrale de l'équation d'Euler relative aux fonctions elliptiques. On pourra donc exprimer ρ, ρ' par des fonctions elliptiques, et par suite ρ_1, ρ'_1. Donc les coordonnées d'un point de la courbe double seront des fonctions elliptiques d'un paramètre variable. Dans quelques cas particuliers, les fonctions elliptiques seront remplacées par des fonctions circulaires.

Revenons à la surface réglée. Si l'on prend au lieu du système de surfaces homofocales (1) le suivant

$$(9) \qquad \frac{x^2}{a - \rho} + \frac{y^2}{b - \rho} + \frac{z^2}{c - \rho} + \frac{h^2 t^2}{d - \rho} = 0.$$

Cette équation représente encore des surfaces homofocales, si le plan $t = 0$ est le plan de l'infini. Car les équations de la focale située dans ce plan

$$(10) \qquad \begin{cases} t = 0, \\ \dfrac{x^2}{a - d} + \dfrac{y^2}{b - d} + \dfrac{z^2}{c - d} = 0, \end{cases}$$

sont indépendantes de h. Si avec les surfaces (9) on prend la développable

$$(11)\quad \begin{cases} A\,m^2 + B\,n^2 + C\,p^2 + \dfrac{D}{h^2}\,q^2 = 0, \\ A'm^2 + B'n^2 + C'p^2 + \dfrac{D'}{h^2}\,q^2 = 0, \end{cases}$$

les équations (4) restent les mêmes, et, par suite, on obtient la même quadrispinale. L'équation des surfaces inscrites dans la développable (11) est évidemment

$$(12)\quad \frac{x^2}{\lambda A + \mu A'} + \frac{y^2}{\lambda B + \mu B'} + \frac{z^2}{\lambda C + \mu C'} + \frac{h^2 t^2}{\lambda D + \mu D'} = 0.$$

Cherchons si l'une de ces surfaces peut faire partie du système des quadriques (9). Les équations d'identification sont

$$(13)\quad \begin{cases} \lambda A + \mu A' = a - \rho, \\ \lambda B + \mu B' = b - \rho, \\ \lambda C + \mu C' = c - \rho, \\ \lambda D + \mu D' = h(d - \rho). \end{cases}$$

Les trois premières donnent λ, μ, ρ; la troisième h. Donc on peut toujours supposer, dans le mode de génération adopté, que la développable D_4 soit circonscrite à une des surfaces homofocales, et par suite, on peut énoncer le théorème suivant :

La quadrispinale à trois plans de symétrie est formée par les normales à une surface du 2e ordre en tous les points d'une courbe du 4e ordre, ayant les mêmes plans de symétrie que la surface.

Si les équations (13) sont indéterminées, ce mode de génération peut même être réalisé d'une infinité de manières, ce qui est conforme aux résultats obtenus par M. de la Gournerie [1].

Occupons-nous maintenant des plans tangents doubles de la quadrispinale.

La quadrispinale étant l'enveloppe des plans dont les axes sont tangents à D_4, les plans tangents doubles devront avoir pour axes des tangentes doubles de D_4. On sait d'ailleurs que les tangentes doubles

---

[1] *Recherches* citées, p. 137.

de D_4 sont les génératrices rectilignes des surfaces du 2ᵉ ordre inscrites dans D_4. Nous sommes donc conduits à la question suivante :

Étant données les surfaces du 2ᵉ ordre

$$(14)\qquad \sum \frac{x^2}{A+\lambda A'} = 0,$$

rechercher celles de leurs génératrices qui sont des *axes*.

L'axe du plan

$$mx + ny + pz + qt = 0$$

sera donné par les formules suivantes :

$$\lambda x = m(a-\rho),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

où ρ est une variable donnant tous les points de l'axe. Si cette droite est une génératrice de la surface (14), l'équation

$$\sum \frac{m^2(a-\rho)^2}{A+\lambda A'} = 0$$

devra être satisfaite, quelle que soit ρ, ce qui donne les équations :

$$(15)\qquad \left\{ \begin{array}{ll} m^2 = \dfrac{K(A+\lambda A')}{f'(a)}, & n^2 = \dfrac{K(B+\lambda B')}{f'(b)}, \\ p^2 = \dfrac{K(C+\lambda C')}{f'(c)}, & q^2 = \dfrac{K(D+\lambda D')}{f'(d)}, \end{array} \right.$$

où l'on a

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d).$$

En éliminant K et λ, on trouve

$$(16)\qquad \begin{vmatrix} m^2 f'(a), & n^2 f'(b), & p^2 f'(c), & q^2 f'(d) \\ A, & B, & C, & D \\ A', & B', & C', & D' \end{vmatrix} = 0.$$

Ces équations, linéaires par rapport aux carrés des coordonnées tangentielles m, n, p, q, conviennent à une développable D'_4. Nous sommes donc conduits aux théorèmes suivants :

Les plans tangents doubles d'une quadrispinale Q enveloppent une développable de la quatrième classe.

Leurs axes forment donc une quadrispinale Q', c'est-à-dire :

Une quadrispinale peut être définie : le lieu de celles des génératrices rectilignes des surfaces du second degré inscrites dans une même développable, c'est-à-dire qui rencontrent les 4 faces du tétraèdre conjugué commun en 4 points dont le rapport anharmonique est constant.

Voilà donc une nouvelle définition (1).

On a de plus une relation de réciprocité entre les quadrispinales Q, Q'. Car Q' étant le lieu des axes des plans tangents doubles de Q, les plans tangents doubles de Q' seront les mêmes que ceux de D_4, et auront pour axes les génératrices de Q. Chacune des quadrispinales est donc le lieu des axes des plans tangents doubles de l'autre, et, par conséquent, Q et Q' ont les mêmes propriétés. Les génératrices de Q, comme celles de Q', se groupent par 8, qui appartiennent à un même hyperboloïde. Tous les hyperboloïdes ainsi obtenus sont inscrits dans une développable D'_4, et l'on prend pour former la quadrispinale sur chaque hyperboloïde celles de ses génératrices qui sont des axes. Ces hyperboloïdes sont ceux que M. de la Gournerie a appelés *associés*.

La méthode que j'ai suivie parait digne d'intérêt, surtout parce qu'elle rattache les surfaces de M. de la Gournerie à des surfaces plus générales du 8e ordre. En particulier, la surface réglée du 8e ordre sans conique double se rencontre, comme je le montrerai, dans un grand nombre de recherches, et surtout elle joue un rôle important dans la théorie des surfaces du 3e ordre et du 4e ordre à conique double.

Toutes les surfaces indiquées dans cette Note se distinguent des autres surfaces réglées par la propriété suivante. Les coordonnées d'un de leurs points s'expriment par les formules

$$(17)\qquad \begin{cases} x=(a-\rho)R_1, & y=(b-\rho)S_1, \\ z=(c-\rho)T_1, & t=(d-\rho)U_1, \end{cases}$$

où R_1, S_1, T_1, U_1 sont des fonctions d'un autre paramètre. Pour les surfaces tétraédrales symétriques, ces fonctions sont des puissances

(1) La proposition réciproque serait la suivante : *La quadricuspinale est engendrée par les sécantes doubles d'une courbe gauche du 4e ordre, qui coupent les faces du tétraèdre conjugué à cette courbe en 4 points dont le rapport anharmonique est constant.*

de même exposant d'une fonction linéaire de ρ. Des formules toutes semblables peuvent être données pour les coordonnées tangentielles d'un de leurs plans tangents.

En effet, si dans les équations (17) on fait varier ρ, on a une droite. Les coefficients de tout plan

$$mx + ny + pz + qt = 0$$

contenant cette droite doivent satisfaire aux deux équations

$$\sum ma R_1 = 0, \quad \sum m\, R_1 = 0,$$

d'où l'on déduit, pour les coordonnées m, n, p, q du plan tangent des expressions de la forme

$$mR_1 = \alpha + \beta\, u, \quad nS_1 = \alpha' + \beta' u,$$
$$p\, T_1 = \alpha'' + \beta'' u, \quad qU_1 = \alpha''' + \beta''' u,$$

où u est une nouvelle variable.

Ainsi, pour la quadrispinale, on trouve

$$\lambda m = K \frac{a - \rho}{\sqrt{\alpha - \rho_1}}$$

et les formules analogues.

Ces faits sont d'ailleurs évidents géométriquement; car les surfaces réglées formées d'axes ne peuvent avoir pour réciproques que des surfaces formées aussi avec des *axes* (¹).

SUR UNE NOUVELLE MÉTHODE POUR L'ÉTUDE DES COURBES TRACÉES SUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES.

Le premier Mémoire de M. Clebsch, traitant de la représentation des surfaces sur un plan double, a été inséré dans les Mémoires de

(¹) Je dois signaler, en terminant, une remarquable Note de M. Lie, dans les *Nachrichten* de l'Université de Gœttingue, où se trouvent d'importantes propositions sur les courbes et les surfaces tétraédrales les plus générales, propositions qui seront analysées à leur place dans le *Bulletin*.

la Société de Gœttingue, t. XV [1]. Les études générales de l'auteur, dont nous avons rendu compte, permettaient de prévoir que toute surface du 5e ordre ayant une ligne double du 4e ordre peut être représentée sur un plan simple (c'est-à-dire de manière qu'à un point du plan corresponde un seul point de la surface). Mais pour obtenir la représentation la plus simple de la surface, il était indispensable de commencer par établir l'existence de certaines coniques, en nombre limité et ne formant pas une série, qui se trouvent sur la surface. M. Clebsch montre que les difficultés que présente la recherche de ces coniques peuvent être facilement surmontées, quand on commence par rechercher (ce qui n'offre aucune difficulté) la représentation de la surface sur un plan double. Disons d'abord quelques mots de la génération et des propriétés de cette surface.

On reconnaît, d'abord, que la courbe double du 4e ordre ne peut être que de la *première espèce;* car toute courbe double du 4e ordre et de deuxième espèce possédant une infinité de cordes qui la coupent en trois points et qui forment un hyperboloïde, ces cordes coupant la surface en trois points doubles en feraient partie tout entières, et la surface du 5e ordre se décomposerait en un hyperboloïde et une surface du 3e ordre. On trouve facilement l'équation de la surface; elle peut s'écrire :

$$C\varphi^2 - 2B\varphi\psi + A\psi^2 = 0, \tag{1}$$

où A, B, C désignent des fonctions linéaires, φ, ψ des fonctions du second degré des coordonnées. D'après cela, la surface est le lieu des coniques qui sont déterminées par les plans

$$A + 2\lambda B + \lambda^2 C = 0$$

et les surfaces

$$\varphi + \lambda\psi = 0.$$

Les plans des coniques enveloppent le cône

$$AC - B^2 = 0$$

dont le sommet défini par les équations

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$$

---

[1] CLEBSCH (A.), *Ueber die Abbildung einer Classe von Flächen* 5 *Ordnung*. Göttingen, in der Dieterichschen Buchhandlung, 1870. Ce Mémoire se vend séparément.

se trouve évidemment sur la surface. Ce point est d'ailleurs très-remarquable. Toute droite qui le contient coupe la surface en quatre autres points, qui se décomposent en deux groupes déterminés chacun par une équation du second degré. Le lieu des polaires de ce point, par rapport à chaque conique, forme une surface réglée du 4e ordre, ayant une courbe double du 3e ordre. Le cône enveloppe des plans des coniques est tangent doublement à la surface. Mais il y a un autre cône du 6e ordre, enveloppe des plans tangents simples de la surface, et ayant son sommet au même point que le cône des plans tangents doubles. Si l'on projette la surface du sommet commun de ces deux cônes, on obtient la représentation annoncée, et la *courbe de passage* est l'intersection du cône tangent simple par le plan de projection. Les formules de représentation sont de la forme

$$\rho x = \lambda\mu W, \quad \rho y = -\frac{\lambda+\mu}{2} W, \quad \rho z = W,$$
$$\rho t = -V + \sqrt{V^2 - UW},$$

où U, V, W désignent des fonctions du 4e, du 3e, du 1er degré d'une forme particulière des coordonnées λ, μ d'un point du plan. La courbe

$$R = V^2 - UW = 0$$

est la courbe de passage. Elle est du 6e degré, contient λ à la 4e puissance et μ à la 2e. En d'autres termes, elle a un point double et un point quadruple. M. Clebsch montre que ces propriétés suffisent à la définir et qu'elle est la courbe la plus générale satisfaisant aux conditions que nous venons d'énoncer.

Ces propriétés la rangent d'ailleurs dans la classe des courbes hyperelliptiques dont le genre est 3, et si l'on désigne par u_1, u_2, u_3 les trois intégrales de première espèce correspondant à chaque point de la courbe, on aura, d'après le théorème d'Abel présenté sous la forme que lui ont donnée Riemann et M. Clebsch (*Journal de Borchardt*, t. LXIII, p. 197),

$$\Sigma u_1 = 0, \quad \Sigma u_2 = 0, \quad \Sigma u_3 = 0,$$

les intégrales étant prises avec des limites inférieures convenables, les sommes s'étendant à tous les points d'intersection de la courbe R avec une courbe algébrique donnée. N'oublions pas que les inté-

grales ne sont déterminées qu'à des multiples près des six modules de périodicité. Cela posé, pour toute conique passant par les deux points multiples, on aura, comme le démontre M. Clebsch,

$$\sum_{k=1}^{k=6} u_i^{(k)} = 0,$$

la somme s'étendant aux six points où la conique vient couper la courbe (en laissant de côté les deux points multiples), et si la conique doit être tangente en deux points, les intégrales précédentes sont égales deux à deux, et l'on a, pour les trois points de contact,

$$u_i + u'_i + u''_i = \frac{Q_i}{2},$$

où les Q_i indiquent un système de périodes.

Comme les quantités Q_i contiennent six nombres entiers, on aura $2^6 = 64$, équations distinctes, et, par conséquent, 64 coniques. Ces coniques se détermineront donc par une équation du 7e degré, celle dont dépend la bissection des fonctions hyperelliptiques de genre $p = 3$, et l'on aura ensuite à résoudre plusieurs équations du 2e degré.

L'auteur démontre maintenant que ces coniques sont chacune la projection de deux courbes de la surface : 1° d'*une conique;* 2° d'une courbe du 3ᵉ ordre. On voit donc que la surface contient 64 coniques isolées, et l'existence de telles coniques une fois établie, on peut représenter la surface sur un plan simple de la manière suivante :

La série de coniques qui engendre la surface coupe l'une quelconque des coniques isolées que nous appellerons C en un seul point. Or, dès qu'on connaît un point d'une conique, toutes les autres peuvent s'exprimer rationnellement en fonction d'un paramètre. On pourra donc exprimer rationnellement les coordonnées de la surface en fonction : 1° d'un paramètre fixant la position du plan de chaque conique; 2° et d'un autre paramètre déterminant un point sur cette conique. Mais nous renvoyons à l'important Mémoire de M. Clebsch, qui contient bien des questions dont nous ne pouvons guère donner une idée ici : représentation de la courbe double, des coniques, etc., etc. Bornons-nous à dire que, dans la représentation du degré le moins élevé sur un plan simple, les sections planes de la surface sont représentées par des courbes du 4ᵉ ordre, ayant

en commun un point double et sept points simples. Notre seul but était d'indiquer ici le point essentiel du Mémoire, la relation entre toutes les équations déterminant des éléments géométriques remarquables d'une surface, et celles qui se rapportent à la bissection des fonctions hyperelliptiques et abéliennes.

M. Clebsch a publié un second Mémoire sur le même sujet dans les *Mathematische Annalen*. Ce Mémoire a pour titre : *Ueber den Zusammenhang einer Klasse von Flächen-Abbildungen mit der Zweitheilung der Abel'schen Functionen* (¹). L'auteur n'y considère que les surfaces qui peuvent être représentées à la fois sur un plan simple et sur un plan double. Alors, soient P le plan simple, Q le plan double. A tout point du plan double correspond un seul point du plan simple; mais la réciproque n'est pas vraie. A un point du plan P correspondent deux points du plan Q, un dans chaque feuillet. On est donc conduit, en définitive, à éliminer la surface représentée et à considérer des modes de transformation des figures planes, dans lesquels, à un point de l'une des figures (Q) correspondent deux points de l'autre figure (Q). Pour certains points de l'une des figures (P), les deux points de l'autre se confondent. L'ensemble de ces points confondus constitue la courbe de passage. Cela posé, on pourrait se proposer la question de la manière suivante : Trouver tous les modes de transformation plane dans lesquels, à un point de l'une des figures, correspond un point de l'autre. On reconnaît ainsi bien facilement que la question se réduit à trouver un *réseau* linéaire de courbes, tel que deux courbes appartenant à un même réseau se coupent en un certain nombre de points fixes contribuant à la définition du réseau et en deux points variables. On reconnait encore facilement que ces courbes doivent être ou rationnelles, ou elliptiques, à moins que les points par lesquels passent toutes les courbes n'appartiennent, en totalité ou en partie, à ce qu'on appelle *des systèmes complets de points d'intersection*. Il serait possible de dresser des tables de ces réseaux pour les différents ordres, analogues à celles que MM. Cremona et Cayley ont obtenues pour les transformations bi-rationnelles. L'analogie paraît même indiquer que le nombre de tels réseaux, ne se ramenant pas les uns aux autres par des transformations linéaires, est limité, etc. Ce n'est pas ainsi que M. Clebsch pose la question.

(¹) *Mathematische Annalen*, t. III, p. 45.

Il suppose, comme cela a lieu pour les exemples à traiter, que l'on connaisse la courbe de passage Ω sur le plan de la représentation double. Alors les sections planes de la surface se projettent ou se représentent par des courbes K jouissant des propriétés suivantes : elles passent par certains points fixes de Ω, et sont assujetties à être tangentes en des points variables se déplaçant sur Ω. Or M. Clebsch a déjà montré (*Journal de Borchardt*, t. LXIII) que la résolution algébrique de pareils problèmes a les rapports les plus intimes avec la bissection des fonctions abéliennes dont dépend la courbe Ω; mais nous renverrons, pour les énoncés précis, au travail de M. Clebsch.

La suite du Mémoire est consacrée à des applications. La marche suivie par l'auteur est plutôt synthétique qu'analytique. On se donne une courbe de passage, et, sans examiner d'une manière générale si toute courbe de passage peut conduire à un mode de transformation de l'espèce déjà indiquée, on la choisit parmi celles qui conviennent à certaines surfaces et qui doivent donner une solution connue à l'avance. C'est ainsi qu'avec une conique pour courbe de passage M. Clebsch retrouve l'application sur un plan double d'une surface du 2ᵉ ordre. Avec une courbe du 4ᵉ ordre, on obtient l'application sur le plan double de la surface générale du 3ᵉ ordre et de la surface du 4ᵉ ordre à conique double, etc. Ces deux dernières représentations s'effectuent en projetant : 1° la surface du 3ᵉ ordre d'un point arbitraire de la surface; 2° la surface du 4ᵉ ordre, à conique double, d'un point arbitraire pris sur cette ligne. Signalons encore l'étude importante des surfaces du 4ᵉ ordre à droite double et des surfaces du 5ᵉ ordre déjà traitées dans le Mémoire précédent, ce qui dispense l'auteur d'y insister. Enfin, M. Clebsch indique, dans une Note au bas de la page, une catégorie nouvelle de surfaces, les surfaces du 5ᵉ ordre à ligne double du 5ᵉ ordre, qui, elles aussi, sont susceptibles d'une représentation sur un plan double, qui ont un point triple et qui contiennent 10 droites. C'est à cette classe qu'appartient, comme exemple spécial, la surface particulière du 5ᵉ ordre traitée dans notre Mémoire de février. G. D.

(*A suivre.*)

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Holzmüller (F.-G.). — Ueber die Anwendung der Jacobi-Hamilton'schen Methode auf den Fall der Anziehung nach dem elektrodynamischen Gesetze. Dissertation. Gr. 8°. 23 S. Halle.

Hornstein (K.). — Ueber die Bahn des Hind'schen Kometen vom Jahre 1847. Lex. 8°, Wien, Gerold. 4 Ngr.

Irmer (B.). — Ueber Strahlensysteme dritter Ordnung mit Brennkurven. Dissertation. 4°. 24 S. Halle.

Kaiser (F.). — Verslag van den staat der sterrewacht te Leiden en van de aldaar volbragte werkzaamheden, in het tijdvak van den eersten Julij 1868 tot de laatste daagen der maand Junij 1869. Gr. 8°. 36 bl. Amsterdam, Sulpke. 30 c.

— D° in het tijdvak van den eersten Julij 1869 tot de laatste daagen der maand Junij 1870. Gr.-8°. 20 bl. Aldaar. 25 c.

Klepert (L.). — De curvis quarum arcus integralibus ellipticis primi generis exprimuntur. Dissertatio. 4°. Neisse, Graveur. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Klein (H.-J.). — Entwickelungsgeschichte des Kosmos. Gr. 8°. Braunschweig, Vieweg & Sohn. 1 Thlr.

Klein (H.-J.). — Handbuch der allgemeinen Himmelsbeschreibung. 2. Aufl. Gr. 8°. Ebendaselbst. 2 Thlr.

Klette (R.). — Das perspectivische Zeichnen. 2. Aufl. Gr. 8°. Braunschweig. $\frac{1}{4}$ Thlr.

Klinkerfues (W.). — Theoretische Astronomie. 1. Abtheilung. Gr. 8°. Braunschweig, Vieweg & Sohn. 1 $\frac{1}{3}$ Thlr.

König (J.). — Zur Theorie der Modulargleichungen der elliptischen Functionen. Gr. 8°. Heidelberg, C. Winter. 6 Ngr.

Lejeune-Dirichlet (P.-G.). — Vorlesungen über die Zahlentheorie. Herausgegeben von *R. Dedekind*. 2. Aufl. 1. Abth. Gr. 8°. Braunschweig, Vieweg & Sohn. $\frac{1}{3}$ Thlr.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

VIERTELJAHRSSCHRIFT DER ASTRONOMISCHEN GESELLSCHAFT (1).

5e année, IIe cahier, avril 1870.

BRUHNS. — *Zusammenstellung der Planeten und Cometen. Entdckungen im Jahre* 1869.

Dans l'année 1869, deux planètes ont été découvertes, (108) Hecuba, par Luther, à Bilk, et (109) Félicité, par C. Peters, à Clinton.

Trois comètes ont été visibles durant cette même année; la première est la comète périodique de Winnecke, qui a passé à son périhélie seulement quatre jours avant l'époque calculée, résultat très-satisfaisant, attendu que l'orbite résultait de trois mois et demi d'observations faites à onze années d'intervalle.

M. Oppolzer a calculé les éléments de cette comète pour cette dernière réapparition; M. Wolf, à Paris, a examiné le spectre de la comète.

ARGELANDER. — *Beobachtungen und Rechnungen über veränderliche Sterne.*

On présentera l'analyse de ce travail en même temps que celle d'un autre du même auteur, dans un prochain numéro du *Bulletin.*

GYLDÉN (H.). — *Untersuchungen über die Constitution der Atmosphäre, und die Strahlenbrechung. — Erste Abhandlung.* — Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg, 7e série, t. X.

Ce Mémoire a été analysé dans le *Recueil de la Société astronomique* en 1867; l'importance du travail nous a engagé à lire les deux Mémoires de l'auteur sur le même sujet, et à en rendre compte directement.

La température et, par suite, la densité de l'air en un point quelconque de l'atmosphère sont des fonctions de la hauteur du point considéré et du temps; si l'on connaissait la première de ces fonctions, on en déduirait la seconde, et en la portant dans la formule

(1) Voir *Bulletin*, t. II. p. 289.

connue de la réfraction astronomique, on n'aurait plus à effectue qu'un travail analytique.

La forme exacte de cette fonction étant inconnue, on est réduit construire une formule empirique vérifiant les observations connues Les considérations suivantes facilitent cette recherche.

Bien qu'il soit difficile de trouver la loi exacte de la diminution de la température pour les hauteurs qui nous sont accessibles, en raison des nombreuses causes perturbatrices, deux points sont néanmoins hors de doute : à la surface de la Terre, dans les zones tempérées, il faut s'élever d'environ 110 à 120 toises pour que la température s'abaisse d'un degré R.; en second lieu, cette diminution de la température se ralentit à mesure qu'on s'élève. On est donc conduit à la formule

$$\frac{1+mt}{1+mt_0}=1-\beta s+\gamma s^2-\ldots,$$

dans laquelle m est le coefficient de dilatation de l'air, t la température à la hauteur h, t_0 la température à la surface, $r=a+h$, a étant le rayon de la terre, $s=\frac{h}{r}$; β, γ,..., sont des quantités indépendantes de s.

Il pourra se faire que, pour des valeurs assez grandes de s, le second membre de la formule précédente cesse de décroître, sans qu'il en résulte aucun inconvénient, pourvu que la hauteur correspondante soit plus grande que la limite supérieure reconnue à l'atmosphère, et que la densité de l'air déduite de la formule pour cette hauteur soit extrêmement petite.

M. Gyldén n'a égard qu'aux variations périodiques de la température, celles dont la période est un an ou un jour; il considère β, γ,... comme des fonctions du temps, pour représenter la période annuelle, et tient compte des variations diurnes en ajoutant à la formule un terme qui s'annule à une petite hauteur, le terme $\varepsilon e^{-\varkappa s}$, où $\varkappa$ est une constante. Il fait donc

$$(1)\qquad \frac{1+mt}{1+mt_0}=1-\beta s+\gamma s^2+\ldots+\varepsilon(e^{-\varkappa s}-1).$$

Ces variations de la température modifieront la réfraction moyenne, qui aura une période annuelle et une diurne; c'est ainsi qu'on peut s'expliquer les discordances trouvées par Argelander entre les ré-

fractions déduites des observations du Soleil et celles que l'on conclut des observations de nuit.

Pour déterminer les constantes contenues dans la formule (1), on compare les observations de la moyenne des températures de chaque jour, faites en deux lieux dont les hauteurs au-dessus du niveau de la mer sont très-différentes : on voit que le terme en ε disparaît de ces moyennes; l'auteur a eu recours à cinq groupes d'expériences, parmi lesquelles nous citerons les observations faites sous la direction de Plantamour, à Genève, et sur le grand Saint-Bernard. Désignons par β_0 la partie moyenne de β, il trouve

$$\beta_0 = 124,2 + 2,325 \frac{\gamma}{5000},$$

et, pour déterminer γ, il a recours aux observations faites par des aéronautes, et notamment par Gay-Lussac. Les valeurs obtenues pour γ varient de 1580 à 4040; M. Gyldén adopte $\gamma = \frac{1}{4}\beta_0^2 = 3969$, ce qui n'est pas en contradiction avec les observations et lui permet de faire simplement

$$(2) \qquad X = \frac{1 + mt}{1 + mt_0} = \left(1 - \frac{1}{2}\beta s\right)^2.$$

Si l'on compare entre elles les valeurs de β tirées des observations de Plantamour, et aux diverses époques de l'année, on trouve la formule

$$(3) \qquad \beta = 123,4 - 17,0\cos\varphi + 4,2\sin\varphi - 2,2\cos 2\varphi - 3,9\sin 2\varphi,$$

qui représente la période annuelle; φ est le temps converti en degrés, à raison de 30 degrés par mois. Quant à la quantité x, qui est à peu près indépendante de la période diurne, on lui trouve des valeurs très-différentes, suivant qu'on l'emprunte à tel système d'observations ou à tel autre; toutefois ces valeurs sont très-grandes, et elles le sont encore par rapport à $\frac{\beta}{2}$, de telle sorte qu'il est ainsi démontré que les oscillations diurnes de la température ne s'étendent qu'aux premières couches de l'atmosphère. L'auteur n'en tient pas compte dans l'expression de la réfraction; pour ce qui concerne la période annuelle, il donne à la fin de son Mémoire la variation de la réfraction qui correspond à une variation $\delta\beta$ de β, de sorte que, dans

chaque cas particulier, si l'on a calculé une formule analogue à la formule (3), on pourra se représenter nettement la variation de la réfraction due à la variation annuelle de la température.

La formule (2) donne une valeur de t qui cesse de décroître quand s attend la valeur $\omega = \frac{2}{\beta}$, qui répond à une hauteur d'environ 14 milles géographiques, par conséquent plus grande que la limite supérieure de l'atmosphère, qui est seulement de 9 milles; c'était là une condition qui devait être remplie.

Partant de la formule (2), M. Gyldén calcule aisément la densité ρ de l'air en fonction de s, et il vérifie que, pour $s = \omega$, la valeur assignée à ρ par la formule est extrêmement petite.

Il établit ensuite de la manière ordinaire la formule

$$d.\delta z = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\sin z \, dw}{\sqrt{\cos^2 z - 2\alpha(1-w) + 2s\sin^2 z}},$$

où

$$w = \frac{\rho}{\rho_0},$$

et, d'après sa théorie,

$$w = \left(\frac{\omega}{\omega - s}\right)^2 e^{-s\left(\frac{\omega}{\omega - s} - 1\right)}.$$

En dernière analyse, il exprime δz de la manière suivante :

$$\delta z = \sqrt{c}\,(A_0 + A_1 c + A_2 c^2 + \ldots),$$

avec

$$c = \operatorname{tang}^2 \frac{\zeta}{2}, \quad \operatorname{tang}\zeta = \sqrt{2\omega}\,\operatorname{tang} z.$$

Les coefficients A sont des fonctions assez compliquées des transcendantes

$$\Omega(\lambda, \eta) = \int_0^\infty (1+y)^\lambda e^{-\eta y}\, dy,$$

qui se calculent aisément quand λ est positif, et qui, dans le cas de λ négatif, se ramènent à une fonction connue, le logarithme intégral, par les formules

$$(\lambda - 1)\Omega(-\lambda, \eta) = 1 - \eta\,\Omega(-\lambda + 1, \eta),$$
$$\Omega(-1, \eta) = -e^\eta \operatorname{li}(e^{-\eta}).$$

Au surplus, on trouve dans le Mémoire plusieurs formes de développement de ces transcendantes ([1]).

M. Gyldén termine en donnant l'expression numérique de δz en fonction de c, et des variations de δz répondant aux variations des constantes qui y sont contenues.

Gyldén (H.). — *Untersuchungen über die Constitution der Atmosphäre und die Strahlenbrechung. — Zweite Abhandlung.* — Mémoires de l'Académie impériale de Saint-Pétersbourg, 7e série, t. XII ([2]).

Le premier Mémoire avait pour but de trouver l'influence de variations périodiques de la température sur la réfraction astronomique ; dans ce second Mémoire, l'auteur tient compte de variations quelconques de la température, périodiques ou non.

L'expression de la température, à différentes hauteurs de l'atmosphère, se compose évidemment d'une série de fonctions dont le nombre est indéterminé, et qui, outre la variable indépendante s, comprennent un certain nombre de paramètres qu'on empruntera aux observations. En l'absence d'une loi rigoureuse, le choix de ces fonctions reste assez arbitraire ; il doit être fait de façon à vérifier les observations connues, et à apporter dans le calcul autant de simplicité et de convergence que possible.

L'auteur pose toujours

$$\text{(1)} \qquad \frac{1+mt}{1+mt_0} = 1 - \beta_1 s + \beta_2 s^2 - \ldots,$$

et représente ainsi seulement la variation moyenne de la température avec la hauteur, de telle sorte que $\beta_1, \beta_2, \ldots$ sont des constantes ; si l'on borne le second membre à ses deux premiers termes $1 - \beta_1 s$, on représente, à très-peu près, les observations, ce qui montre qu'il suffira très-certainement d'avoir recours au troisième terme ; si l'on voulait représenter toutes les variations de t avec le temps, en suppo-

---

([1]) Pour la réfraction horizontale, on est conduit à la transcendante

$$\int_0^\infty (1-e^{-sy})^{\nu} e^{-\mu\varpi y} y^{i-\frac{1}{2}} dy,$$

étudiée par Laplace et Cauchy.

([2]) Nous avons reçu sur le même sujet un second article très-remarquable et que nous publierons également.

sant $\beta_1, \beta_2, \ldots$ des fonctions du temps, on serait forcé d'aller beaucoup plus avant dans la série.

On a reconnu que les inégalités de la température dont la période est un an ou un jour se laissent très-bien représenter par l'expression

$$\sum_i k_i e^{-\varkappa_i s^2} \cos(A_i + a_i s + i\theta),$$

où i est un indice entier, θ le temps, k_i, $\varkappa_i$, A_i et a_i des constantes. Comme la température à la surface de la terre sera représentée par

$$\sum_i k_i \cos(A_i + i\theta),$$

on voit que les constantes k_i et A_i seront faciles à déterminer; il n'en est pas de même des autres. Les constantes a_i sont jusqu'ici presque complétement inconnues; on sait toutefois qu'elles oscillent entre des limites qui ne sont pas trop éloignées. Si l'on développe les cosinus de l'expression précédente suivant les puissances de s, elle prendra la forme

$$\Sigma\Sigma \eta_{i,j} s^j e^{-\varkappa_i s^2},$$

dans laquelle les indices i et j sont des nombres entiers, et $\eta_{i,j}$ des coefficients fonctions du temps. C'est là la forme à laquelle l'auteur s'arrête; elle a l'avantage de pouvoir représenter aussi des variations de température non périodiques. Le problème se présente dès lors comme il suit :

La réfraction étant calculée en partant de la formule (1), on suppose que la température t éprouve la perturbation

$$\eta s^n e^{-\varkappa s^2}.$$

On demande de trouver les inégalités correspondantes de la densité de l'air et de la réfraction.

Dans ce calcul, on pourra évidemment négliger le carré des inégalités.

Soit

$$\chi_0 = 1 - \beta_1 s + \beta_2 s^2 + \ldots, \quad \chi_i = \varepsilon_i s^n e^{-\varkappa s^2},$$

$$\chi = \frac{1 + mt}{1 + mt_0} = \chi_0 + \chi_1 + \chi_2 + \ldots;$$

on trouve

$$w = \frac{\rho}{\rho_0} = w_0 + w_1 + w_2 + \ldots;$$

$$w_0 = e^{-\int_0^s \left(\frac{a}{l} + \frac{d\chi_0}{ds}\right)\frac{ds}{d\chi}}, \quad w_i = \varepsilon_i w_0 \frac{x + \frac{a}{l}}{x}(1 - e^{-xs}) - \varepsilon_i w_0 \frac{a}{l} s,$$

l ayant la signification de la ***Mécanique céleste***.

Ces formules donnent donc les inégalités de ρ, qui répondent à celles de t. Il convient de remarquer que les inégalités de ρ, dues à la présence de la vapeur d'eau, sont de la même forme; on le voit aisément, en partant de la relation

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0}\,\frac{1 + mt}{1 + mt_0}\,\frac{1 - \frac{3}{8}\frac{\pi_0}{p_0}}{1 - \frac{3}{8}\frac{\pi}{p}},$$

dans laquelle π et π_0 désignent les tensions de la vapeur d'eau, et en s'appuyant sur la loi de Magnus, qui donne π en fonction de t et de l'état hygrométrique φ, savoir

$$\pi = \varphi e^{\frac{kt}{\gamma + t}},$$

ce qui peut se réduire à

$$\pi = \pi_0 \frac{\varphi}{\varphi_0} e^{-\nu s}.$$

Si donc on connaît un certain nombre de valeurs de φ répondant à un même nombre de valeurs de s, on pourra développer φ, et, par suite, π en une série de la forme $\Sigma n s^n e^{-xs}$; l'auteur a tenté un essai numérique sur ce sujet, en s'appuyant sur les mesures effectuées par Glaisher dans un voyage aérien.

Il ne reste donc qu'à trouver les inégalités de la réfraction; elles se ramènent à des intégrales telles que

$$\int_0^{\omega} \frac{s^n e^{-xs}\, ds}{\sqrt{\cos^2 z + 2s \sin^2 z}},$$

lesquelles s'expriment elles-mêmes à l'aide des fonctions

$$V_k^i = \frac{1}{\Gamma(k+1)} \int_0^1 x^i \frac{d^k [x(1-x)]^k}{dx^k} e^{-\eta x}\, dx.$$

La relation

$$V_k^i = (-1)_i \frac{d^i V_k^0}{dx^i}$$

ramène la recherche des fonctions V_k^i à celle des fonctions V_k^0; soit posé

$$V_k^0 = \frac{\eta^k}{(k+1)(k+2)\ldots(2k+1)} \psi_k.$$

M. Gyldén donne un développement simple de $e^{\frac{1}{2}\eta}\psi_k$ suivant les puissances de η, et une expression de $\frac{\psi_k}{\psi_{k+1}}$ en fraction continue; en opérant d'une autre manière, il arrive à remplacer les fonctions V par les intégrales connues $\int_T^\infty e^{-t^2}\,dt$. Comme dans le premier Mémoire, il donne le développement numérique de la réfraction suivant les puissances impaires de $\sqrt{c}$, et aussi de ses dérivées par rapport aux constantes qu'elle contient; il démontre enfin ce théorème important, que les coefficients de $c^{\frac{1}{2}}$ et $c^{\frac{3}{2}}$ sont indépendants de la loi de variation de la température; l'influence de la vapeur d'eau ne se fait sentir que sur le coefficient de $c^{\frac{3}{2}}$ et les suivants.

Réfraction terrestre. — L'intégration de l'équation différentielle de la réfraction entre deux points de la courbe lumineuse conduit à la connaissance de l'angle compris entre les tangentes à la courbe en ces deux points; mais c'est seulement dans des cas particuliers que cet angle est dans un rapport simple avec la différence entre la direction vraie et la direction apparente d'un objet; ainsi, dans le cas des astres, le premier des angles est égal au second; il en est le double dans le cas où l'observateur et l'objet sont situés dans un même plan horizontal. Dans les autres cas de la réfraction terrestre, il faut revenir à l'équation différentielle de la trajectoire; en l'intégrant, on aura la quantité s en fonction de l'angle géodésique v formé par les rayons vecteurs menés du centre de la terre aux deux stations, et l'on en déduira aisément l'expression de la réfraction

$$R = Av + Bv^2 + Cv^3 + \ldots,$$

dans laquelle les coefficients sont des fonctions faciles à calculer de

la distance zénithale apparente z. M. Lindhagen a traité ainsi la question d'une façon très-complète; M. Gyldén suit la même voie, et tient compte des inégalités de la température, comme dans le cas des réfractions astronomiques.

PIHL (O.-A.-L.). — *Micrometric Examination of Stellar Cluster in Perseus.* — Christiania, in-4°.

M. Pihl, avec de faibles instruments, a abordé la détermination précise des étoiles d'une partie du grand amas de Persée, ce qu'on n'avait fait jusqu'ici qu'avec de puissantes lunettes ou de forts héliomètres; il a effectué son travail entre les années 1862 et 1866. L'instrument dont il s'est servi est une lunette de 3 pouces $\frac{1}{4}$ d'ouverture, montée parallactiquement, et munie d'un micromètre circulaire et d'un micromètre de Boguslawski; les grossissements employés sont de 40 et 120 fois. Ses deux repères principaux étaient deux étoiles de 8e grandeur, situées, l'une au nord, l'autre au sud du groupe; quand il avait recours au plus fort grossissement, il était obligé d'employer encore un certain nombre d'étoiles de comparaison dont les positions avaient été bien déterminées. L'erreur probable des positions relatives est de $0'',31$ pour une différence d'ascension droite, et de $0'',29$ pour une différence de déclinaison. Il est toutefois à craindre que le travail ne reste affecté d'erreurs systématiques, provenant d'une incertitude dans les positions des deux principales étoiles de comparaison qui constituent la base de M. Pihl. M. Bruhns exprime le désir de voir déterminer à nouveau cette base avec précision, à l'aide d'un bon héliomètre, de manière qu'aucune incertitude ne plane sur le beau travail de M. Pihl. Ce travail est accompagné d'une carte représentant, en dehors des 85 étoiles cataloguées, 117 autres étoiles que l'observateur a pu apercevoir dans sa lunette, dans les circonstances les plus favorables.

VALENTINER. — *Determinatio orbitæ cometæ V anni* 1863. — Berlin, 1863.

Les éléments de cette comète, découverte par quatre observateurs différents, du 28 décembre 1863 au 9 janvier 1864, présentèrent aux premiers calculateurs une ressemblance assez grande avec ceux des comètes de 1810 et de 1490, et on émit l'hypothèse d'une révolution de 53 années. Un essai tenté par M. Weiss, pour représenter les observations dans cette hypothèse, en montra l'invraisemblance; le

il entrepris par M. Valentiner sur toute l'apparition range
itivement la comète dans la catégorie des comètes parabo-
les.

Les observations s'étendent à une durée de deux mois; on a re-
cilli, pendant cet intervalle, 169 positions de dix-neuf observa-
oires. M. Valentiner a calculé d'abord une orbite parabolique avec
trois observations, et s'en est servi pour construire une éphéméride
de six heures en six heures, à cause du fort mouvement de la comète
(jusqu'à 8 degrés par jour), et il a comparé les observations à l'éphé-
méride. Après avoir formé 9 lieux normaux, il a obtenu des élé-
ments qui représentent très-bien ces positions normales; $d\alpha \cos\delta$ est
inférieur à $0'',8$, et $d\delta$ à $3'',3$. Ces erreurs ont été utilisées pour
trouver les corrections des éléments en fonction de $\varepsilon = 1 - e$, et
avec les éléments corrigés, on a calculé les résidus en ascension
droite et en fonction de ε; il arrive que ces résidus seraient inaccep-
tables si l'on donnait seulement à ε la valeur 0,0001, ce qui condui
rait pourtant déjà à une révolution de 60 000 ans. La comète e
donc bien parabolique.

F. T.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACA DES SCIENCES (1).

T. LXXIII.

N° 1. Séance du 3 juillet 1871.

LATERRADE. — *Sur la théorie des deux Soleils.*

BOUSSINESQ (J.). — *Sur le mouvement permanent varié de les tuyaux de conduite et dans les canaux découverts.*

N° 2. Séance du 10 juillet 1871.

SAINT-VENANT (DE). — *Rapport sur le Mémoire de LEVY, relatif aux équations générales des mouvement corps solides ductiles, au delà des limites où l'élasticité mener à leur premier état.*

Voici la conclusion du Rapport de M. de Saint-Venant :

« ... On peut dire que la branche nouvelle de mécanique pour laquelle l'un de nous a hasardé, sans le préconiser comme le meilleur, le terme d'*hydrostéréodynamique*, a été menée à un état plus avancé par le Mémoire de M. Levy, dans lequel, pour le cas le plus général et aussi pour le cas important de symétrie semi-solaire, se trouve posé nettement et complétement en équation son problème, qui ne l'avait encore été que dans le cas fort restreint du mouvement par plans parallèles.

» Nous proposons donc à l'Académie d'approuver ce Mémoire, et d'en ordonner l'insertion au *Recueil des Savants étrangers.* »

L'Académie adopte les conclusions de ce Rapport.

Partiot. — *Mémoire sur les marées fluviales.*

M. Partiot cherche à expliquer et à relier ensemble, par une théorie, les faits nombreux qu'il a observés, dans la vue surtout d'arriver à prévoir quelle influence les recreusements opérés dans le lit des fleuves pourront avoir sur la hauteur des marées remontant leur cours, et d'augmenter ainsi, par ces travaux, dans l'exécution desquels on aura pris pour auxiliaire la puissante action du jusant ou reflux, le tirant d'eau des bâtiments destinés à aborder à des ports continentaux, tels que Rouen, Bordeaux, Nantes.

Boussinesq (J.) — *Sur le mouvement permanent varié de l'eau dans les tuyaux de conduite et dans les canaux découverts.*

Suite du Mémoire présenté dans la séance du 3 juillet.

Chapelas. — *Mémoire sur la direction des étoiles filantes.*

M. Chasles fait hommage à l'Académie, de la part de M. le Prince Boncompagni, des sept derniers mois de 1870 du *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche.*

N° 3. Séance du 17 juillet 1871.

Serret (J.-A.) — *Sur le principe de la moindre action.* Addition au Mémoire lu devant l'Académie dans la séance du 12 juin 1871.

Saint-Venant (de). — *Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit.*

Voici comment s'exprime M. de SAINT-VENANT au commencement de sa Communication :

« Le Mémoire sur les *marées fluviales* de M. l'Ingénieur des Ponts et Chaussées Partiot, présenté dans la séance du 10 juillet 1871, contient une idée qui, étant complétée et modifiée dans sa forme, me paraît pouvoir conduire à une solution, depuis longtemps désirée, du problème du mouvement *non permanent* des eaux dans les canaux découverts ; ce qui comprend, outre les marées dont il est question, les *crues* des rivières, ainsi que le retrait de leurs eaux, temporairement gonflées par des pluies abondantes. »

M. de SAINT-VENANT donne, en effet, dans son Mémoire, la théorie et les équations générales du mouvement non permanent des eaux courantes.

LEMALY et MAQUIEU. — *Sur l'observation des essaims d'étoiles filantes des mois de novembre et d'août, et sur l'observation d'un bolide faite à Trémont, près Tournus.*

A cette occasion, M. LE VERRIER passe en revue les stations fondées pour l'observation régulière des essaims d'étoiles filantes, en indiquant ce qu'elles ont fait et ce qu'elles s'apprêtent à faire.

EGGER. — *Nouveaux documents sur les quatre Livres conservés de l'*Optique *de Claude Ptolémée.*

M. CHASLES ajoute qu'il possède une copie (qui paraît être du XVIIe siècle) de la traduction latine de l'*Optique* de Ptolémée, sous le titre de : *Incipit liber Ptolemæi de Opticis, sive aspectibus, translatus ab Ammirato Eugenio siculo, de arabico in latinum.*

RESAL (H.). — *Du mouvement d'un corps solide qui supporte un système matériel animé d'un mouvement relatif par rapport à ce corps.* (Extrait par l'auteur.)

Faire ressortir l'influence, sur le mouvement d'un corps solide, de l'inertie due au mouvement relatif d'un système matériel dont les points d'appui se trouvent sur ce corps, tel est le problème que je me suis proposé de résoudre d'une manière générale, et qui comprend comme cas particuliers le théorème de Laplace, se rapportant à l'action que les marées pourraient avoir sur le mouvement de la Terre autour de son centre de gravité, et les théories de quelques appareils giratoires.

TERQUEM (A.) — *Mémoire sur les sons produits par des ébranlements discontinus, et en particulier à l'aide de la sirène.*

M. Terquem reprend la question traitée, en partic, expérimentalement par Auguste Seebeck et théoriquement par Ohm, généralise et simplifie les méthodes de calcul employées par Ohm, et applique la théorie générale à un grand nombre de cas particuliers.

CORNU et MERCADIER. — *Sur les intervalles musicaux*, 3e Note.

Voir pour les deux premières Notes les *Comptes rendus* des 8 et 22 février 1869.

Voici la conclusion des auteurs :

« Les intervalles musicaux employés dans une mélodie lente et sans modulations sensibles sont ceux de la gamme pythagoricienne dérivant de la série des quintes, et qui ne contient que deux sortes d'intervalles irréductibles : l'octave 2, et la quinte $\frac{3}{2}$. Ce ne sont pas ceux de la gamme dite *naturelle*, qui contient trois sortes d'intervalles irréductibles : l'octave 2, la quinte $\frac{3}{2}$, et une tierce majeure $\frac{5}{4}$, qui, d'après nous, n'est applicable qu'à l'harmonie. »

N° 4. Séance du 24 juillet 1871.

CHASLES. — *Propriétés générales des courbes géométriques relatives à leurs axes harmoniques.*

L'étude des propriétés des polaires d'un point par rapport à une courbe ou à une surface a été déjà, de la part des géomètres, l'objet de nombreux travaux. Dans la communication actuelle, M. Chasles s'occupe des droites polaires (ou axes harmoniques) d'un point, et ajoute de nombreuses propriétés à celles qu'on connaissait déjà. Ces théorèmes sont groupés dans des paragraphes dont les titres suivent :

CHAPITRE I. — *Concernant les axes harmoniques de la courbe* U_m, *qui ont leurs pôles sur une courbe* $U_{m'}$.

1° *Propriétés relatives à la courbe enveloppe des axes harmoniques de la courbe* $U_{m'}$.

2° *Théorèmes dans lesquels interviennent les éléments de la courbe* U_m.

3° *Théorèmes dans lesquels interviennent les éléments de la courbe* $U_{m'}$.

CHAPITRE II. — *Propriétés concernant les tangentes et les normales d'une courbe* $U_{m'}$ *considérées comme axes harmoniques de* U_m.

CHAPITRE III. — *Propriétés concernant les axes harmoniques de* U_m *qui ont leurs pôles sur les tangentes ou les normales d'une courbe* $U_{m'}$.

Chapitre IV. — *Où l'on considère la courbe* $U_{m'}$, *qui donne lieu à des axes harmoniques de* U_m *et une autre courbe* $U_{m'}$.

Chapitre V. — *Où l'on considère les axes harmoniques d'un même point relatif à deux courbes* U_m, U_m.

Chapitre VI. — *Axes harmoniques relatifs à trois courbes* U_{m_1}, U_{m_2}, U_{m_3}.

Saint-Venant (de). — *Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit.* (2ᵉ Note; *voir* la Séance précédente.)

Secchi (Le P.). — *Sur les relations qui existent, dans le Soleil, entre les facules, les protubérances et la couronne.* (2ᵉ Lettre; *voir* les *Comptes rendus*, 6 juin 1871.)

Boussinesq (J.). — *Théorie générale des mouvements qui sont propagés dans un canal rectangulaire horizontal.*

Cet article est la généralisation de celui qui a été présenté, le 19 juin 1871, sur l'onde solitaire.

N° 5. Séance du 31 juillet 1871.

Serret (J.). — *Sur le principe de la moindre action.* Deuxième addition au Mémoire lu devant l'Académie, dans la séance du 12 juin 1871.

« Le principe de la moindre action, dit M. Serret, ne concerne que les systèmes dans lesquels le nombre des liaisons est inférieur de deux unités au moins au nombre des coordonnées des corps. Le cas de $n = 2$, que je me propose d'examiner ici, peut donc être regardé comme celui des *systèmes à liaisons complètes*, au point de vue des propriétés relatives à la moindre action. »

M. Serret fait une application complète de ses formules au mouvement elliptique des corps célestes.

Yvon Villarceau. — *Note sur la comète périodique de d'Arrest.*

[illegible] (H.) — *Essai sur la théorie des vapeurs.*

Leveau. — *Retour de la comète périodique de d'Arrest.*

N° 6. Séance du 7 août 1871.

[illegible] (A.). — *Sur l'emploi de l'infini en mathématiques.*

Cette Note résume les idées que M. Transon a développées dans deux brochures récemment publiées *sur l'emploi de l'infini en mathématiques.*

Denza. — *Bolides observés en Italie pendant le mois de juillet.*

Poggia. — *Observation d'un bolide, faite à l'Observatoire de Marseille, le* 1er *août.*

Lemasy. — *Bolide observé le* 4 *août* 1871, *à Trémont, près Tournus.*

N° 7. Séance du 14 août 1871.

Le Verrier. — *Observations de l'essaim d'étoiles filantes du mois d'août, faites pendant les nuits des* 9, 10 *et* 11 *août* 1871, *dans un grand nombre de stations correspondantes.*

Resal. — *De l'insuffisance des chaînes de sûreté du matériel de chemins de fer.*

Janssen (J.). — *Sur la constitution du Soleil.*

N° 8. Séance du 21 août 1871.

Fonvielle (W. de). — *Sur quelques apparitions analogues à celles du bolide de Marseille.*

Chapelas. — *Étoiles filantes du mois d'août* 1871.

Guyot. — *Sur les bolides du* 11 *août* 1871 *et du* 24 *juin* 1870.

N° 9. Séance du 28 août 1871.

Saint-Venant (de). — *Sur la houle et le clapotis.*

Resal (H.). — *Du profil rationnel des segments d'un piston de machine à vapeur.*

Cornu. — *Réponse à une Note de M. Janssen.*
Voir la séance du 14 août.

Janssen (J.). — *Voyage aéronautique du* Volta, *entrepris le* 2 *décembre* 1870, *en vertu d'une mission scientifique.*

N° 10. Séance du 4 septembre 1871.

Bertrand (J.). — *Note sur la théorie de la Lune* d'Aboul-Wefâ.

« Une petite portion seulement du *Traité d'Astronomie* d'Aboul-Wefâ est parvenue jusqu'à nous. Un fragment de cinquante lignes environ, relatif à la théorie de la Lune, a été souvent cité et minutieusement étudié. Il aurait, en effet, une grande importance historique si, comme on l'a prétendu, on y pouvait voir la preuve que les astronomes arabes, au xe siècle de notre ère, connaissaient l'inégalité nommée *variation*, et déduite, six siècles plus tard, des observations de Tycho Brahé. »

Restreignant le débat à l'étude pure et simple du texte connu et exactement traduit, M. Bertrand conclut en ces termes :

« Quelle qu'ait été à Bagdad la renommée d'Aboul-Wefâ, il nous est donc impossible de lui accorder grande confiance, et M. Biot est excusable d'avoir vu, dans le texte qui nous occupe, une paraphrase confuse, embarrassée, inintelligente du cinquième chapitre du livre V de l'*Almageste*. »

Saint-Venant (de). — *Sur la houle et le clapotis* (suite).

Secchi (Le P.). — *Sur les relations qui existent dans le Soleil entre les protubérances et les autres parties remarquables* (troisième Lettre).

M. Chasles présente à l'Académie un nouvel ouvrage de M. *Quetelet*, intitulé : *Anthropométrie, ou mesure des différentes facultés de l'homme.*

Rendant compte de cet ouvrage, M. Chasles termine ainsi :

« L'ouvrage actuel marque un pas considérable dans l'étude des questions qui embrassent le monde physique et moral. Il donnera lieu à des recherches dans cette branche nouvelle des sciences, qui demande l'application des mathématiques à tant d'autres connaissances si variées. »

Moutier (J.). — *Sur la chaleur dégagée par la dissolution des gaz dans les liquides.*

N° 11. Séance du 11 septembre 1871.

Chasles. — *Sur la découverte de la variation lunaire.*

M. Chasles combat l'opinion émise par M. Bertrand dans la séance précédente, et conclut en ces termes : « J'ai eu l'honneur d'entretenir l'Académie de cette question, il y a peu d'années (*Comptes rendus*, t. LIV, p. 102 ; 1862), et d'exposer les considérations qui me

rtaient à prononcer que cette troisième inégalité était bien la variation, et qu'Aboul-Wefâ l'ajoutait au résultat final de Ptolémée, c'est-à-dire aux deux premières inégalités rectifiées par la *prosneuse*. Je résumerai en peu de mots les considérations qui m'ont porté à adopter cette solution.... ».

PETERS (F.). — *Éléments de la petite planète* (114).

DEPREZ (M.). — *Nouvel indicateur dynamométrique, faisant connaître toutes les circonstances du travail de la vapeur dans le cylindre d'une machine.*

N° 12. Séance du 18 septembre 1871.

BORELLY. — *Découverte d'une nouvelle petite planète, la* 116ᵉ *du groupe situé entre Mars et Jupiter.*

RESAL (H.). — *Théorie du régulateur Larivière.*

DARBOUX (G.). — *Des courbes tracées sur une surface, et dont la sphère osculatrice est tangente en chaque point à la surface.*

Ce problème n'a encore été ni proposé ni résolu pour aucune surface. M. Darboux donne l'équation différentielle du 2ᵉ ordre dont dépend le problème, et intègre cette équation dans deux cas importants : 1° pour les surfaces du 2ᵉ ordre; 2° pour les surfaces du 4ᵉ ordre qui ont pour ligne double le cercle de l'infini. L'intégration relative au second cas, qui, avec les coordonnées ordinaires, présenterait une extrême difficulté, est faite d'une manière simple. Le succès est dû au choix des coordonnées : M. Darboux définit un point par ses puissances relatives à cinq sphères orthogonales; on a ainsi un système de coordonnées, liées entre elles par une relation homogène du 2ᵉ degré, qui se prête avec facilité à la solution d'un grand nombre de questions et difficilement abordables par d'autres procédés.

DURRANDE (H.). — *Extrait d'une théorie du déplacement d'une figure qui se déforme.*

M. Durrande établit, par des considérations d'homographie, les formules qui expriment les projections du déplacement infiniment petit d'un point d'une figure, et, par l'introduction de paramètres convenables, met en évidence le mouvement de la figure et les déformations de ses diverses parties.

Guillemin. — *Sur deux observations qui paraissent offrir quelque analogie avec celle du météore signalé récemment par M. Coggia.*

N° 13. Séance du 25 septembre 1871.

Bertrand (J.). — *Observations sur la Note de M.* Chasles, *relative à la découverte de la variation lunaire.*

Luther. — *Observations des planètes* (116) *et* (117), *faites à l'Observatoire de Paris. Découverte d'une petite planète de* 11e *grandeur, le* 14 *septembre, à* 11 *heures du soir.*

Deprez (M.). — *Instrument servant à calculer mécaniquement la valeur des aires, des centres de gravité et des moments d'inertie des figures planes.*

Jordan (C.). — *Sur la résolution des équations différentielles linéaires.*

L'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants dépend d'une équation caractéristique $\Delta(s) = 0$, où s est une inconnue.

M. Jordan énonce la proposition suivante :

« On pourra remplacer les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par d'autres variables indépendantes, fonctions linéaires des premières, à coefficients rationnels, et choisies de telle sorte que le système des équations différentielles linéaires qui les détermine se décompose en autant de systèmes partiels que le déterminant Δ contient de facteurs irréductibles différents $F(s), F_1(s), \ldots$.

» Le système partiel correspondant à l'un de ces facteurs irréductibles, tel que $F(s)$, sera lui-même décomposable en autant de systèmes moindres qu'il y a de séries distinctes correspondant à l'une quelconque σ des racines de $F(s) = 0$. »

Janssen. — *Remarques sur une dernière Note de M. Cornu.*

N° 14. Séance du 2 octobre 1871.

Chasles. — *Réponse à un passage de la Note de M.* Bertrand, *insérée dans le* Compte rendu *de la dernière séance.*

Yvon Villarceau. — *Nouvelle détermination de la* vraie *figure de la Terre ou de la surface de niveau, n'exigeant pas l'emploi des nivellements proprement dits.*

Dans une communication faite à l'Académie le 28 décembre 1868, M. Villarceau, après avoir établi la distinction entre les deux espèces de nivellements *géodésique* et *géométrique*, avait fait voir que leur simple comparaison suffisait pour déterminer la figure de la surface de niveau, lorsqu'on applique au nivellement géodésique une correction qu'on avait négligée jusqu'alors et qui repose sur le second théorème concernant les attractions locales. Dans sa communication actuelle, M. Villarceau développe une seconde solution qu'il avait déjà annoncée, et dont le principe consiste à calculer la distance qui sépare la surface de niveau et celle d'un sphéroïde de révolution pris comme surface de comparaison, normalement à la première, en fonction de la latitude et de la longitude géodésiques.

Delaunay. — *Note sur les deux planètes* (116) *et* (117) *récemment découvertes.* — *Note sur les nébuleuses découvertes et observées par M.* Stephan *à l'Observatoire de Marseille.*

Secchi (Le P.). — *Sur les divers aspects des protubérances et des autres parties remarquables à la surface du Soleil. Classification de ces phénomènes.* (Quatrième Lettre.)

Fonvielle (W. de). — *Programme d'une ascension aérostatique pour observer les étoiles filantes de novembre* 1871.

Luther et Peters. — *Observations des planètes récemment découvertes* (116) *et* (117).

Tisserand. — *Détermination de l'orbite de la planète* (117) Lomia.

Lœwy. — *Sur un nouvel instrument équatorial.*

Jordan (C.). — *Sur la classification des groupes primitifs.*

M. Jordan énonce le théorème suivant :

« Si le nombre premier p n'est pas de la forme $2^n - 1$, la classe p ne contiendra qu'un seul groupe formé des substitutions

$$| x, x = \alpha | \quad (\text{mod. } p).$$

» Si p est de la forme $2^n - 1$, la classe p contiendra trois groupes, à savoir le précédent et ceux qui sont respectivement formés des substitutions linéaires

$$| x, ax + \alpha | \quad (\text{mod. } 2)$$

et des substitutions linéaires fractionnaires

$$\left| x, \frac{ax+\alpha}{bx+\beta} \right| \quad (\text{mod. } 2),$$

x, a, α, b, β étant des entiers complexes formés avec la racine i d'une congruence irréductible de degré n par rapport au module 2. »

CORNU (A.). — *Sur la détermination de la vitesse de la lumière.*

M. CHASLES présente à l'Académie les livraisons de février et de mars 1871 du *Bullettino* de M. le prince Boncompagni.

N° 15. Séance du 9 octobre 1871.

FAYE. — *Sur l'histoire, en l'état présent, de la théorie des comètes.*

BERTRAND. — *Réponse à la Note de M.* CHASLES.

TISSERAND. — *Détermination de l'orbite de la planète* (116) (C.-H.-F. PETERS).

PAINVIN. — *Détermination des rayons de courbure en un point quelconque d'une surface définie par son équation tangentielle.*

N° 16. Séance du 16 octobre 1871.

DELAUNAY. — *Réapparition de la comète de Tuttle.*

CHASLES. — *Théorèmes concernant la détermination sur une courbe géométrique d'une série de groupes de points en nombre déterminé.*

M. Chasles énonce et démontre d'abord la proposition suivante :

« Lorsqu'une courbe C_m, d'ordre m, a des points multiples d'ordre r, r', r'',..., et des points doubles faisant ensemble l'équivalent de

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2} - \nu$$

points doubles, on détermine sur cette courbe des groupes de $(\nu+1)$ points, au moyen d'un faisceau de courbes d'ordre $(m-\mu)$ ayant : 1° des points multiples d'ordre $r-\rho$, $r'-\rho'$, $r''-\rho''$,... coïncidant respectivement avec les points d'ordre r, r', r'',... de C_m ; 2° des points simples coïncidant avec les points doubles de C_m ; et 3° d'autres points simples, en nombre

$$3(m-1) - m\mu + r(\rho-1) + r'(\rho'-1) + r''(\rho''-1) + \ldots + \nu,$$

coïncidant avec des points simples de C_m; les indéterminées μ, ρ, ρ', ρ'',... devant satisfaire à la relation

$$\mu^2 - 3\mu - \rho(\rho-1) - \rho'(\rho'-1) - \rho''(\rho''-1) - \ldots + 2 = 0.$$

» Les nombres entiers indéterminés μ, ρ, ρ', ρ'',... peuvent être positifs ou négatifs. »

De cette proposition générale et fondamentale, qui peut prendre encore, comme le montre M. Chasles, un accroissement de généralité, résultent un grand nombre de théorèmes.

CHASLES. — *Réponse aux observations présentées dans la dernière séance, par* M. BERTRAND, *à propos d'*ABOUL-WEFA. L. P.

MÉLANGES.

SUR LA GÉOMÉTRIE DITE NON EUCLIDIENNE;

PAR FÉLIX KLEIN (1).

Les développements suivants sont relatifs à la Géométrie dite *non euclidienne* de Gauss, de Lobatchefsky, de J. Bolyai, et aux considérations qui s'y rattachent, présentées par Riemann et par Helmholtz sur les fondements de notre Géométrie. Nous ne poursuivrons pas toutefois les spéculations philosophiques qui ont conduit aux travaux en question; notre but est surtout de présenter les résultats mathématiques de ces recherches, en tant qu'ils se rapportent à la théorie des parallèles, sous une forme nouvelle et intuitive, et de rendre claire et accessible à tous l'intelligence de cet ensemble de vérités. La voie qui nous y conduira est la *Géométrie projective*, dont nous établirons l'indépendance par rapport à la question de la théorie des parallèles. On peut maintenant, à l'exemple de Cayley, construire une détermination métrique projective générale, relative à une surface du second degré choisie à volonté, comme *surface fondamentale*. Cette détermination métrique projective fournit, suivant l'espèce de la surface du second degré employée, une image pour les différentes théories des

(1) Extrait des *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, année 1871, n° 17, 30 août.

parallèles établies dans les travaux dont nous parlons. Mais elle n'est pas seulement une image de ces théories, elle en révèle, en outre, la nature intime.

I. — *Les différentes théories des parallèles.*

L'axiome XI d'Euclide est, comme on sait, équivalent à ce théorème, que la somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits. Or Legendre a réussi à démontrer ([1]) que la somme des angles d'un triangle ne peut être plus grande que deux droits; il a fait voir, de plus, que, si dans un seul triangle la somme des angles vaut deux droits, il en sera de même pour la somme des angles de tout triangle. Mais il n'a pas pu prouver que la somme des angles ne saurait être moindre que deux droits.

Une série d'idées analogue semble avoir servi de point de départ aux recherches de Gauss sur le même objet. Gauss avait bien compris qu'il était réellement impossible de démontrer le théorème de l'égalité de la somme des angles d'un triangle à deux angles droits; que l'on pouvait, au contraire, construire une géométrie conséquente avec elle-même, et dans laquelle cette somme serait moindre. Il appelait cette géométrie la *Géométrie non euclidienne* ([2]); il s'est beaucoup occupé de ce sujet; mais malheureusement, sauf quelques simples indications, il n'a rien publié là-dessus. Dans cette Géométrie non euclidienne, on rencontre une certaine constante, caractéristique pour la détermination métrique de l'espace. En attribuant à cette constante une valeur infinie, on obtient la Géométrie euclidienne ordinaire. Mais si la constante a une valeur finie, on trouve une Géométrie différente, dans laquelle ont lieu, par exemple, les lois suivantes : La somme des angles d'un triangle est moindre que deux droits, et d'autant moindre que l'aire du triangle est plus grande. Dans un triangle dont les sommets sont à une distance infinie, la somme des angles est égale à zéro.

([1]) Cette démonstration, comme celle que Lobatchesfky a donnée de la même proposition, suppose que la longueur de la droite est infinie. Si l'on renonce à admettre cette hypothèse (*voir* le texte ci-après), alors les démonstrations cessent aussi de subsister, comme on peut le voir clairement, en remarquant que, sans cela, elles devraient avoir également lieu dans la Géométrie de la sphère.

([2]) *Voy.* Sartorius von Waltershausen, *Gauss zum Gedächtniss*, p. 81, ainsi que quelques Lettres de la *Correspondance* de Gauss et de Schumacher.

Par un point hors d'une droite, on peut mener deux parallèles à cette droite, c'est-à-dire deux lignes qui coupent cette droite d'un côté ou de l'autre en des points infiniment éloignés. Les droites, passant par le même point extérieur et situées entre les deux parallèles, ne coupent nulle part la droite donnée.

Lobatchefsky, professeur de Mathématiques à l'Université de Kazan ([1]), et, quelques années plus tard, le mathématicien hongrois J. Bolyai ([2]), ont été conduits, chacun de leur côté, à la même Géométrie non euclidienne, et ont traité le même objet dans des écrits développés. Cependant ces travaux étaient restés à peu près ignorés, jusqu'au moment où la publication, faite en 1862, de la *Correspondance de Gauss et de Schumacher,* attira sur eux l'attention des géomètres. Depuis lors, la conviction s'est répandue que, dès à présent, la théorie des parallèles est complète, c'est-à-dire qu'elle est acceptée avec son indétermination réelle.

Mais cette conception a dû subir une modification essentielle depuis qu'a paru, en 1867, après la mort de Riemann, sa leçon inaugurale *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la Géométrie,* et que, peu de temps après, dans le présent Recueil ([3]), Helmholtz a publié ses recherches *sur les faits qui servent de base à la Géométrie.*

Dans son écrit, Riemann fait observer que, de ce que l'espace est illimité, il ne s'ensuit pas forcément qu'il soit infini. Au contraire, on pourrait concevoir, sans tomber en contradiction avec notre intuition, qui ne s'applique jamais qu'à une portion finie de l'espace, que l'espace fût fini et rentrant sur lui-même; la Géométrie de notre espace se présenterait alors comme la Géométrie sur une sphère de

---

([1]) *Messager de Kazan* (*Казанскій Вѣстникъ*), 1829. — *Mémoires de l'Université de Kazan* (*Ученыя Записки*), 1836-38. — *Journal de Crelle,* t. 17 (Géométrie imaginaire). — *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien,* Berlin, 1840 (*). — *Pangéométrie,* Kazan, 1855. (Il en a été publié une traduction italienne dans le t. V du *Giornale di Matematiche,* 1867.)

(*) Une traduction française de cet opuscule a paru en 1866 dans *les Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux,* t. IV. Les premiers travaux de Lobatchefsky remontent à 1826. (*Note de la Rédaction.*)

([2]) Dans un *Appendice* à l'ouvrage intitulé : *Tentamen juventutem studiosam,* etc., Maros-Vásárhely, 1833. On en trouve une traduction italienne dans le t. VI du *Giornale di Matematiche,* 1868 (*).

(*) Une traduction française de l'*Appendice* a paru au commencement de la même année, dans le t. V des *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles.* (*Note de la Rédaction.*)

([3]) *Nachrichten von der K. Gesellschaft,* 1868, n° 9.

trois dimensions placée dans une *multiplicité* [1] de quatre dimensions. Cette conception, qui se trouve aussi chez Helmholtz, entraînerait cette conséquence, que la somme des angles d'un triangle serait, comme dans le triangle sphérique ordinaire, plus grande [2] que deux angles droits, et d'autant plus grande que le triangle aurait une plus grande aire. La ligne droite n'aurait plus alors de points à une distance infinie, et l'on ne pourrait, par un point donné, mener aucune parallèle à une droite donnée.

Une Géométrie fondée sur ces conceptions occuperait, à côté de la Géométrie euclidienne ordinaire, une place toute semblable à la Géométrie de Gauss, de Lobatchefsky et de Bolyai, dont nous parlions tout à l'heure. Tandis que cette dernière attribue à la droite deux points à l'infini, l'autre Géométrie ne lui en attribue aucun (c'est-à-dire qu'elle lui attribue deux points imaginaires à l'infini). Entre les deux se place, comme transition, la Géométrie euclidienne; elle attribue à la droite deux points à l'infini qui coïncident.

Conformément à un mode de s'exprimer, en usage dans la nouvelle Géométrie, nous désignerons, dans ce qui va suivre, ces trois Géométries respectivement sous les noms de Géométrie *hyperbolique, elliptique* [3] ou *parabolique,* suivant que les deux points à l'infini de la ligne droite sont réels, ou imaginaires, ou coïncidents.

II. — *Représentation sensible des trois sortes de Géométrie par la détermination métrique générale de Cayley.*

Le besoin de rendre appréciable aux sens les spéculations très-abstraites qui ont conduit à l'établissement de ces trois Géométries a fait chercher des exemples de déterminations métriques qui pussent être conçues comme des images de ces Géométries, et qui missent ainsi en évidence leur enchaînement logique intime.

La Géométrie parabolique n'a pas besoin d'une telle représentation, parce qu'elle coïncide avec la Géométrie euclidienne et qu'à ce titre elle nous est familière.

---

[1] *Mannigfaltigkeit, varietas* (Gauss).

[2] Les démonstrations contraires de Legendre et de Lobatchefsky supposent, comme nous l'avons déjà remarqué, l'espace infini.

[3] La Géométrie sphérique ordinaire doit être appelée, d'après cela, une Géométrie *elliptique.*

On a indiqué, pour la Géométrie elliptique et la Géométrie hyperbolique, des représentations qui mettent en évidence la nature de ces Géométries au moyen d'objets mesurés dans le sens de la détermination métrique euclidienne. Ces représentations n'expliquent toutefois que la partie planimétrique de ces Géométries. Beltrami, à qui l'on doit la représentation de la Planimétrie dans la Géométrie hyperbolique ([1]), a démontré qu'il ne pouvait exister rien d'analogue pour l'espace. L'image de la partie planimétrique de la Géométrie elliptique est, comme on le voit immédiatement, la Géométrie sur la sphère ou, plus généralement, sur les surfaces de courbure constante positive. La Géométrie hyperbolique, au contraire, trouve son interprétation sur les surfaces de courbure constante négative. Cette dernière interprétation, malheureusement, semble ne pouvoir jamais fournir l'intuition du plan tout entier, les surfaces de courbure négative constante étant toujours limitées par des arêtes de rebroussement, etc.

Je vais, maintenant, commencer par établir, pour les trois Géométries, tant sur le plan que dans l'espace, des représentations qui fassent complétement apercevoir leurs caractères propres; puis je montrerai que ces représentations ne sont pas seulement des interprétations de ces Géométries, mais qu'elles expriment leur nature intime et conduisent par conséquent à leur pleine compréhension.

Les représentations en question considèrent comme objet de la détermination métrique le plan ou l'espace, et emploient seulement une détermination métrique autre que l'ordinaire, et qui, entendue dans le sens de la Géométrie projective, se présente comme une généralisation de la détermination métrique ordinaire. Cette détermination métrique généralisée a été établie dans ce qu'elle a d'essentiel par Cayley ([2]); seulement cet auteur part d'un point de vue tout différent de celui que nous adoptons ici. Cayley construit cette détermination métrique pour montrer comment la Géométrie (euclidienne) de la mesure peut être regardée comme un cas particulier de la Géo-

---

([1]) *Saggio di interpretazione della Geometria non euclidea.* Giornale di Matematiche, t. VI, 1868.

([2]) Dans le *Sixth Memoir upon Quantics,* Philos. Transact., t. CXLIX. *Voy.* la traduction des *Sections coniques* de SALMON par FIEDLER, 2e édit. (Leipzig, 1860); ou encore FIEDLER : *Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen.* (Leipzig, 1862.)

métrie projective. Il ne considère que le cas le plus simple, celui du plan. Il fait voir comment on peut, dans le plan, en se fondant sur les représentations projectives, trouver une détermination métrique qui se rapporte à une conique donnée quelconque comme à une conique *absolue*. Si cette conique dégénère en un couple imaginaire de points, on a une détermination métrique telle que celle dont nous faisons usage (dans la Géométrie euclidienne); on obtient précisément la détermination métrique ordinaire lorsqu'on fait coïncider les deux points fondamentaux imaginaires avec deux points déterminés du plan, savoir, avec les deux points circulaires.

Je vais ici présenter brièvement l'application de cette détermination métrique de Cayley à l'espace, en remplaçant le mode d'exposition de Cayley par des considérations plus géométriques.

Soit donnée, comme surface *fondamentale*, une surface du second degré, supposée quelconque. Deux points donnés de l'espace déterminent, par l'intersection de la ligne qui les joint et de la surface, deux points sur cette dernière. Les deux points donnés ont, avec ces deux autres points, un certain rapport anharmonique, et *le logarithme de ce rapport anharmonique, multiplié par une constante arbitraire c* [1], *sera dit la distance des deux points donnés*. Pareillement, étant donnés deux plans, on peut, par leur intersection, mener deux plans tangents à la surface fondamentale. Ceux-ci déterminent, avec les deux plans donnés, un certain rapport anharmonique. *Le logarithme de ce rapport anharmonique, multiplié par une constante arbitraire c', est ce que nous appellerons l'angle des deux plans.*

D'après ces définitions, les points de la surface fondamentale sont à une distance infinie de tous les autres points; la surface fondamentale est donc le lieu des points infiniment éloignés. Pareillement, les plans tangents à la surface fondamentale sont des plans qui forment avec un plan quelconque un angle infiniment grand. — La distance mutuelle de deux points est nulle, lorsque la ligne qui les joint est tangente à la surface. Deux plans comprennent entre eux un angle nul, lorsque leur intersection est tangente à la surface. — On

---

(1) Cayley définit la distance de deux points par une formule, dans laquelle on attribue à cette constante une valeur particulière $\frac{2}{\pi}\sqrt{-1}$. Il en est de même pour la constante que nous désignerons tout à l'heure par c'.

entend par sphère une surface du second degré qui touche la surface fondamentale suivant une courbe plane. Le centre de la sphère est le pôle du plan. — Au lieu des mouvements en nombre sextuplement infini, qui laissent invariable la détermination métrique ordinaire, on a maintenant un cycle d'autant de transformations linéaires. En effet, la surface fondamentale, comme toute surface du second degré en général, se reproduit elle-même après un nombre sextuplement infini de transformations linéaires. Celles-ci se partagent en deux classes sextuplement infinies, suivant que les deux systèmes de génératrices rectilignes de la surface sont ou ne sont pas échangés entre eux. C'est des transformations de cette dernière espèce qu'il s'agit ici. Les transformations de la première espèce laissent bien aussi les différences de mesure invariables, puisqu'elles n'altèrent pas plus que les autres les rapports anharmoniques dont les logarithmes sont les différences de mesure; mais elles ne correspondent pas aux mouvements de l'espace, mais aux transformations de l'espace qui changent les figures de trois dimensions en des figures égales par symétrie et placées d'une manière quelconque.

De cette détermination métrique générale résulte, en passant à la limite, une Géométrie métrique de même nature que la Géométrie *parabolique* ordinaire, lorsque la surface fondamentale du second degré se change en une section conique imaginaire. Si, en particulier, cette conique est le cercle imaginaire à l'infini, on obtient précisément la Géométrie métrique ordinaire.

Mais la détermination métrique projective générale donne aussi, pour une surface fondamentale convenablement choisie, une Géométrie métrique qui représente les conceptions de la Géométrie elliptique, et, à côté de celle-là, une autre qui représente les conceptions de la Géométrie hyperbolique; et ce sont là les images des Géométries elliptique et hyperbolique dont il a été question plus haut.

On parvient à une Géométrie métrique correspondante à la Géométrie *elliptique*, en prenant une surface fondamentale imaginaire. Alors il est clair qu'aucune ligne droite n'a de points à l'infini, de sorte que la droite est comme une courbe fermée de longueur finie. On est conduit immédiatement à des formules (trigonométriques), qui sont précisément celles que l'on doit admettre dans la Géométrie elliptique. Ce sont les formules de la trigonométrie sphérique ordi-

naire, dans lesquelles le rayon de la sphère est représenté par la constante $\frac{c}{\sqrt{-1}}$.

On obtient une Géométrie correspondante à la Géométrie *hyperbolique*, en prenant une surface fondamentale réelle et non réglée, et ayant égard aux points situés dans son intérieur. Cette restriction à l'intérieur de la surface est indiquée naturellement; car, en supposant que l'on se trouvât à l'intérieur de la surface, et que l'on ne pût changer son lieu dans l'espace qu'au moyen des transformations linéaires à trois dimensions qui représentent les mouvements de l'espace dans la détermination métrique obtenue, alors on ne pourrait jamais sortir de l'intérieur de la surface du second degré, située à l'infini (dans cette détermination métrique). Au delà de la surface fondamentale, il existerait alors une autre portion d'espace, sur l'existence de laquelle on ne sait rien, et qui ne se fait remarquer que parce que deux droites quelconques situées dans un même plan ne se couperaient pas toujours, si l'on ne supposait pas une telle portion d'espace. — Si l'on se borne maintenant aux constructions qui ne sortent pas de l'intérieur de la surface, alors, en faisant usage de la détermination métrique correspondante, ces constructions seront soumises absolument aux lois que la Géométrie hyperbolique établit en général pour les constructions dans l'espace. Toute droite, par exemple, a deux points réels à l'infini; car toute droite passant dans l'intérieur de la surface coupe cette surface en deux points réels. Par un point, on peut mener à une droite deux parallèles, savoir, les deux lignes qui joignent ce point avec les deux points d'intersection de la droite donnée et de la surface fondamentale. Un triangle dont les sommets sont à l'infini, c'est-à-dire dont les sommets sont situés sur la surface fondamentale, a une somme d'angles égale à zéro. Car deux lignes quelconques qui se coupent sur la surface fondamentale (deux parallèles quelconques) comprennent entre elles un angle nul, etc. Enfin, la constante c, par laquelle doit être multiplié le rapport anharmonique correspondant, pour donner la distance de deux points, représente la constante caractéristique mentionnée plus haut, qui se présente dans la Géométrie hyperbolique.

III. — *Indépendance entre la Géométrie projective et la théorie des parallèles. Établissement des trois sortes de Géométrie métrique.*

Dans ce qui précède, nous avons trouvé, pour les Géométries elliptique et hyperbolique, des images adéquates dans la détermination métrique générale de Cayley, en supposant la surface fondamentale tantôt imaginaire, tantôt réelle et non réglée. Nous avons eu pareillement une image de la Géométrie parabolique ordinaire, en concevant que la surface fondamentale dégénérait en une section conique imaginaire. Mais cette image s'est changée dans l'objet même qu'elle représentait, c'est-à-dire dans la Géométrie parabolique, lorsque nous avons fait coïncider la conique fondamentale avec une conique déterminée, qui est le cercle imaginaire à l'infini. Semblablement, les Géométries métriques, que nous avons établies comme images respectives des Géométries elliptique et hyperbolique, se changent dans ces Géométries mêmes, quand on fait coïncider leur surface fondamentale avec une surface du second degré déterminée (avec la surface à l'infini).

On s'en convainc en remarquant que la Géométrie projective est indépendante de la question de la théorie des parallèles ([1]). En effet, pour développer la Géométrie projective et démontrer son application à un espace donné limité quelconque, il suffit de faire dans cet espace des constructions qui ne conduisent pas hors de cet espace, et ne concernent que ce qu'on appelle *les relations de situation*. Les rapports anharmoniques (les seuls éléments fixes de la Géométrie projective), naturellement, ne doivent pas être alors définis comme des rapports de segments, puisque cela supposerait la connaissance d'une détermination métrique. Dans les *Beiträge zur Geometrie der Lage* ([2]), von Staudt a donné les matériaux nécessaires pour définir un rapport anharmonique comme un nombre réel. Des rapports anharmoniques nous pouvons ensuite nous élever aux coordonnées homogènes

---

([1]) C'est ce qu'il est facile de vérifier *a posteriori*. Car, en prenant pour base la Géométrie soit elliptique, soit hyperbolique, on peut établir la Géométrie projective absolument de la même manière qu'on le fait ordinairement dans la Géométrie parabolique.

([2]) § XXVII, n° 393.

ponctuelles et planaires, qui ne sont autre chose que les valeurs relatives de certains rapports anharmoniques, comme von Staudt l'a également démontré (¹) et comme Fiedler l'a récemment prouvé de nouveau (²). La question de savoir si, pour toutes les valeurs réelles des coordonnées, on peut trouver aussi des éléments d'espace, reste indécise. Si cela n'a pas lieu, rien n'empêche, pour répondre à ces valeurs des coordonnées, de joindre aux éléments réels de l'espace des éléments impropres. C'est ce qui se fait dans la Géométrie parabolique, quand on parle du plan à l'infini. Si l'on prenait pour base la Géométrie hyperbolique, c'est toute une portion d'espace que l'on aurait à ajouter. Au contraire, dans la Géométrie elliptique, il n'y aurait lieu à aucune adjonction d'éléments impropres.

La Géométrie projective étant ainsi développée, on pourra établir la détermination métrique générale de Cayley. Celle-ci reste sans altération, comme nous l'avons indiqué plus haut, lorsqu'on opère des transformations linéaires, en nombre sextuplement infini, que nous avons appelées *les mouvements de l'espace.*

Passons maintenant à la considération des mouvements effectifs de l'espace et de la détermination métrique fondée sur ces mouvements. On voit que les mouvements en nombre sextuplement infini sont autant de transformations linéaires. Ces mouvements laissent en outre invariable une surface, la surface des points à l'infini.

Mais comme on peut aisément le démontrer, il n'y a plus maintenant d'autres surfaces qui reviennent à leur premier état après des transformations linéaires en nombre sextuplement infini, si ce n'est les surfaces du second degré et leurs variétés. Les points à l'infini forment ainsi une surface du second degré, et les mouvements de l'espace se confondent parmi ces cycles sextuplement infinis de transformations linéaires, qui laissent invariable une surface du second degré. On voit, d'après cela, comment la détermination métrique donnée effectivement se confond dans la détermination projective générale. Tandis que celle-ci emploie une surface du second degré que l'on peut choisir à volonté, cette surface, dans la première détermination, est donnée une fois pour toutes.

L'espèce de cette surface du second degré, qui doit servir de base

(¹) *Beiträge*, § XXIX, n° 411.

(²) *Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, XV, 2, 1871.

à la détermination métrique effective, peut être maintenant définie avec plus de précision, en remarquant qu'un plan, tournant continuellement autour d'un axe situé dans ce plan à une distance finie, revient à sa position initiale. Cela veut dire que les deux plans tangents que l'on peut mener à la surface fondamentale par une droite située à distance finie sont imaginaires; car, s'ils étaient réels, il se trouverait, dans le faisceau de plans correspondants, deux plans réels à l'infini (c'est-à-dire des plans qui forment avec tous les autres un angle infiniment grand), et alors aucune rotation continuée dans un même sens ne pourrait ramener un plan du faisceau à sa position initiale.

Or, pour que ces plans soient imaginaires, ou, ce qui est la même chose, pour que le cône tangent à la surface fondamentale qui part d'un point de l'espace (accessible pour nous par des mouvements) soit imaginaire, on ne peut imaginer que trois cas :

1. *La surface fondamentale est imaginaire,* ce qui donne la Géométrie elliptique.

2. *La surface fondamentale est réelle, non réglée, et nous environne.* C'est l'hypothèse de la Géométrie hyperbolique.

3. Cas formant la transition. — *La surface fondamentale est dégénérée en une courbe imaginaire.* C'est l'hypothèse de la Géométrie parabolique ordinaire.

Nous sommes ainsi conduits précisément aux trois sortes de Géométrie, que l'on a établies, comme nous l'avons dit dans le § I, en partant de considérations toutes différentes.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Lippich (F.). — Die Ebene und Gerade als Element eines dem barycentrischen analogen Calculs. Gr. 8°. Graz, Leuschner & Lubensky. 12 Ngr.

Lötzsch (C.). — Geometrie in concentrisch erweiterten Cursen. 3. Aufl. 1. Cursus. 8°. Mitweida, Schulze. 4 Ngr.

Löwenherz (G.). — De curvis tangentalibus curvarum algebraicarum ordinis N. Gr. 8°. Berlin, Calvary & C°. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Luvini (G.). — Tavole di logaritmi a sette decimali. Secunda edizione stereotipa. In-16. VIII-368 p. Torino, tip. Arnaldi. 3 L.

Mélanges mathématiques et astronomiques tirés du Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg. T. IV, livr. 5. Lex.-8°. Leipzig, Voss. 17 Ngr.

Müller (C.-E.). — Die Kepler'schen Gesetze. Gr. 8°, Braunschweig, Vieweg & Sohn. $\frac{1}{2}$ Thlr.

Nell (A.-M.). — Fünfstellige Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Functionen. 2. Aufl. Lex.-8°, Darmstadt, Diehl. 24 Ngr.

Nesbit's practical Land Surveying. Edited by W. Berners. 12th edit. 8°. London, Longmans. 12 sh.

Neumayer (G.). — Ein Project für die Vorarbeiten betreffs des Venusdurchganges von 1874. Lex 8°. Wien, Gerold. $\frac{1}{4}$ Thlr.

Niemtschik (R.). — Einfache Construction windschiefer Hyperboloide und Paraboloide, mit ihren ebenen Schnitten und Selbstschatten. Gr. 8°, Wien, Gerold. $\frac{1}{4}$ Thlr.

Oppolzer (Th.). — Definitive Bahnbestimmung des Planeten (59) « Elpis ». Gr. 8°. Wien, Gerold. 12 Ngr.

Oppolzer (Th.). — Ueber den Venusdurchgang des Jahres 1874. Gr. 8°. Wien, Gerold. 14 Ngr.

Oerter (*Scheinbare*) von 529 Sternen der Verzeichnisse No. I und II, u. s. w. Gr. 8°. Berlin, Dümmler. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Ricciardi (P.). — Biblioteca matematica italiana dall'origine della stampa ai primi anni del secolo XIX. Fascicolo I. In-4°, p. 1-95, Modena, tipi Erede Soliani. 1 L. 80 c.

Schlömilch (O.). — Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. 2. Thl. Aufgaben aus der Integralrechnung. Gr. 8°. Leipzig, Teubner. 2 Thlr.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

MATHEMATISCHE ANNALEN, herausgegeben von A. CLEBSCH und C. NEUMANN.

T. III, 1870-71 ([1]).

KÖNIGSBERGER. — *La transformation linéaire des fonctions* φ *de M. Hermite.* (10 p.; all.)

Dans son *Mémoire sur la résolution de l'équation du 5e degré* ([2]), M. Hermite a, le premier, fait ressortir l'extrême importance, dans la théorie des nombres et dans les recherches algébriques, des valeurs trouvées par Jacobi pour la racine quatrième du module d'une intégrale elliptique.

Soient K et K' les fonctions complètes de l'intégrale elliptique

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \text{et} \quad q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}.$$

Jacobi a donné les expressions suivantes pour la racine quatrième du module et de son complément

$$\sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots},$$

$$\sqrt[4]{k'} = \frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}.$$

En posant $q = e^{i\pi\omega}$, M. Hermite a désigné $\sqrt[4]{k}$ par $\varphi(\omega)$ et $\sqrt[4]{k'}$ par $\psi(\omega)$. Alors $\sqrt[8]{q}$ est remplacée par $e^{\frac{i\pi\omega}{8}}$ et les fonctions sont affranchies de l'ambiguïté qui tient à la présence de $\sqrt[8]{q}$ dans la première. Les propriétés fondamentales de ces fonctions découlent des relations évidentes

$$\varphi^8(\omega) + \psi^8(\omega) = 1, \quad \varphi\left(-\frac{1}{\omega}\right) = \psi(\omega), \quad \psi(\omega+1) = \frac{1}{\psi(\omega)}.$$

Cela posé, M. Hermite a indiqué les valeurs que prennent les

([1]) Voir *Bulletin*, t. II, p. 173.

([2]) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXI.

fonctions φ et ψ quand on effectue sur la fonction elliptique l'une quelconque des 6 transformations fondamentales du 1er ordre. Ces formules, qu'on peut lire à la page 4 du Mémoire de l'illustre analyste, avaient été données sans démonstration. M. Königsberger, qui, dans son Livre ([1]), avait déjà démontré celles qui lui étaient nécessaires, complète ici ses recherches et donne la démonstration de toutes les formules.

Wiener (Chr.). — *De la correspondance multiple entre deux figures planes.* (23 p.; all.)

On a examiné jusqu'ici surtout les modes de transformation dans lesquels à un point de l'une des figures correspond un point de l'autre, et réciproquement. M. Cremona, dans un travail déjà ancien et que nous analyserons, a donné un procédé général par lequel on peut trouver tous les modes de transformation jouissant de la propriété que nous venons d'indiquer. Le plus connu est, comme on sait, la transformation de Magnus, dans laquelle à une droite correspond une conique. M. Wiener examine les cas, beaucoup moins étudiés, dans lesquels à 1 point de chaque figure peuvent correspondre plusieurs points de l'autre. On a ainsi des modes de transformation qui se prêtent naturellement à la démonstration et à l'extension des théorèmes de Géométrie. C'est par de telles applications que se termine le travail de M. Wiener.

Weyr (Em.). — *De la génération des courbes par les involutions projectives.* (11 p.; all.)

La notion des involutions de degré supérieur est, depuis longtemps déjà, acquise à la science. Si l'on désigne par x l'abscisse d'un point sur une droite, l'équation

$$f(x) - \lambda\varphi(x) = 0$$

donnera, quand on fera varier λ, des groupes de points formant une involution de degré supérieur. L'*ordre* de cette involution est le nombre de points correspondant à chaque valeur de λ.

On peut aussi considérer, au lieu des points sur une droite, des droites passant par un point fixe.

---

(1) *Die Transformation, die Multiplication und die Modulargleichungen der elliptischen Functionen.* Leipzig, Teubner, 1868.

Soient

$$f - \lambda\varphi = 0, \quad f' - \mu\varphi' = 0$$

les équations de deux involutions; si l'on établit entre λ et μ la relation homographique

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0,$$

à chaque valeur de λ correspond une valeur de μ; on a donc un faisceau de rayons (déterminé par λ) pour chaque faisceau de droites (déterminé par μ). Si les deux faisceaux n'ont pas la même origine, les droites homologues se coupent en une série de points formant une courbe dont l'ordre et les propriétés dépendent de celles des deux involutions.

CLEBSCH (A.). — *Sur la relation entre la bissection des fonctions abéliennes et certaines représentations d'une classe de surfaces algébriques.* (31 p.; all.)

Les surfaces qui ont été jusqu'ici représentées sur le plan se divisent en 2 classes bien distinctes. Les unes, pour lesquelles la représentation s'effectue sans difficulté préalable, ne peuvent être représentées que d'une seule manière sur le plan. A cette classe appartiennent, par exemple, les surfaces d'ordre n ayant un point multiple d'ordre $n-1$, les surfaces gauches du 3ᵉ ordre, celles du 4ᵉ ayant une courbe double du 3ᵉ ordre, les surfaces du 5ᵉ ordre ayant une courbe double du 3ᵉ ou composée de 2 droites ne se rencontrant pas.

D'autres surfaces, au contraire, sont susceptibles de représentations qui s'offrent ensemble; on ne peut effectuer de telles représentations qu'après avoir résolu une équation de degré supérieur, dont les racines déterminent des éléments géométriques remarquables de la surface. Par exemple, dans le cas des surfaces du 3ᵉ ordre, on a à résoudre l'équation aux 27 droites. On a vu de même [1] que, pour représenter la surface du 4ᵉ ordre ayant une droite double, il est indispensable de connaître certaines coniques, en nombre limité, se trouvant sur la surface, etc.

Le but du travail important de M. Clebsch est de démontrer que les surfaces de cette dernière classe possèdent une propriété com-

[1] Voir *Bulletin*, t. II, p. 231.

mune. Elles sont toutes susceptibles d'être représentées sur un plan double, et la détermination de ces éléments géométriques singuliers qui doit être faite pour effectuer la représentation (droites, coniques, etc.), est ainsi ramenée à la division des fonctions abéliennes. On aperçoit toute l'importance de ces résultats.

STURM (R.). — *Sur la surface romaine de Steiner.* (48 p.; all.)

On sait qu'il y a quelques années parurent une série de travaux sur cette surface remarquable, la plus simple après les surfaces du 2e degré. M. Kummer présenta, en juillet 1868, à l'Académie de Berlin, un travail sur les surfaces du 4e ordre qui peuvent être engendrées par des coniques. Parmi ces surfaces s'en trouvait une ayant 3 droites doubles concourant en un point triple, et qui, par suite, avait la propriété d'être coupée suivant 2 coniques par chacun de ses plans tangents. Steiner avait étudié cette surface vingt-cinq années auparavant, et avait communiqué à M. Weierstrass les résultats de ses recherches, demeurées inédites. MM. Schröter (1), Cremona (2), Cayley (3) ont publié, après MM. Kummer et Weierstrass, une première série de travaux importants sur la surface de Steiner. Depuis, MM. Clebsch (4), Cremona (5) ont publié sur cette question de nouvelles recherches analytiques et géométriques. Citons encore, pour être complet, MM. Reye (6), Moutard, Cremona (7) qui ont donné de nouvelles propriétés de la surface et l'ont rencontrée dans d'intéressantes recherches géométriques.

M. Sturm publie, à son tour, une étude intéressante et détaillée de la surface *romaine*, où il la considère plus spécialement comme étant de la 3e classe. Son Mémoire contient, en particulier, l'étude des courbes du 4e ordre qui se trouvent sur la surface. L'auteur emploie les méthodes de la Géométrie pure.

---

(1) *Journal de Borchardt*, t. 64, p. 66.

(2) *Id.*, t. 63, p. 315.

(3) *Id.*, t. 64, p. 172.

(4) *Id.*, t. 67, p. 1.

(5) *Rappresentazione della superficie di Steiner, ecc., sopra un piano.* Rendiconti del R. Istituto Lombardo, 1867.

(6) *Geometrie der Lage*, 2e partie, p. 247.

(7) *Mémoire de Géométrie pure sur les surfaces du 3e ordre.* (*Journal de Borchardt*, t. 68, p. 1 et 49.)

LÜROTH (J.). — *Résolution de quelques problèmes sur les coniques dans l'espace.* (10 p.; all.)

L'auteur se propose le problème principal suivant :

Déterminer le nombre des coniques qui coupent en 3 points une courbe gauche de 4e ordre et de 1re espèce, et en un point 5 cordes de cette courbe, sans passer par les points communs à chaque corde et à la courbe.

Il y a 2 coniques satisfaisant à ces conditions. Dans la recherche difficile de cette question l'auteur rencontre quelques propositions intéressantes, telles que les suivantes :

Les plans des coniques rencontrant 3 cordes données de la courbe, et la coupant en 3 points enveloppent une surface de la 6e classe.

Les plans des coniques rencontrant 4 cordes en un point et la courbe en 3 points enveloppent une développable de la 4e classe.

SCHLAEFLI (L.). — *Remarques sur les recherches de M. Neumann relatives aux fonctions de Bessel.* (10 p.; all.)

L'auteur part de la formule suivante

$$F(a, x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(a+n+1)}$$

qui définit une fonction satisfaisant à l'équation différentielle

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (a+1)\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

ZEUTHEN (H.-G.). — *Nouvelles démonstrations de théorèmes sur des séries de points correspondants sur 2 courbes.* (7 p.; fr.)

Dans cette Note, M. Zeuthen se propose d'établir par la Géométrie plusieurs théorèmes relatifs aux courbes qui se correspondent point par point. Seulement il généralise la question en supposant qu'à un point de l'une correspondent plusieurs points de l'autre. Soient (C_1), (C_2) les 2 courbes. Si à un point de l'une correspond un seul point de l'autre, les *genres* des 2 courbes sont les mêmes. C'est le théorème de Riemann. L'auteur donne des théorèmes très-intéressants relatifs à des cas plus difficiles et ces propositions peuvent être considérées comme une extension des théorèmes de Riemann.

MEYER (G.-F.). — *Note sur deux intégrales définies qui se présentent dans la théorie de la chaleur.* (3 p.; all.)

Ces intégrales sont celles qu'on détermine par les formules

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \frac{\cos}{\sin} \frac{\alpha^2}{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-\alpha\sqrt{2}} \frac{\cos}{\sin}\, \alpha\sqrt{2}.$$

Noether (M.). — *Sur les surfaces qui possèdent des séries de courbes rationnelles.* (67 p.; all.)

Weyr (Em.). — *Construction des rayons de courbure et des directions principales en un point d'une surface quelconque.* (7 p.; all.)

Weyr (Em.). — *Sur les courbes à point double du 3e ordre.* (3 p.; all.)

Le but de l'auteur est de démontrer d'une manière simple, pour ces courbes, les théorèmes sur les polygones inscrits donnés par Steiner (*Journal de Crelle,* t. 32, p. 182) pour les courbes générales du 3e degré.

Clebsch (A.). — *Sur le mouvement d'un corps dans un fluide.* (25 p.; all.)

La première idée de déterminer le mouvement d'un corps dans un fluide en mouvement est due à Dirichlet. Il donna la solution relative à une sphère en 1852 (dans les *Monatsberichte* et les *Mémoires* de l'Académie de Berlin). A la suite de ce travail, M. Clebsch traita le problème général dans le t. 52 du *Journal de Crelle.* La question a été examinée par MM. Hoppe (*Ann. de Pogg.*, t. LXIII), Thomson et Tait.

Récemment, dans le t. 71 du *Journal de Borchardt,* M. Kirchhoff a donné aux équations différentielles une forme très-élégante qui est le point de départ des recherches de M. Clebsch.

Les équations principales de M. Kirchhoff sont les suivantes :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u} &= q\frac{\partial T}{\partial w} - r\frac{\partial T}{\partial v},\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} &= r\frac{\partial T}{\partial u} - p\frac{\partial T}{\partial w},\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w} &= p\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial u},\end{aligned}\right.$$

$$
2)\quad \begin{cases}
\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial p} = v\dfrac{\partial T}{\partial w} - w\dfrac{\partial T}{\partial v} + q\dfrac{\partial T}{\partial r} - r\dfrac{\partial T}{\partial q},\\
\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial q} = w\dfrac{\partial T}{\partial u} - u\dfrac{\partial T}{\partial w} + r\dfrac{\partial T}{\partial p} - p\dfrac{\partial T}{\partial r},\\
\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial r} = u\dfrac{\partial T}{\partial v} - v\dfrac{\partial T}{\partial u} + p\dfrac{\partial T}{\partial q} - q\dfrac{\partial T}{\partial p}.
\end{cases}
$$

Dans ces équations, T représente la force vive totale et une fonction du 2e degré de u, v, w, p, q, r avec des coefficients constants. Après ces équations, on a à en intégrer d'autres, qui se présentent dans tous les problèmes relatifs aux corps solides, et que M. Clebsch examine tout d'abord, pour montrer que leur intégration ne présente pas de difficulté essentielle.

M. Clebsch commence par transformer les équations précédentes, en prenant comme inconnues les 6 dérivées de la fonction T. La fonction T qui exprime la force vive en fonction des nouvelles variables est encore du 2e degré, et les équations prennent la forme remarquable

$$
\frac{dx_1}{dt} = x_2\frac{\partial T}{\partial y_3} - x_3\frac{\partial T}{\partial y_2},
$$

$$
\frac{dy_1}{dt} = x_2\frac{\partial T}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial T}{\partial x_2} + y_2\frac{\partial T}{\partial y_3} - y_3\frac{\partial T}{\partial y_2}.
$$

On obtient quatre autres équations en effectuant une permutation des indices.

Cela posé, on a les trois intégrales données par M. Kirchhoff,

$$
2T = L,
$$

$$
x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = M,
$$

$$
x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = N.
$$

Comme le temps ne figure pas dans les équations différentielles, on obtiendra par une quadrature la quatrième intégrale. D'ailleurs, on reconnaît facilement que le multiplicateur des équations différentielles est égal à l'unité. On voit donc que si l'on connaît une quatrième intégrale le problème pourra être considéré comme complétement résolu.

Les cas examinés par M. Kirchhoff correspondent à ceux où cette quatrième intégrale est linéaire par rapport aux quantités x_i, y_i. M. Clebsch examine une question plus générale et détermine les cas

dans lesquels cette intégrale est du 2e degré par rapport aux mêmes quantités. Ces cas sont au nombre de trois.

Dans le premier, la fonction T doit avoir la forme

$$T = T_1 + \tfrac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2),$$

où T_1 est une fonction arbitraire de x_i.

Dans le second, l'intégrale est un carré parfait ; c'est à cette hypothèse que se rapportent les intégrations effectuées par M. Kirchhoff.

Enfin, dans le troisième cas, la fonction 2T peut être ramenée à la forme

$$2T = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_3^2,$$

où l'on a, entre les constantes, l'unique équation

$$\frac{a_2 - a_3}{b_1} + \frac{a_3 - a_1}{b_2} + \frac{a_1 - a_2}{b_3} = 0.$$

Clebsch (A.). — *Sur la signification d'un invariant simultané d'une forme binaire quadratique et d'une forme binaire biquadratique.* (2 p. ; all.)

Clebsch (A.). — *Sur la théorie des formes binaires algébriques.* 3 p. ; all.)

L'auteur fait remarquer, que si l'on considère l'ensemble des formes binaires adjointes à une forme donnée, on peut se proposer de les ramener au plus petit nombre possible, en partant de deux points de vue essentiellement distincts.

On peut d'abord chercher le système le moins étendu de formes dont tous les invariants et covariants peuvent être considérés comme des fonctions entières avec des fonctions numériques. C'est là le but des travaux de M. Gordan, indiqués antérieurement dans ce *Bulletin*. La seule difficulté qui se présente ici consiste dans la détermination des formes qui sont suffisantes pour exprimer toutes les autres.

La seconde manière d'effectuer la réduction des formes à un nombre limité d'entre elles a déjà été développée par M. Hermite. Il s'agit alors d'exprimer *rationnellement* les invariants et les covariants par un nombre limité d'entre eux, de manière que dans le dénominateur il ne figure que des puissances d'un seul et même covariant ou invariant. La théorie des formes associées de M. Hermite conduit à l'examen de cette question. On obtient un système simple de

formes associées (c'est-à-dire de formes telles que toutes les autres s'expriment rationnellement par celles-là) de la manière suivante.

Soit $f = f(x_1, x_2)$ la forme donnée; soit d'ailleurs

$$\xi = \frac{1}{n}\left(y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right),$$
$$\eta = x_1 y_2 - y_1 x_2;$$

on pourra exprimer les y linéairement en fonction des ξ, η et l'on aura

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} f^{n-1} f(y_1, y_2) = \xi^n + \frac{n(n-1)}{1.2} \varphi_2 \xi^{n-2} \eta^2 \\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \varphi_3 \xi^{n-3} \eta^3 + \ldots. \end{aligned} \right.$$

Si l'on forme maintenant, au moyen de cette équation, les invariants et les covariants de $f(y_1, y_2)$, et que l'on fasse dans ces expressions $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, ($\eta = 0$, $\zeta = f$), on obtient toutes les formes adjointes à f comme fonctions rationnelles de n formes $f, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$, et dans le dénominateur figure simplement une puissance de f.

Cela posé, on reconnaît qu'il ne peut exister entre les covariants f, φ_2, φ_3 aucune relation avec des coefficients purement numériques. Mais on peut se demander s'il n'est pas possible d'exprimer ces covariants par une série de covariants plus simples, de telle manière qu'il n'apparaisse de nouveau dans les dénominateurs que des puissances de f. Et cela est, en effet, possible : on peut démontrer le théorème suivant, qui est l'objet du travail de M. Clebsch.

Soient

$$\psi_1 = (ab)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2},$$
$$\psi_2 = (ab)^4 a_x^{n-4} b_x^{n-4}$$

les représentations symboliques des covariants de f qui sont du 2e degré par rapport aux coefficients de f; on peut exprimer les formes $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$ (et, par suite, tous les invariants et covariants) rationnellement en fonction de f, des ψ et des déterminants fonctionnels des ψ et de f, et il n'apparaît dans les dénominateurs des expressions rationnelles que les puissances de f.

CAYLEY (A.). — *Note sur la théorie des invariants.* (4 p.; angl.)

GUNDELFINGER (S.). — *Remarques sur la résolution des équations du 3e degré.* (4 p.; all.)

Götting (R.). — *Sur les dérivées successives de l'expression x^k, où x désigne une fonction quelconque d'une variable indépendante.* (10 p.; all.)

L'auteur démontre des formules intéressantes relatives aux dérivées d'une puissance. Une de ces formules est la suivante :

$$\frac{d^n(y^k)}{y^k} = \sum \frac{P_k}{P_\lambda P_{\lambda_1} P_{\lambda_2} \ldots} \left(\frac{d_0 y}{y}\right)^\lambda \left(\frac{d_1 y}{y}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{d_2 y}{y}\right)^{\lambda_2} \ldots,$$

où l'on a

$$P_\alpha = 1.2.3\ldots\alpha,$$

$$\lambda + \lambda_1 + \ldots = k,$$

$$1\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \ldots = n.$$

Schlaefli. — *Sur la série hypergéométrique de Gauss.* (10 p.; all.)

Dans un important Mémoire sur cette théorie, Riemann indique qu'il y a deux méthodes pour arriver aux propriétés de la fonction définie par cette série. On peut employer soit l'équation différentielle, à laquelle satisfait la fonction, soit sa représentation par des intégrales définies. Riemann laisse de côté ces deux méthodes pour définir la fonction par ses singularités, et, à la fin seulement de son Mémoire, il montre qu'il y a une fonction jouissant des propriétés posées *a priori*, et que cette fonction est précisément celle qui est définie par la série hypergéométrique. M. Schläfli étudie cette fonction en la considérant comme une intégrale définie.

Schröder (E.). — *Sur les opérations répétées.* (27 p.; all.)

Il s'agit de la répétition des opérations analytiques effectuées sur une variable indépendante. On considère les fonctions

$$F(z),\quad FF(z) = F^2(z), \ldots,\quad F^r(z) = F[F^{r-1}(z)].$$

Le premier cas examiné se rapporte à la fonction

$$F(z) = \frac{\alpha_0 z + \alpha_1}{\beta_0 z + \beta_1},$$

qui a été traitée à ce point de vue par MM. Hoppe et J.-A. Serret.

L'auteur donne ensuite deux théorèmes généraux, dont il fait des applications à des fonctions rationnelles, elliptiques, circulaires, etc.

Zeuthen (H.-G.). — *Addition au Mémoire sur les séries de points correspondants sur 2 courbes.* (2 p.; fr.)

NEUMANN (C.). — *Révision de quelques théorèmes généraux sur la théorie du potentiel logarithmique.* (25 p.; all.)

L'auteur fait remarquer que, par suite des découvertes récentes, il est nécessaire, pour un grand nombre de recherches, de reprendre la théorie du potentiel, soit pour établir les différents théorèmes avec toute la rigueur nécessaire, soit pour les étendre à certains points de vue. Il commence par la théorie du potentiel logarithmique.

NEUMANN (C.). — *Recherches sur le mouvement d'un corps solide.* (5 p.; all.)

Dans cet article, l'auteur communique les résultats qu'il a obtenus sur des problèmes de Mécanique, tel que le suivant :

On donne un pendule ordinaire qui oscille sous l'influence de la pesanteur autour de son axe fixe et horizontal. Ce pendule est formé d'un corps à l'intérieur duquel se trouve un espace vide; dans ce vide on a placé un corps homogène de révolution, dont l'axe de révolution est attaché au corps; à l'origine du mouvement, ce noyau extérieur a reçu un choc, et il tourne autour de son axe. Quelle est l'influence que ce noyau tournant à l'intérieur du corps exerce sur les oscillations du pendule?

GORDAN (S.). — *Sur la formation de la résultante de deux équations.* (60 p.; all.)

Ce travail contient de nombreux résultats sur la théorie des invariants et covariants et sur les expressions remarquables de la résultante de deux formes binaires soit du même degré, soit de degré différent. Le Mémoire contient, par exemple, le tableau développé des opérations à faire pour trouver la résultante de deux formes du 5ᵉ degré, de deux formes l'une du 5ᵉ et l'autre du 4ᵉ, etc.

Le problème de l'élimination d'une inconnue entre deux équations a été, comme on sait, étudié par plusieurs géomètres. M. Cayley a donné (*Philosophical Transactions*, t. CXLVII, p. 703, et t. CLVIII, p. 173) des tableaux très-complets contenant les résultantes des équations de degré inférieur. M. Clebsch, dans un Mémoire du *Journal de Borchardt*, t. 58, p. 273, a donné, sous la forme d'un produit symbolique, la résultante d'une équation de degré n et d'une équation du 2ᵉ degré. Dans le Mémoire actuel, M. Gordan indique une série d'opérations très-simples par lesquelles peuvent se former les résultantes; enfin, il donne les covariants simultanés qui s'éva-

nouissent dès que les équations ont plus d'une racine commune. L'auteur emploie les méthodes du calcul symbolique sous la forme que leur a donnée M. Aronhold.

Korndörfer (G.). — *Sur les courbes gauches pour lesquelles les coordonnées d'un point sont des fonctions rationnelles d'un paramètre.* (9 p.; all.)

L'auteur étend aux courbes gauches plusieurs des résultats donnés par M. Clebsch, dans son Mémoire sur les courbes planes rationnelles.

Neumann (C.). — *Révision de quelques théorèmes généraux relatifs à la théorie du potentiel newtonien.* (11 p.; all.)

Mayer (A.). — *Sur la méthode d'intégration de Jacobi pour les équations différentielles partielles du 1er ordre.* (18 p.; all.)

Le but de ce travail remarquable est de perfectionner en plusieurs points essentiels la première méthode d'intégration des équations aux dérivées partielles du 1er ordre que Jacobi a donnée dans le *Journal de Crelle*, t. 17, et qu'il avait déduite des découvertes de Hamilton. On sait que le théorème de Jacobi peut s'énoncer de la manière suivante :

Étant donnée l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} + H\left(x, x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = 0,$$

pour en trouver une intégrale complète, on y remplace les dérivées $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ par p_i et l'on intègre complétement le système suivant d'équations différentielles ordinaires

$$(2) \qquad \frac{dx_k}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial x_k}.$$

On introduit à la place des constantes amenées par l'intégration les suivantes

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \quad b_1, b_2, \ldots, b_n,$$

qui sont les valeurs des quantités

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \quad p_1, p_2, \ldots, p_n,$$

pour une valeur initiale a de x, et l'on calcule l'intégrale

$$(3)\qquad V=\int_a^x dx\left(\sum_{k=1}^{k=n} p_k\frac{\partial H}{\partial p_k}-H\right),$$

qu'on exprime en fonction des seules quantités x, $x_1,\ldots, x_n$, $a_1,\ldots, a_n$. On a alors les $2n$ équations

$$(4)\qquad \frac{\partial V}{\partial x_k}=p_k,\quad \frac{\partial V}{\partial a_k}=-b_k,$$

qui sont les intégrales complètes des équations (2), et la fonction V, augmentée d'une constante, donne une intégrale complète de l'équation (1).

M. Mayer fait remarquer que ce théorème est sujet à des exceptions nombreuses. Toutes les fois que H, par exemple, sera homogène et du 1er degré par rapport aux dérivées $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ (ce qui arrivera toutes les fois qu'on aura éliminé la fonction antérieurement par la méthode de M. Bertrand), on aura $V=0$, et le théorème ne pourra rien donner.

L'auteur reprend donc la question, qu'il traite d'une manière rigoureuse, et il substitue à la fonction V de Jacobi la suivante

$$V=\sum_{k=1}^{k=n} a_k b_k+\int_a^x dx\left(\sum_{k=1}^{k=n} p_k\frac{\partial H}{\partial p_k}-H\right).$$

Alors, en exprimant cette fonction V en x, $x_1,\ldots, x_n$, $b_1,\ldots, b_n$, et en la désignant alors par (V), la formule

$$V=(V)+\text{const.}$$

donnera une solution complète de l'équation aux dérivées partielles (1), et les intégrales des équations (2) seront

$$\frac{\partial(V)}{\partial x_k}=p_k,\quad \frac{\partial(V)}{\partial b_k}=a_k.$$

M. Mayer étend ces théorèmes au cas où la fonction figure dans l'équation; il examine ensuite comment on peut simplifier la méthode de Cauchy en l'employant au calcul d'une intégrale complète

et non de l'intégrale générale, et enfin comment, étant donnée une intégrale complète, on peut avec elle résoudre le problème de Cauchy, c'est-à-dire trouver une intégrale se réduisant, pour une valeur donnée de l'une des variables indépendantes, à une fonction connue *a priori* des autres.

Spitzer (S.). — *Intégration par des intégrales définies de l'équation différentielle linéaire*

$$y^{(n)} = Ax^2y'' + Bxy' + Cy,$$

dans laquelle n désigne un nombre entier positif et A, B, C *des nombres constants.* (3 p.; all.)

Brill (A.). — *Sur les points doubles des courbes rationnelles.* (3 p.; all.)

Brill (A.). — *Sur celles des courbes d'un réseau qui ont un contact de 2e ordre avec une courbe donnée.* (9 p.; all.)

Cayley (A.). — *Sur la transformation des surfaces unicursales.* (6 p.; angl.)

L'éminent géomètre examine dans cette Note une question très-importante : il donne des formules servant à déterminer l'ordre et les singularités de la ligne double d'une surface unicursale (c'est-à-dire qui peut être représentée sur le plan). Ces formules se vérifient pour celles de ces surfaces qui ont été examinées jusqu'ici.

Lommel (E.). — *Sur la théorie des fonctions de Bessel.* (13 p.; all.)

Stahl (H.). — *Sur la théorie des lignes de courbure et des systèmes triples orthogonaux.* (8 p.; all.)

L'auteur indique un système de variables dont le choix permet d'intégrer facilement, et d'une manière uniforme, des lignes de courbure dans les cas déjà examinés par les géomètres.

Kondörfer (G.). — *De la représentation d'une surface du 4e ordre à coniques doubles, dans le cas où celles-ci se décomposent en 2 droites.* (27 p.; all.)

Les résultats obtenus par l'auteur montrent que les propriétés de la surface ne diffèrent pas essentiellement de celles qu'on obtient dans le cas général.

MEISSEL. — *Calcul de la totalité des nombres premiers qui sont inférieurs à un million.* (3 p.; all.)

CAYLEY (A.). — *Sur le déficient (ou genre) de certaines surfaces.* (4 p.; angl.)

Cette courte Note se rapporte à la question difficile du genre d'une surface. L'auteur donne quelques formules qui tiennent compte d'un très-grand nombre de singularités de la surface.

GEISER (C.-F.). — *Note sur les surfaces minima algébriques.* (5 p.; all.)

L'auteur obtient les théorèmes suivants : L'intersection d'une surface minimum algébrique avec le plan de l'infini ne peut se composer que de droites et du cercle de l'infini. En un point singulier, le cône des tangentes se réduit toujours à des plans et au cône contenant le cercle de l'infini.

Le cône ou les plans peuvent subsister séparément ou être multiples.

ROSANES (J.). — *Sur les équations différentielles algébriques.* (12 p.; all.)

Étant donnée une équation

$$A\,dx + B\,dy = 0,$$

où A et B sont des fonctions de x et de y, algébriques et entières, l'auteur examine dans quel cas une telle équation a une intégrale algébrique.

Un premier théorème, généralisé dans la suite par l'auteur, montre que cette intégrale doit être de la forme $C = R$, où R est une fonction rationnelle de x et de y. Il faudra donc qu'il y ait une fraction rationnelle $\frac{Z}{N}$, telle que l'expression

$$\frac{Z}{N}(A\,dx + B\,dy) = 0$$

soit une différentielle exacte. L'auteur développe des propriétés des polynômes Z, N, en supposant que N ne contienne aucun facteur multiple et de degré plus élevé que ZA, ZB. Le Mémoire ne contient d'ailleurs aucune application.

NOETHER (M.). — *Sur les transformations rationnelles de l'espace et*



2° Si l'on a le développement suivant de z^{2p}, au moy
tions de Bessel

$$z^{2p} = \alpha_0 J^0(z) + \alpha_2 J^2(z) + \alpha_4 J^4(z) + \ldots,$$

on aura aussi

$$z^{2p} = \frac{\Pi_p \Pi_p}{\Pi_{2p}} \{ \alpha_0 [J_0(z)]^2 + \alpha_2 [J^1(z)]^2 + \alpha_4 [J^2(z)]^2 +$$

les nombres n, p étant entiers positifs.

3° Si une fonction est synectique à l'intérieur d'un
pourra être développée en une série de la forme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n [J^n(z)]^2.$$

Neumann (C.). — *Sur les intégrales elliptiques et hyp*
(20 p.; all.)

Gordan (P.). — *Sur les courbes du 3e ordre avec 2 po*
(2 p.; all.)

MÉLANGES.

ÉTUDE D'UN COMPLEXE DU SECOND ORDRE;

Si (D) est une des droites par laquelle on peut mener deux plans ngents rectangulaires, un troisième plan tangent perpendiculaire cette droite, la rencontrera en un point situé sur la sphère (S), eu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits à l'ellipsoïde onné; de sorte que, si S est le point de rencontre et que D soit le ied de la perpendiculaire abaissée du centre O de l'ellipsoïde donné ar la droite (D), on aura $\overline{OS}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{DS}^2$. Mais la distance $\overline{DS}$ est visiblement égale à la distance du centre O au plan tangent perpendiculaire à la droite; par conséquent, si α, β, γ sont les angles de la droite (D) avec les axes Ox, Oy, Oz de l'ellipsoïde, et si

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

est l'équation de cet ellipsoïde, on a

$$\overline{OS}^2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad \overline{DS}^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma;$$

par suite, en désignant par δ la distance du centre à la droite (D), on a la relation caractéristique

$$(1^\circ) \qquad \delta^2 = a^2 + b^2 + c^2 - (a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma).$$

Il résulte de là que δ^2 doit être inférieure à $(a^2 + b^2 + c^2)$; donc :

Théorème I. — *Les droites réelles, satisfaisant à la question, doivent toutes pénétrer dans l'intérieur de la sphère* (S), *lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits à l'ellipsoïde donné.*

2. Si maintenant nous représentons la droite (D) par des équations de la forme

$$(2^\circ) \qquad \begin{cases} x = mz + p, \\ y = nz + q, \\ nx - my = r, \end{cases}$$

où

$$r = np - mq,$$

on a

$$\frac{\cos\alpha}{m} = \frac{\cos\beta}{n} = \frac{\cos\gamma}{1} = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}}, \quad \delta^2 = \frac{p^2 + q^2 + r^2}{m^2 + n^2 + 1}.$$

En substituant ces valeurs dans l'égalité (1°), mise d'abord sous la

forme

$$\delta^2 = (b^2 + c^2)\cos^2\alpha + (c^2 + a^2)\cos^2\beta + (a^2 + b^2)\cos^2\gamma,$$

il vient

$$(3^o)\qquad p^2 + q^2 + r^2 = (b^2 + c^2)m^2 + (c^2 + a^2)n^2 + (a^2 + b^2).$$

L'assemblage des droites (D) constitue un *complexe* défini par l'équation (3°); ce complexe est du second ordre; je me propose d'en indiquer ici les propriétés.

La théorie des complexes généraux du second ordre, abordée pour la première fois par Plücker (*Neue Geometrie*), a été complétée par MM. Klein et Lie (*Mathematische Annalen*); voir le *Bulletin des sciences mathématiques*, t. II, p. 72.

L'étude actuelle a pour objet un complexe particulier du second ordre; mais il importe de remarquer que ce complexe, qui a son point de départ dans une définition géométrique bien précise, présente les rapports les plus intimes soit avec les surfaces homofocales, soit avec la surface des ondes, et apporte aux propriétés déjà si nombreuses de ces surfaces un contingent assez considérable de propriétés nouvelles. Dans cette recherche, j'ai principalement en vue la situation des droites *réelles* du complexe; c'est là ce qui spécialise et caractérise cette nouvelle étude. J'ai abordé cette question de plusieurs manières; la méthode purement analytique se trouve développée dans un Mémoire qui sera inséré dans un autre recueil.

3. Si x_0, y_0, z_0 et x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées de deux points de la droite (D), on a

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &p = \frac{x_0 z_1 - z_0 x_1}{z_1 - z_0},\quad q = \frac{y_0 z_1 - z_0 x_1}{z_1 - z_0},\quad r = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{z_1 - z_0};\\ &m = \frac{x_1 - x_0}{z_1 - z_0},\quad n = \frac{y_1 - y_0}{z_1 - z_0};\end{aligned}\right.$$

si u_0, v_0, w_0 et u_1, v_1, w_1 sont les coordonnées de deux plans passant par la même droite (D), on a

$$(1\,bis)\quad \left\{\begin{aligned} &p = \frac{v_0 - v_1}{v_0 u_1 - v_1 u_0},\quad q = \frac{u_1 - u_0}{v_0 u_1 - v_1 u_0},\quad r = \frac{w_0 - w_1}{v_0 u_1 - v_1 u_0};\\ &m = \frac{v_0 w_1 - w_0 v_1}{v_0 u_1 - v_1 u_0},\quad n = \frac{u_1 w_0 - u_0 w_1}{v_0 u_1 - v_1 u_0}.\end{aligned}\right.$$

Eu égard à ces valeurs, l'équation (3°) prend l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l}(y_0z_1-z_0y_1)^2+(z_0x_1-z_1x_0)^2+(x_0y_1-x_1y_0)^2\\ \quad =(b^2+c^2)(x_1-x_0)^2+(c^2+a^2)(y_1-y_0)^2+(a^2+b^2)(z_1-z_0)^2;\end{array}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l}(b^2+c^2)(v_0w_1-v_1w_0)^2+(c^2+a^2)(w_0u_1-w_1u_0)^2\\ \quad +(a^2+b^2)(u_0v_1-u_1v_0)^2=(u_1-u_0)^2+(v_1-v_0)^2+(w_1-w_0)^2.\end{array}\right.$$

4. Lorsque, dans l'équation (2), on regarde x_1, y_1, z_1 comme des coordonnées variables et qu'on supprime les indices, on a l'équation suivante :

$$(4)\,(\mathrm{C})\quad \left\{\begin{array}{l}(z_0y-y_0z)^2+(x_0z-z_0x)^2+(y_0x-x_0y)^2\\ \quad =(b^2+c^2)(x-x_0)^2+(c^2+a^2)(y-y_0)^2+(a^2+b^2)(z-z_0)^2,\end{array}\right.$$

laquelle représente un cône du second ordre, lieu des droites du complexe passant par le point fixe P (x_0, y_0, z_0) ; nous dirons que c'est un cône du complexe, et nous le désignerons par (C).

5. Si, dans l'équation (3), on regarde u, v, w comme des coordonnées variables et qu'on supprime les indices, on a l'équation suivante :

$$(5)\,(\Gamma)\quad \left\{\begin{array}{l}(b^2+c^2)(w_0v-v_0w)^2+(c^2+a^2)(u_0w-w_0u)^2\\ \quad +(a^2+b^2)(v_0u-u_0v)^2=(u-u_0)^2+(v-v_0)^2+(w-w_0)^2,\end{array}\right.$$

laquelle représente une conique, enveloppe des droites du complexe situées dans le plan Π (u_0, v_0, w_0) ; nous dirons que c'est une conique du complexe, et nous la désignerons par (Γ).

6. Nous ferons de suite les remarques suivantes :

1° Si, d'un point P, on circonscrit un cône à l'ellipsoïde donné, le cône (C) du complexe sera évidemment le lieu des droites par lesquelles on peut mener des plans tangents rectangulaires au cône circonscrit ; et, lorsque

$$\mathrm{M}x^2+\mathrm{N}y^2+\mathrm{P}z^2=0$$

est l'équation du premier cône rapporté à ses plans principaux, on sait que l'équation du second est

$$\mathrm{M}(\mathrm{N}+\mathrm{P})x^2+\mathrm{N}(\mathrm{P}+\mathrm{M})y^2+\mathrm{P}(\mathrm{M}+\mathrm{N})z^2=0.$$

2° Si P_0 est un des points pour lesquels le cône du complexe se réduit à deux plans, et si Π_0 est un des plans du système, la conique (Γ) située dans le plan Π_0 se réduira à deux points, dont un est le point P_0; car il y a une infinité de droites du complexe situées dans le plan Π_0 et passant par le point P_0.

3° Si Π_0 est un des plans pour lesquels la conique (Γ) se réduit à deux points, et que P_0 soit un de ces points, le cône du complexe, ayant son sommet en P_0, se réduira à un système de deux plans, dont un sera le plan Π_0.

7. Si, d'un point P, on mène le cône circonscrit à l'ellipsoïde, le cône (C) du complexe aura les mêmes plans principaux que le cône circonscrit [6]; on sait d'ailleurs que les plans principaux de ce dernier cône sont les plans tangents aux trois surfaces homofocales qui passent par son sommet; donc :

Théorème II. — *Les droites du complexe, passant par un même point P, forment un cône* (C) *du second ordre; les plans principaux du cône* (C) *sont les plans tangents, en son sommet, aux trois surfaces homofocales de l'ellipsoïde donné qui passent par ce sommet.*

Le centre de la conique, définie par l'équation (5), est :

$$u_0 u + v_0 v + w_0 w - (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) = 0,$$

ou

$$\frac{x_1}{u_0} = \frac{y_1}{v_0} = \frac{z_1}{w_0} = \frac{1}{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2};$$

on voit que ce point est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre O de l'ellipsoïde sur le plan Π; donc :

Théorème III. — *Les droites du complexe, situées dans un plan* Π, *enveloppent une conique* (Γ) *dont le centre est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre* O *de l'ellipsoïde sur le plan* Π.

8. L'équation (5) de la conique (Γ) peut s'écrire :

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} &(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - 1) \\ &\quad + (a^2u_0^2 + b^2v_0^2 + c^2w_0^2 - 1)(u^2 + v^2 + w^2) \\ &\quad - 2(u_0u + v_0v + w_0w)(a^2uu_0 + b^2v_0v + c^2ww_0 - 1) = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation nous montre que :

Théorème IV. — *La conique* (Γ) *du complexe, située dans un plan*

Π, est inscrite dans un cône ayant pour sommet le pôle du plan Π par rapport à l'ellipsoïde donné, et circonscrit à une certaine surface homofocale de cet ellipsoïde; elle est également inscrite dans un cylindre perpendiculaire au plan Π_0 et circonscrit à la même surface homofocale que le cône précédent.

9. Si l'on forme, relativement au cône défini par l'équation (4), l'équation en s, savoir

$$s^3 - (A + A' + A'')s^2 + (A'A'' - B^2 + A''A - B'^2 + AA' - B''^2)s + AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' = 0,$$

on trouve ici

$$(7) \qquad s^3 - 2S_0 s^2 + (S_0^2 - G_0)s + (H_0 + S_0 G_0) = 0,$$

après avoir posé

$$(8) \quad \begin{cases} S = x^2 + y^2 + z^2 - (a^2 + b^2 + c^2), \\ G = (b^2 + c^2)x^2 + (c^2 + a^2)y^2 + (a^2 + b^2)z^2 - (b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2), \\ H = b^2c^2x^2 + c^2a^2y^2 + a^2b^2z^2 - a^2b^2c^2. \end{cases}$$

On conclut immédiatement de là que :

Théorème V. — *Le lieu des points pour lesquels le cône (C) se réduit à un système de deux plans est la surface*

$$(9)\ (\Delta) \qquad SG + H = 0;$$

les plans tangents à cette surface sont les plans Π_0 pour lesquels la conique (Γ) se réduit à un système de deux points.

Cette proposition est un cas particulier du théorème analogue démontré par Plücker (*Neue Geometrie*) pour les complexes généraux du second ordre.

Ajoutons de suite que :

Théorème VI. — *Les plans auxquels se réduisent les cônes du complexe touchent la surface Δ; et les deux points auxquels se réduisent les coniques du complexe appartiennent également à la surface Δ; les réciproques sont vraies.*

Cette proposition est une conséquence immédiate de la remarque 3° [n° 6] et du théorème précédent.

10. Si l'on pose

$$A = b^2 + c^2, \quad B = c^2 + a^2, \quad C = a^2 + b^2,$$

la surface Δ pourra être représentée par l'une ou l'autre des équations

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x^2 + y^2 + z^2)(Ax^2 + By^2 + Cz^2) \\ \quad - [A(B+C)x^2 + B(C+A)y^2 + C(A+B)z^2] \\ \quad + ABC = 0 \quad \text{(équation ponctuelle)}, \end{array} \right.$$

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} (u^2 + v^2 + w^2)(BCu^2 + CAv^2 + ABw^2) \\ \quad - [(B+C)u^2 + (C+A)v^2 + (A+B)w^2] \\ \quad + 1 = 0 \quad \text{(équation tangentielle)}. \end{array} \right.$$

Ces équations mettent en évidence les propriétés suivantes :

THÉORÈME VII. — *La surface Δ est la* SURFACE DES ONDES *relativement à l'ellipsoïde directeur*

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} - 1 = 0,$$

c'est-à-dire qu'*on l'obtient en portant, à partir du centre, sur la perpendiculaire à chaque section centrale des distances égales aux longueurs des axes de l'ellipse qu'elle détermine.*

Cette surface passe par l'intersection (imaginaire) de l'ellipsoïde primitivement donné avec la sphère lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits; elle est aussi inscrite dans la développable circonscrite à ce dernier ellipsoïde et au cercle imaginaire de l'infini.

On sait que la surface Δ admet 16 points doubles (4 réels, 8 imaginaires, 4 à l'infini) et 16 plans tangents doubles, dont 4 réels; cette surface se compose de deux nappes distinctes, renfermées entre les deux surfaces

$$x^2 + y^2 + z^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 0,$$
$$(b^2 + c^2)x^2 + (c^2 + a^2)y^2 + (a^2 + b^2)z^2 - (b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = 0;$$

ces deux nappes se raccordent aux 4 *points doubles coniques* réels.

Nous appellerons nappe inférieure celle qui est la plus rapprochée du centre de l'ellipsoïde.

11. Considérons un point a réel de la nappe supérieure de Δ; le cône du complexe, ayant son sommet en a, se réduit à deux plans,

soit Π_0 l'un d'eux; la conique Γ_0, située dans le plan Π_0, se composera de deux points, a et a', et les deux points a et a' appartiendront à la surface Δ. Or les deux plans auxquels se réduit le cône du complexe doivent toucher la surface Δ; l'un d'eux, au moins, touchera la nappe inférieure, il sera donc réel; il en sera, par conséquent, de même de l'autre, puisque l'équation qui les donne est à coefficients réels. La conique (a, a') correspondante est alors réelle, car un de ses points, a, est réel; par suite, le plan auquel elle correspond doit toujours toucher la nappe inférieure de Δ.

Si le point réel a est sur la nappe inférieure de Δ, le cône du complexe, ayant son sommet en a, se réduit encore à deux plans; un de ces plans, au moins, devra toucher la nappe supérieure; il sera donc imaginaire, et l'autre le sera également, puisque l'équation qui les donne est à coefficients réels. La conique correspondante à l'un quelconque de ces plans se composera d'un point réel et d'un point imaginaire.

Ainsi :

Théorème VIII. — *Les points de la* NAPPE SUPÉRIEURE *de Δ sont ceux pour lesquels le cône* (C) *se réduit à deux plans réels; ces deux plans touchent la nappe inférieure. Les plans tangents réels à la nappe supérieure sont ceux pour lesquels la conique* (Γ) *se réduit à deux points imaginaires.*

Les points de la NAPPE INFÉRIEURE *sont ceux pour lesquels le cône* (C) *se réduit à deux plans imaginaires; ces deux plans touchent (imaginairement) la nappe supérieure. Les plans tangents réels à la nappe inférieure sont ceux pour lesquels la conique* (Γ) *se réduit à deux points réels; ces points appartiennent à la nappe supérieure.*

12. Soit un point a de la nappe supérieure de Δ, et Π_0 un des plans du système correspondant; le plan Π_0 touche la nappe inférieure, soit C le point de contact; il coupe, en outre, la nappe supérieure suivant une courbe δ_1. Le cône du complexe, ayant son sommet en C, se réduit à deux plans imaginaires, dont les intersections par le plan Π_0 sont des droites de complexe qui doivent passer par le point C, et respectivement par les points réels a et a' de la conique correspondante au plan Π_0; ces deux droites seraient donc réelles, ce qui ne peut avoir lieu à moins que l'intersection des deux plans imaginaires ne coïncide avec la droite aa'.

Si maintenant on imagine le sommet du cône se déplaçant sur la courbe δ_1, le cône se réduit à deux plans réels, dont les intersections par le plan Π_0 passent par les points a et a'; lorsque le sommet P se rapproche du point a, par exemple, la droite Pa devient tangente en a à la courbe δ_1, et elle est, en outre, l'intersection des deux plans du complexe correspondant au point a, puisque l'un d'eux est le plan Π_0.

Donc :

Théorème IX. — *Lorsque le sommet du cône du complexe est en un point de la surface Δ, ce cône se réduit à deux plans dont la droite d'intersection touche la surface Δ au point considéré; cette droite est, en outre, normale à l'une des surfaces homofocales qui passent par ce point.*

Cette seconde partie de la proposition est une conséquence évidente de la remarque 1° [n° 6]; car si le cône du complexe se réduit à deux plans, ces deux plans passent visiblement par un des axes du cône circonscrit.

Nous pouvons encore énoncer la proposition suivante, qui résulte des considérations précédentes et du théorème III :

Théorème X. — *Lorsqu'un plan est tangent à la surface Δ, la conique (Γ) se réduit à deux points a, a', situés sur la surface Δ; la droite qui les joint est tangente à une des nappes de la surface, et normale à une des surfaces homofocales qui passent par le point de contact; elle est, en outre, l'intersection des deux plans auxquels se réduit le cône du complexe ayant son sommet au point de contact. Le lieu des milieux des segments aa' est la podaire du centre de l'ellipsoïde relativement à la surface Δ.*

13. Nous préciserons encore mieux la position des droites réelles du complexe par les propositions qui suivent :

Théorème XI. — *Les droites réelles du complexe passent toutes entre les deux nappes de la surface Δ, sans jamais pénétrer dans l'intérieur de la nappe inférieure; les positions limites de ces droites sont tangentes aux nappes de Δ.*

En effet, une droite réelle (D) ne peut pas pénétrer dans la nappe intérieure; car si cela pouvait arriver, elle rencontrerait cette nappe en un certain point I; pour ce point I le cône (C) du complexe se

réduit à deux plans imaginaires dont l'arête touche Δ en I; mais la droite (D), qui passe par le point I, doit alors appartenir à ce système de deux plans; et, comme elle est réelle, elle ne peut que coïncider avec leur arête; l'hypothèse faite est donc inadmissible.

Supposons maintenant la droite (D) réelle et extérieure à la surface Δ; menons alors un plan par cette droite et le centre O de l'ellipsoïde; ce plan coupera la nappe extérieure de Δ suivant une certaine courbe δ'; les cônes du complexe dont les sommets sont sur δ' se décomposent en des plans réels, dont les intersections par le plan considéré seront autant de droites réelles du complexe situées dans ce plan. La conique (Γ) correspondant à ce plan est donc réelle, et son centre est le point O [n° 7]. Or cette conique ne peut pas être une hyperbole, car on pourrait alors lui mener des tangentes des points situés dans le voisinage du point, et il y aurait ainsi des droites réelles du complexe pénétrant dans l'intérieur de la 2ᵉ nappe de Δ; ce qui est contraire à la première partie de la proposition. Cette conique, qui est une ellipse, doit toucher la droite (D); or, si cette droite (D) est extérieure à la surface Δ, et, par suite, à la courbe δ', l'ellipse interceptera sur cette courbe δ' une certaine portion d'arc; mais les divers points de cet arc donnent lieu à des droites réelles, issues de ces points, qui devraient toucher l'ellipse; ce qui est impossible. Il résulte de là que la droite (D) ne peut être supposée extérieure à la surface Δ.

M. Darboux, en appelant mon attention sur le lieu géométrique énoncé au commencement, m'avait signalé la propriété dont je viens de donner la démonstration.

Théorème XII. — *Lorsque le plan Π est extérieur à la surface Δ, la conique (Γ) correspondante est une ellipse imaginaire; quand il passe entre les deux nappes de Δ, la conique est une hyperbole; enfin, quand il pénètre dans la nappe intérieure, la conique est une ellipse réelle.*

Lorsque le plan Π est extérieur à Δ, il n'y a, dans ce plan, aucune droite réelle du complexe, puisque ces droites doivent passer entre les deux nappes de Δ; donc la conique (Γ) est une ellipse imaginaire.

Si le plan Π pénètre dans la nappe inférieure de Δ, il coupe les deux nappes suivant les courbes δ et δ_0 respectivement, la première de ces courbes enveloppant la seconde. La conique Γ est alors une

ellipse réelle renfermée entre les deux courbes δ et δ_0. En effet, la conique Γ ne peut pas être une hyperbole; car si cette hyperbole ne renferme pas intérieurement la courbe δ_0, on pourrait lui mener des tangentes des points situés dans l'intérieur de δ_0; il y aurait donc des droites réelles du complexe pénétrant dans la nappe inférieure de Δ; si cette hyperbole renferme intérieurement la courbe δ_0, elle interceptera sur la courbe δ_1 une portion d'arc, des points de laquelle on ne pourrait pas lui mener de tangentes, ce qui ne peut avoir lieu. La conique est donc une ellipse; et l'on voit, en raisonnant semblablement, que cette ellipse est réelle, et comprise entre les courbes δ_1 et δ_0.

On conclut de là que, si le plan Π vient passer entre les deux nappes de Δ, la conique Γ est une hyperbole, et cette hyperbole doit être extérieure à la section de la nappe supérieure par le plan Π (théorème VIII).

14. Théorème XIII. — *Lorsque le sommet du cône est à l'infini sur une direction* (α, β, γ), *le cône se réduit à un cylindre de révolution, dont le cercle directeur est l'intersection, avec la sphère lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits à l'ellipsoïde donné, du plan tangent à cet ellipsoïde mené perpendiculairement à la direction choisie.*

Lorsque le plan Π *passe par le centre de l'ellipsoïde, la conique* (Γ) *correspondante est une ellipse réelle ayant pour centre celui de l'ellipsoïde.*

En effet, le sommet P du cône étant à l'infini sur une direction (α, β, γ), imaginons le cylindre circonscrit parallèle à cette direction; le cône du complexe est alors le lieu des droites par lesquelles on peut mener des plans tangents rectangulaires à ce cylindre; or, si l'on considère la section droite passant, par exemple, par le centre O de l'ellipsoïde, la trace du cylindre du complexe sera le cercle lieu des angles droits circonscrits à l'ellipse section du cylindre circonscrit par le même plan; quant au rayon du cercle, il est donné par la formule (1°) [n° 1]; donc, etc.

La seconde partie de la proposition énoncée résulte du théorème III.

15. Les sections de la surface Δ par les plans principaux de l'el-

lipsoïde sont :

$$(12)\quad \begin{cases} x=0,\\ y^2+z^2=A,\\ By^2+Cz^2=BC,\end{cases}\quad \begin{cases} y=0,\\ x^2+z^2=B,\\ Ax^2+Cz^2=AC,\end{cases}\quad \begin{cases} z=0,\\ x^2+y^2=C,\\ Ax^2+By^2=AB.\end{cases}$$

Théorème XIV. — *Lorsque le sommet du cône est à l'infini sur un des axes principaux de l'ellipsoïde donné, le cône du complexe se réduit à un cylindre ayant pour trace le cercle de la surface* Δ *situé dans le plan perpendiculaire à l'axe considéré.*

Lorsque le plan Π *se confond avec un des plans principaux de l'ellipsoïde donné, la conique* (Γ) *coïncide avec l'ellipse de la surface* Δ *située dans le plan principal considéré.*

La première partie de cette proposition résulte du théorème XIII. Quant à la seconde partie, remarquons qu'un point du cercle de Δ, situé dans le plan principal considéré, donne lieu à un système de deux plans perpendiculaires à ce plan principal; ceci résulte de la première partie du théorème. Un point de l'ellipse de Δ, située dans le même plan principal, donnera lieu à un système de deux plans symétriques par rapport à ce plan principal, et inclinés sur ce plan, puisque le point n'appartient pas à la trace du cylindre; l'arête de ces deux plans sera donc située dans le plan principal; et, comme elle doit toucher la surface Δ, ce sera une tangente à l'ellipse de Δ; donc cette ellipse est précisément la conique (Γ).

16. Les points doubles de la surface Δ, situés à distance finie, sont dans les plans principaux de la surface, et se trouvent à l'intersection de l'ellipse et du cercle situés dans le plan principal considéré.

Si l'on suppose $a > b > c$, les points doubles réels sont situés dans le plan principal zOx perpendiculaire à l'axe moyen, et sont les intersections des deux courbes

$$(13)\quad (C_0)\ x^2+z^2=B\ \text{(cercle)},\quad Ax^2+Cz^2=AC\ \text{(ellipse)}.\ (E_0)$$

Par ces points passe l'hyperbole focale de l'ellipsoïde donné, laquelle hyperbole y coupe orthogonalement l'ellipse.

Théorème XV. — *Le lieu des points pour lesquels les cônes du complexe sont des cônes* réels *de révolution est l'hyperbole focale de l'ellip-*

soïde donné; l'axe du cône est la tangente à l'hyperbole focale au point où se trouve le sommet; les génératrices, situées dans le plan zOx, sont tangentes à l'ellipse de la surface Δ qui se trouve dans le même plan. Le cône devient imaginaire quand le sommet pénètre dans l'intérieur de cette ellipse.

En effet, si P est le sommet d'un des cônes de révolution, le cône circonscrit correspondant sera également de révolution; cela résulte de la remarque 1° [n° 6]; mais les sommets de ces derniers cônes sont sur les focales de l'ellipsoïde donné; il en est donc de même pour les cônes de révolution du complexe. D'après la nature et la position de ces focales, et le théorème XI, on conclut que l'hyperbole focale convient seule aux cônes de révolution réels. Si l'on considère un de ces cônes, les génératrices situées dans la section principale zOx devront toucher l'ellipse (E_0), (théor. VIII); et comme cette ellipse est homofocale avec l'hyperbole focale, la bissectrice de l'angle de ces deux génératrices, c'est-à-dire l'axe du cône, sera tangente à l'hyperbole focale au sommet du cône.

17. Théorème XVI. — *Les plans* réels Π, *pour lesquels les coniques* (Γ) *du complexe sont des cercles, sont des plans perpendiculaires aux asymptotes de l'hyperbole focale, et les centres des cercles sont sur ces asymptotes. Les cercles cessent d'être réels, lorsque la trace du plan* Π *se trouve au delà de la tangente commune au cercle et à l'ellipse situés dans le plan* zOx. *Lorsque le cercle est réel, son diamètre est la portion de la trace du plan* Π *interceptée par le cercle de la surface* Δ.

En effet, la conique (Γ) est la trace sur le plan auquel elle appartient d'un cylindre perpendiculaire à ce plan et circonscrit à une certaine surface homofocale de l'ellipsoïde donné (théor. IV); or, si la conique (Γ) est un cercle, le cylindre sera de révolution et, par suite, son sommet se trouvera à l'infini sur la focale de la surface homofocale en question; mais cette dernière a les mêmes focales que l'ellipsoïde donné; donc, etc. Le reste de la proposition résulte du théorème III et de cette remarque, que, pour les points où la trace du plan Π rencontre le cercle (C_0), le cône du complexe se réduit à deux plans perpendiculaires à zOx, et que l'arête de ces deux plans doit toucher la conique Γ (ou cercle) située dans le plan Π.

18. Si l'on considère un point quelconque a de la nappe supé-

rieure de Δ, et le système de plans du complexe correspondant à ce point, les deux plans toucheront la nappe inférieure de Δ; or ces deux plans resteront toujours distincts, tant que le point a n'appartiendra pas en même temps à la nappe inférieure; par conséquent les points doubles de la surface Δ seront les seuls pour lesquels le cône du complexe se réduit à deux plans coïncidents.

Si l'on imagine un plan quelconque Π_0 tangent à la nappe inférieure de Δ, la conique (Γ_0) se réduit à un système de deux points, qui sont les intersections avec la nappe supérieure de la droite joignant le point de contact au pied de la perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipsoïde sur le plan Π_0; les deux points qui constituent la conique (Γ) seront donc toujours distincts, tant que le plan Π_0 n'arrivera pas à toucher la nappe supérieure; par conséquent, les seuls plans pour lesquels la conique (Γ) se réduit à deux points coïncidents sont les plans tangents doubles de la surface Δ.

Ceci établi, qu'on suppose tracés l'ellipse (E_0) et le cercle (C_0) appartenant à la surface Δ et situés dans le plan zOx, et qu'on ait égard aux théorèmes VI, VIII, IX, on se rendra compte immédiatement de l'exactitude des propositions suivantes :

THÉORÈME XVII. — *Les points pour lesquels les cônes* RÉELS *du complexe se réduisent à deux plans coïncidents sont les quatre points doubles réels de la surface Δ, points doubles coniques qui sont les intersections du cercle (C_0) et de l'ellipse (E_0) appartenant à Δ, et situés dans le plan zOx de l'hyperbole focale de l'ellipsoïde donné.*

Si l'on considère un de ces points, D par exemple, le plan Π_d du complexe est perpendiculaire au plan zOx et touche en D l'ellipse (E_0); toutes les droites du complexe, qui passent par D, sont situées dans le plan Π_d. La conique (Γ_d) du complexe, située dans le plan Π_d, se réduit à deux points, dont un est le point D, et l'autre est le point D', intersection du cercle C_0 avec la tangente en D, à l'ellipse E_0. Le cône du complexe, dont le sommet est en D', se réduit à deux plans réels, perpendiculaires à zOx, dont les traces sont les tangentes menées du point D' à l'ellipse E_0.

THÉORÈME XVIII. — *Les plans pour lesquels la conique du complexe se réduit à deux points coïncidents sont les quatre plans doubles* RÉELS *de la surface Δ; ces plans doubles, curvi-tangents, sont perpendiculaires au plan zOx, et leurs traces sont les tangentes communes au cercle (C_0) et à l'ellipse (E_0).*

Si l'on considère une de ces tangentes, τ par exemple, le plan Π_8, perpendiculaire à zOx, ayant τ pour trace et touchant le cercle (C_0) en a_0, aura sa conique (Γ) réduite à deux points confondus en a_0. Toutes les droites du complexe, situées dans le plan Π_8, passent par le point a_0; et, par suite, les cônes du complexe dont le sommet est sur Π_8 sont tous touchés par ce plan suivant la droite qui joint le sommet au point a_0. Lorsque le sommet du cône se trouve en un des points où la droite τ touche l'ellipse ou le cercle, le cône se réduit à deux plans réels perpendiculaires à zOx; une des traces est la tangente commune, l'autre est la tangente à l'ellipse ou au cercle, suivant que le point considéré est sur le cercle ou sur l'ellipse.

19. Les propriétés caractéristiques que nous venons de signaler permettent de se faire une idée fort nette de la situation des droites réelles du complexe. Pour cela, on imaginera un plan Π dans une situation déterminée, puis on supposera le sommet P du cône du complexe se déplaçant dans ce plan.

Il sera bon, dans cette discussion, d'avoir égard à la propriété suivante :

« La conique (Γ), correspondant à un plan Π, touche en quatre
» points (réels ou imaginaires) la section de la surface Δ par ce
» plan. Un cône (C), ayant son sommet en un point quelconque, a
» quatre de ses génératrices (réelles ou imaginaires) touchant la
» surface Δ. »

20. Cette recherche n'est, pour ainsi dire, qu'une Introduction à l'étude des complexes particuliers du second ordre dérivant de la définition géométrique donnée au commencement de cet article. Il reste encore de nombreuses questions à aborder, sur lesquelles je reviendrai. Ainsi, on a à étudier la *congruence* formée par les arêtes des systèmes de plans du complexe; les propriétés des pôles et des polaires relativement à ce complexe, etc.; on a aussi à chercher quelles sont les propriétés essentielles qui caractérisent ce complexe particulier et le différentient des complexes généraux du second ordre, etc; on pourrait encore se proposer l'application de cette même définition géométrique au cas des hyperboloïdes et des paraboloïdes, en ayant toujours en vue la situation des droites réelles du complexe correspondant, etc.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Secchi (A.). — Le Soleil. Exposé des principales découvertes modernes sur la structure de cet astre, son influence dans l'univers et ses relations avec les autres corps célestes. In-8°. xvi-422 p., 3 pl. Paris, Gauthier-Villars. 12 fr.

Secchi (A.). — Sull 'ecclisse totale del sole che avrà luogo al 22 dicembre 1870. Notizie ed istruzioni. In-8°, 36 p., con 3 carte. Milano, Vallardi. 1 L. 25 c.

Spitz (C.). Erster Cursus der Differenzial-und Integralrechnung. 1 Bd. Gr. 8°. Leipzig, Winter'sche Verlagshandlung. $3\frac{1}{3}$ Thlr.

Spriggs (C.). — A Course of Geometrical Drawing; or Practical Geometry, plane and solid, including the construction of Scales, orthographic, horizontal and isomeric Projection, and the Theory of Shadows. N° 1. 4°, 16 p. (Manchester) London, Simpkin. 4 d.

Stampfer (S.). — Logarithmisch-trigonometrische Tafeln. 8. Aufl. 8°. Wien, Gerold. $\frac{2}{3}$ Thlr.

Staudigl (R.). — Construction eines Kegelschnittes, wenn derselbe durch imaginäre Punkte und Tangenten bestimmt wird. Lex.-8°. Wien, Gerold. 4 Ngr

Studnička (F.-J.). — Einleitung in die Theorie der Determinanten. Gr. 8°. Prag, Calve. 16 Ngr.

Todhunter (I.). — Algebra, for use of Colleges and Schools. 5th edition, revised and enlarged. Post.-8°, 610 p. London, Macmillan. 7 sh. 6 d.

Unferdinger (F.). — Transformation und Bestimmung des dreifachen Integrals

$$\iiint F\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2},\ \alpha x+\beta y+\gamma z\right)dx\,dy\,dz.$$

Gr. 8°. Wien, Gerold. 4 Ngr.

Walton (J.). — The Second Grade Perspective, a Course of Lessons expressly prepared for Use of Candidates for Examination by the

Science and Art Department on Perspective. 4°. (Bristol) London, Simpkin. 1 sh.

Weiss (E.). — Beiträge zur Kenntniss der Sternschnuppen. (2. Abhandlg.). Lex. 8°. Wien, Gerold. 9 Ngr.

Weygandt (Chr.). — Mathematische Geographie. Gr. 8°. Butzbach, Weickhardt. 1 Thlr.

Weyr (E.). — Zur Vervollständigung der Involutionen höherer Ordnung. Gr. 8°. Wien, Gerold. 2 Ngr.

Weyr (E.). — Geometrische Mittheilungen I.-II. Gr. 8°. Wien, Gerold. 2 Ngr.

Weyr (E.). — Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zwei-deutiger Gebilde, insbesondere der Kegelflächen dritter Ordnung. Gr. 8°. Leipzig, Teubner. 1 $\frac{1}{3}$ Thlr.

Winckler (A.). — Ueber die Relationen zwischen den vollständigen Abel'schen Integralen verschiedener Gattung. Lex. 8°. Wien, Gerold. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Wittstein (Th.). — Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. 4. Aufl. 2. Abdr. Gr. 8°. Hannover. $\frac{2}{3}$ Thlr.

Wolf (R.). — Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie. 2. Bd. 1. Lfg. Gr. 8°. Zürich, Schulthess. 3 Thlr.

Wolff (F.). — Lehrbuch der Geometrie. 1 Thl. 8. Aufl. Gr. 8°. Berlin, Reimer. 1 $\frac{2}{3}$ Thlr.

Zmurko (C.). — Studien im Gebiete numerischer Gleichungen mit Zugrundelegung der analytisch-geometrischen Anschauung im Raume. Gr. 4°. Wien, Gerold. 1 Thlr. 16 Ngr.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME II. — ANNÉE 1871.

TABLE ANALYTIQUE

DES MATIÈRES.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

Pages.

Chasles (M.). — Rapport sur les progrès de la Géométrie........................ 7
Poncelet (J.-V.). — Introduction à la Mécanique industrielle, physique et expérimentale. 3e édition.. 8
Simon (Ch.). — Mémoires sur la rotation de la Lune.............................. 11
Clausius (R.-J.-E.), traduit par *F. Folie*. — De la fonction potentielle et du potentiel.. 65
Schlömilch (O.). — Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis........... 66
Kossak (E.). — Das Additionstheorem der ultra-elliptischen Functionen erster Ordnung.. 68
Nicolaïdès (N.). — Analectes, ou Série de Mémoires sur les diverses parties des Mathématiques. (Livres I et II.)... 71
Klein (F.) et Lie (S.). — Sur les lignes asymptotiques de la surface de Kummer du 4e ordre à seize points singuliers.. 72
Richelot (F.-J.). — Die Landen'sche Transformation in ihrer Anwendung auf die Entwickelung der elliptischen Functionen.................................... 129
Neovius (V.). — Lärobok i minsta qvadrat-metoden.................................. 134
Bonsdorff (E.-V.). — Den geometriska theorie för complexa funktioner......... 136
Mellberg (E.-J.). — Om ytspänningen hos vätskor...................................... 137
Jordan (C.). — Traité des substitutions et des équations algébriques............ 161
Brünnow (F.), traduit par MM. *Lucas* et *André*. — Traité d'Astronomie sphérique et pratique.. 169
Laurent (H.). — Traité de Mécanique rationnelle...................................... 193
Baltzer (R.). — Theorie und Anwendung der Determinanten. 3. Aufl........... 198
Graindorge. — Mémoire sur l'intégration des équations de la Mécanique........ 199
Riemann (B.). — Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen.. 225
Meyer (G.-F.). — Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale zwischen reellen Grenzen.. 228

Pages.
Hoüel (J.). — Cours de Calcul infinitésimal. (1re Partie.) 257
Tchebychef. — Théorie des congruences 259
Schulenburg (A. v. der). — Die Gleichungen der drei ersten Grade 289

MÉLANGES.

Hermite (Ch.). — Sur la construction géométrique de l'équation relative à l'addition des intégrales elliptiques de 1re espèce 21
Darboux (G.). — Sur une méthode nouvelle pour l'étude des courbes tracées sur les surfaces algébriques 23, 184, 221, 314
Darboux (G.). — Sur une surface du 5e ordre et sa représentation sur le plan 40
André (Ch.). — Sur la parallaxe du Soleil déduite des observations méridiennes de Mars en 1862 89
Serret (J.-A.). — Mémoire sur le principe de la moindre action 97
Mannheim (A.). — Détermination simple et rapide d'une équation des surfaces du second ordre contenant six points donnés 125
Darboux (G.). — Sur la représentation des surfaces algébriques 155
Bonnet (O.). — Démonstration de la continuité des racines d'une équation algébrique 215
Laguerre. — Application du principe du dernier multiplicateur à l'intégration d'une équation différentielle du second ordre 246
Ermakof (V.). — Caractère de convergence des séries 250
Laguerre. — Sur une propriété de l'hyperboloïde de révolution 279
Simon (Ch.). — Note sur la formule de Gompertz et sur son application au calcul des probabilités de la vie humaine 282
Darboux (G.). — Sur une classe particulière de surfaces réglées 301
Klein (F.). — Sur la Géométrie dite *non-euclidienne* 341
Painvin (L.). — Étude d'un complexe du second ordre 368
Bulletin bibliographique : Liste d'ouvrages nouvellement parus, 96, 127 158, 256, ... 320, 351, 383

RECUEILS ACADÉMIQUES ET JOURNAUX DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS LE BULLETIN.

Annalen der Physik und Chemie, herausgegeben von J.-C. Poggendorff. T. CXL .. 83
Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, publiées par M. Pasteur. T. VII 263
Annali delle Università Toscane. T. X. 21
Astronomische Nachrichten, herausgegeben von C.-A.-F. Peters. T. LXXVII (*fin*). 231
Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei. T. XX-XXIII 19, 82, 148
Bulletin de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg. T. XIV (*fin*).. 299
Bulletins de l'Académie royale des Sciences de Belgique. Bruxelles. T. XXIX-XXXI .. 289
Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche; pubblicato da B. Boncompagni. T. III 146
Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Année 1871. T. LXXII-LXXIII 203, 241, 276, 330
Giornale di Matematiche, pubblicato da G. Battaglini. T. IX 142

Pages.

Journal de Mathématiques pures et appliquées; publié par J. Liouville. T. XV.. 33

Mathematische Annalen, herausgegeben von A. Clebsch und C. Neumann. T. II-III. 173, 235, 353

Monthly Notices of the Royal Astronomical Society of London. T. XXX.......... 149

Nouvelles Annales de Mathématiques, rédigées par MM. Gerono et Bourget, 2e série, t. IX........ 75

Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Session 1869-70........ 274

The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. Edited by J.-J. Sylvester and N.-M. Ferrers. T. XI........ 267

Tidsskrift for Mathematik, udgivet af H.-G. Zeuthen. Tredie Række. T. I....... 15

Transactions of the Royal Society of Edinburgh. T. XXVI, 1re Partie.......... 200

Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. T. V........ 321

Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben von O. Schlömilch, E. Kahl und M. Cantor. T. XV (*fin*)........ 137

TABLE DES MÉMOIRES ET OUVRAGES

PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

ALGÈBRE.

Algèbre élémentaire. — Théorie des équations. — Substitutions.

Pages.

ALEXANDRE (R.). — Méthode et formule pour la résolution des équations du 3e degré 79

BONNET (O.). — Démonstration de la continuité des racines d'une équation algébrique 215

BOUSSINESQ. — Méthode nouvelle pour la résolution d'une classe importante et très-nombreuse d'équations transcendantes 241

BRIOSCHI (Fr.). — Des substitutions de la forme

$$\Theta(r) \equiv \varepsilon\left(r^{n-2} + ar^{\frac{n-3}{2}}\right),$$

pour un nombre n premier de lettres 237

CATALAN (E.). — Remarques sur l'équation $x^m - 1 = 0$ 270

CAYLEY (A.). — Sur un problème d'élimination 270

CHELINI (D.). — Rapport sur le concours pour le prix Carpi en 1865. 19

GUNDELFINGER (S.). — Remarques sur la résolution des équations du 3e degré 361

HERMANN. — Méthode de l'élimination des intervalles, pour servir à la résolution des équations algébriques ou transcendantes 78

HESS (E.). — Sur la représentation des fonctions uniformes et symétriques des racines simultanées de deux équations algébriques ... 140

JORDAN (C.). — Traité des substitutions et des équations algébriques. 161

Pages.

— Sur la résolution des équations les unes par les autres.. 211

— Théorèmes sur les groupes primitifs 279

— Sur la résolution des équations différentielles linéaires 338

— Sur la classification des groupes primitifs 339

KÖTTERITZSCH (Th.). — Sur la résolution d'un système d'un nombre infini d'équations linéaires (2e article) 138

KREY (H.). — Remarque sur la résolubilité algébrique des équations 141

LAGUERRE. — Sur l'équation du 3e degré 79

LE BESGUE (V.-A.). — Sur l'équation du 3e degré 81

LUCAS (Éd.). — Note sur les sommes de puissances semblables des n premiers nombres entiers 76

MAINARDI (G.). — Remarques sur divers sujets 20

SCHRÖDER (E.). — Sur les opérations répétées 362

— Réflexions sur divers sujets (suite). 149

— Sur les algorithmes en nombre infini pour la résolution des équations 182

SCHULENBURG (A. v. d.). — Die Gleichungen der drei ersten Grade... 289

SPINA (C.). — Sur le nombre des valeurs des fonctions algébriques rationnelles qui contiennent un nombre donné de lettres; et com-

Pages.

ment on peut former les fonctions algébriques rationnelles, pour lesquelles il existe un nombre donné de valeurs, quand on permute les lettres entre elles.............. 83

TORTOLINI (B.). — Solution d'un problème relatif aux équations du troisième et du quatrième degré. 148

WALTON (W.) — Sur la transformation des deux équations simultanées

$$\frac{a(b-c)}{a-\alpha}+\ldots=0,$$

$$\frac{\alpha(\beta-\gamma)}{a-\alpha}+\ldots=0\ldots\ \ldots. \quad 273$$

— Démonstration de l'existence d'une racine de toute équation.. 272

Déterminants.

BALTZER (R.). — Theorie und Anwendung der Determinanten. 3. Aufl. 198

GERONO. — Note sur une application de la méthode des déterminants. 80

Théorie des formes homogènes. — Invariants.

CAMPOUX (DE). — Des invariants au point de vue des Mathématiques spéciales (fin).................. 77

CAYLEY (A.). — Un exemple de discriminant spécial.............. 273

— Note sur la théorie des invariants........................ 361

CLEBSCH (A.). — Sur la théorie des formes binaires de 6e ordre, et sur la trisection des fonctions hyperelliptiques 178

— Sur la signification d'un invariant simultané d'une forme binaire quadratique et d'une forme binaire biquadratique.. 360

— Sur la théorie des formes binaires algébriques............. 360

GORDAN (P.). — Les systèmes simultanés de formes binaires........ 180

— Sur la formation de la résultante de deux équations......... 363

ROBERTS (S.). — Note sur un évectant binaire............... 269

ARITHMÉTIQUE.

Théorie des nombres.

BOUNIAKOWSKI (V.). — Sur un théorème relatif à la théorie des résidus, et son application à la démonstration de la loi de réciprocité de deux nombres premiers... 300

— Sur les congruences binômes exponentielles à base 3, et sur plusieurs nouveaux théorèmes relatifs aux résidus et aux racines primitives..................... 299

— Sur le symbole de Legendre $\left(\frac{a}{p}\right)$ 301

BOURGET (J.). — Note sur la théorie des racines carrées et cubiques .. 18

— Note sur la racine carrée des nombres approchés............ 82

CATALAN (E.). — Note sur un problème d'analyse indéterminée... 19

— Rectification et addition à cette Note......................... 19

CAYLEY (A.). — Table des formes binaires du 3e degré, qui ont pour déterminants les nombres négatifs multiples de 4 depuis — 4 jusqu'à — 400; ceux de la forme — $4h+1$ depuis — 3 jusqu'à — 99; enfin les nombres — 972, — 1228, — 1336, — 1836, — 2700 273

GERONO. — Note sur la résolution,

Pages.

en nombres entiers et positifs, de l'équation $x^m = y^n + 1$ 81
HORNER (J.). — Sur le calcul des carrés magiques.............. 267
— Sur l'algèbre des carrés magiques 271, 273
LAISANT (A.) et BEAUJEUX (É.). — Mémoire sur certaines propriétés des résidus numériques............. 79
LEMOINE (L.). — Note sur une question d'arithmétique.......... .. 80
LIOUVILLE (J.). — Extrait d'une lettre adressée à M. V.-A. Le Besgue. 34
LORENZ (L.).—Sur la théorie des nombres......................... 16
MEISSEL. — De la détermination du nombre des nombres premiers compris entre deux limites données 240
— Calcul de la totalité des nombres premiers qui sont inférieurs à un million.................. 367
PÉPIN (le P.). — Sur la décomposition d'un nombre pair en une somme de deux cubes rationnels. 36
PETERSEN (J.). — Sur l'équation indéterminée $x^2 + cy^2 = A$ 16
RICHAUD (C.). — Note sur la solution de l'équation

$$x^2+(x+r)^2+\ldots+[x+(n-1)r]^2=y^2.$$ 19

SANG (E.). — Sur l'extension de la méthode de Brouncker à la comparaison de plusieurs grandeurs. 201
STIATTESI (A.).—Sur l'Arithmétique; dissertation historico-critique.... 148
TAIT. — Notes mathématiques...... 274
TCHEBYCHEF (P.). — Théorie des congruences..................... 259

ASTRONOMIE THÉORIQUE. — ÉPHÉMÉRIDES.

ANDRÉ (Ch.). — Sur la parallaxe du Soleil déduite des observations méridiennes de Mars en 1862.... 89
ARGELANDER (F.). — Observations et calculs sur les étoiles changeantes. 321
BOILLOT (A.). — Plan d'études appliqué à la connaissance des astres. 3e partie : Constitution physique du Soleil................. 246
BRUHNS (C.).—Configuration des planètes et des comètes. Découvertes de l'année 1869................ 321
BRÜNNOW (F.). — Traité d'Astronomie sphérique et pratique. 169
CAYLEY (A.). — Sur la construction de la courbe d'ombre ou de pénombre pendant la durée d'une éclipse de Soleil... 79
— Sur la détermination de l'orbite d'une planète, au moyen de trois observations 150
— Sur la construction graphique des courbes qui limitent l'ombre et la pénombre à un instant quelconque d'une éclipse de Soleil... 152
— Sur la théorie géométrique des éclipses de Soleil.............. 152
DELAUNAY. — Calcul de quelques nouveaux termes de la série qui exprime le coefficient de l'équation séculaire de la Lune 242
FAYE. — Sur l'histoire, en l'état présent, de la théorie des comètes... 340
GASPARIS (A. DE). — Éléments approchés de Camille, planète perdue.. 231
HALL (A.) — Observations et éléments de la comète (I, 1871).... 234
HENNESSY (H.). — Remarques à propos d'une communication de M. Delaunay sur les résultats fournis par l'Astronomie, concernant l'épaisseur de la croûte solide du globe.......... 210
HORNSTEIN (C.). — Orbite de la comète de Hind de 1847.......... 233
LEVEAU (G.). — Éléments et éphémérides de la petite planète (103) Héra. 209
MAYWALD. — Éphéméride pour l'apparition de (39) Lætitia......... 232
NEWCOMB (S.). — Théorie des perturbations de la Lune qui sont dues à l'action des planètes...... 214
NYRÉN (M.-M.). — Détermination du coefficient constant de la précession au moyen d'étoiles de faible éclat........................ 301
OPPOLZER (Th.). — Sur la comète de Winnecke (III, 1819)........... 233
— Éléments et éphéméride de (113) Amalthée.................. 234

	Pages.
PETERS (F.). — Éléments de la petite planète (116)	337
POWELL (E.-B.). — Sur l'orbite de α du Centaure	153
PROCTOR (R.-A.). — Note sur la couronne solaire et la lumière zodiacale	151
— Sur la résolubilité des amas d'étoiles, regardée comme servant à apprécier leurs distances	152
— Nouvelles remarques sur la Couronne solaire	154
PROJA (S.). — Sur la proposition de M. Mädler pour la réforme du calendrier russe	19
PUISEUX (V.). — Mémoire sur l'accélération séculaire du mouvement de la Lune	33
RESPIGHI (L.). — Sur la scintillation des étoiles	83
— Sur le cratère lunaire de Linné.	82
— Sur la vitesse de la lumière, déduite des éclipses des satellites de Jupiter et de l'aberration des étoiles	82
SANDBERG (A.-J.). — Éphéméride pour l'opposition de (92) Ondine.	235
SCHULHOF (L.). — Éphémérides hypothétiques pour l'opposition de (66) Maïa, en 1871	235
SIMON (Ch.). — Mémoire sur la rotation de la Lune et sur la libration réelle en latitude. Mémoire sur la rotation de la Lune	11
STONE. — Détermination de la constante de la nutation par les observations d'ascension droite de la Polaire et de déclinaison de la Polaire, de 51 Céphée et de δ Petite-Ourse, faites à l'Observatoire de Greenwich, de 1851 à 1865	154
TIETJEN (F.). — Observations et éphéméride de (103) Héra	232
— Éléments de (112) Iphigénie	233
TIETJEN (F.) et OPPOLZER (Th.). — Observations, éléments et éphéméride de (113) Amalthée	232
TISSERAND. — Détermination de l'orbite de la planète (117) Lomia	339
— Détermination de l'orbite de la planète (116) (C.-H.-F. Peters)	340
VALENTINER. — Détermination de l'orbite de la comète (V, 1863)	329
VILLARCEAU (Y.). — Note sur la comète périodique de d'Arrest	334
WINNECKE (A.). — Découverte d'une nouvelle comète. Éléments de cette comète	232
WINNECKE, BRUHNS, WEIS (E.), SCHULHOF et RÜMKER. — Observations, éléments et éphéméride de la comète (II, 1871)	235

ASTRONOMIE PRATIQUE.

Analyse spectrale. — Observations stellaires.

AIRY (G.-B.). — Sur l'éclipse totale de Lune du 12 juillet 1870	154
BERNAERTS (G.). — Sur la nature du Soleil	292
BIRMINGHAM (J.). — Observations des bandes de Jupiter. Observations d'étoiles variables	233
BORRELLY. — Découverte d'une nouvelle petite planète, la 116e du groupe situé entre Mars et Jupiter.	337
BRIFFAUT (A.). — Sur un bolide observé à Tours le 17 mars 1871	276
BRUHNS (C.). — Observations de petites planètes, des comètes de Coggia (II, 1870), de d'Arrest et de Winnecke	233
CHAPELAS. — Mémoire sur la direction des étoiles filantes	331
— Étoiles filantes du mois d'août 1871	335
CHEUX (A.). — Sur l'aurore boréale du 9 avril 1871 observée à Angers. — Sur la lumière zodiacale observée à Angers le 19 février 1871.	276
COGGIA. — Observation d'un bolide, faite à l'Observatoire de Marseille le 1er août 1871	335
CORNU. — Réponse à une Note de M. Janssen	335
DELAUNAY (Ch.). — Note sur les deux	

Pages.

planètes (116) et (117) récemment découvertes. — Notes sur les nébuleuses découvertes et observées par M. Stephan à l'Observatoire de Marseille.................... 339
— Réapparition de la comète de Tuttle........................ 340
Denza. — Bolides observés en Italie pendant le mois de juillet...... 335
Dunér (N.). — Observations du compagnon de Sirius, et comparaison avec l'éphéméride d'Auwers..... 234
Flammarion (C.). — Observation de la lumière zodiacale, le 20 février 1871......................... 209
Fonvielle (W. de). — Halo lunaire vu de deux stations différentes... 209
— Sur quelques apparitions analogues à celles du bolide de Marseille........................ 335
Geelmuyden (H.). — Observations de la comète de Coggia.......... .. 233
Grant (R.). — Observations de petites planètes et de Neptune..... 231
Gruey (L.-J.). — Recherches sur la flexion de la lunette méridienne. 266
Guillemin. — Sur deux observations qui paraissent offrir quelque analogie avec celle du météore signalé récemment par M. Coggia....... 338
Guyot. — Sur les bolides du 11 août 1871 et du 24 juin 1870......... 335
Herschel (J.-F.-W.). — Septième catalogue d'étoiles doubles observées à Slough, de 1823 à 1828. 150
Janssen (J.). — Lettre à M. le Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences sur les résultats du voyage entrepris pour observer en Algérie l'éclipse de Soleil du 22 décembre 1870.............. 209
— Sur la constitution du Soleil.... 335
— Remarques sur une dernière Note de M. Cornu................ .. 338
Kaiser (R.). — Observations de planètes, d'étoiles de comparaison, d'occultation.... 232
Kinkelin (H.). — Calcul de la Pâque chrétienne 138
Kowalczyk. — Éléments corrigés de (63) Hespérie. Observations de petites planètes....... 234
Laterrade. — Sur la théorie des deux Soleils................... 330
Lemaly. — Bolide observé le 4 août 1871, à Trémont, près Tournus.. 335

Pages.

Lemaly et Maquieu. — Sur l'observation des essaims d'étoiles filantes des mois de novembre et d'août, et sur l'observation d'un bolide faite à Trémont, près Tournus... 332
Leveau. — Retour de la comète périodique de d'Arrest........... 334
Le Verrier (U.-J.). — Observations de l'essaim d'étoiles filantes du mois d'août, faites pendant les nuits des 9, 10 et 11 août 1871, dans un grand nombre de stations correspondantes................ 335
Lœwy. — Sur un nouvel instrument équatorial..................... .. 339
Lœwy et Tisserand. — Observations de la nouvelle planète de Luther, faites à l'Observatoire de Paris... 213
Luther (R.). — Découverte d'une nouvelle planète............... 211
— Observations des planètes (116) et (117), faites à l'Observatoire de Paris. Découverte d'une petite planète de 11e grandeur, le 14 septembre 1871, à 11 heures du soir. 338
Luther (R.) et Börgen (C.). — Observations de la planète (112)..... 231
Luther et Peters. — Observations des planètes récemment découvertes (116) et (117)............. 339
Matthiessen (L.). — Observations et orbite du bolide du 27 septembre 1870 234
Meunier (St.). — Situation astronomique du globe d'où dérivent les météorites..................... 209
Möller (A.). — Observations de petites planètes et de la comète de Coggia (II, 1870)............. 231
— Éléments et éphéméride de (101) Hélène et de (113) Amalthée.... 232
— Observations de petites planètes. 234
Montigny (Ch.). — Notice sur la séparation des trajectoires décrites dans l'atmosphère par des rayons de même origine sidérale, mais de réfrangibilité différente, et sur les effets de cette séparation à l'égard de la scintillation............. 289
— Notice sur la scintillation et sur son intensité pendant l'aurore boréale observée à Bruxelles le 5 avril 1870.... 293
Oppolzer (Th.). — Retrouve la pla-

Pages.
nète Hélène.................... 232
PALISA (J.). — Observations des comètes (I, 1870) et (II, 1870)..... 231
PALISA (Z.) et LUTHER (R.). — Observations de (115) Amalthée..... 232
PARTIOT. — Mémoire sur les marées fluviales..................... 331
PIHL (O.-A.-L.). — Examen micrométrique de l'amas d'étoiles de Persée........................ 329
PLUMMER (J.). — Observations de petites planètes.................. 235
PROCTOR (R.-A.). — Sur l'application de la photographie à la détermination de la parallaxe solaire......................... 151
RENOU. — Sur les aurores boréales observées à Vendôme en 1870.... 210
RESPIGHI (L.). — Sur la latitude de l'Observatoire Romain, au Capitole......................... 82
— Sur les comètes et sur les étoiles filantes....................... 19
RÜMKER (G.). — Observations des comètes (II, III, IV, 1870)...... 232
SAGOLS. — Sur un bolide observé au cap Sicié le 14 juin 1871......... 276
SECCHI (A.). — Recherches sur les taches solaires et leurs mouvements........................ 19
— Sur les spectres des étoiles fixes. 82
— Seconde série de mesures micrométriques faites à l'équatorial de Merz, au Collége Romain, de 1863 à 1866 inclusivement. Étoiles doubles et nébuleuses.............. 82
— Nouveaux résultats d'observations concernant la constitution physique du Soleil............. 212
— Découverte d'une nouvelle combinaison spectroscopique permettant de voir en même temps les images des taches et des protubérances solaires avec les raies spectrales.. 233
— Sur les relations qui existent, dans le Soleil, entre les facules, les protubérances et la couronne. 279, 334, 336
— Sur les divers aspects des protubérances et des autres parties remarquables à la surface du Soleil. Classification de ces phénomènes. 339
SENBROKE (G.). — La couronne solaire est-elle un phénomène solaire ou un phénomène terrestre?........ 153
— Sur le déplacement des lignes lumineuses dans le spectre de la chromosphère solaire........... 153
SPÖRER. — Observations des taches du Soleil...................... 232
STEPHAN (E.). — Découverte d'une comète par M. Borrelly (la même que celle de Winnecke)......... 232
— Voyage de la Commission française envoyée par le Ministre de l'Instruction publique sur la côte orientale de la presqu'île de Malacca, pour y observer l'éclipse totale de Soleil du 18 août 1868. 266
TEMPEL. — Découverte d'une nouvelle comète à l'Observatoire de Milan........................ 235
TIELE, BRUHNS, etc. — Observations de la comète (I, 1871).......... 232
TREMESCHINI (G.-A.). — Formes successives d'une tache solaire observée dans les premiers jours de mai......................... 243
VOGEL (H.). — Observations spectroscopiques de la comète (I, 1871). 232
— Description de l'Observatoire de Bothkamp.................... 233
WARREN DE LA RUE, STEWART et LOEWY. — Résumé des observations de taches solaires faites avec le photohéliographe de l'Observatoire de Kew, pendant l'année 1869......................... 150
WOLF (R.). — Étude sur la fréquence des taches solaires et leur relation avec la variation de la déclinaison magnétique......... 152
WOLFERS. — Comparaison des positions d'un certain nombre d'étoiles données dans le second catalogue de Radcliffe, avec les positions des mêmes astres, tirées des *Tabulæ reductionum* de Wolfers......................... 152
ZENKER (W.). — Observations des protubérances solaires, dans une lumière monochromatique...... 235

BIBLIOGRAPHIE. — HISTOIRE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

Pages.

Bertrand (J.). — Considérations relatives à la théorie du vol des oiseaux........................ 244
— Note sur la théorie de la Lune d'Aboul-Wefà.................. 335
— Observations sur la Note de M. Chasles, relatives à la découverte de la variation lunaire..... 338
— Réponse à la Note de M. Chasles. 340
Bienaymé. — Rectification de listes d'articles détachés de M. Cauchy, publiées dans deux catalogues différents, et restitution à M. Cournot de quelques-uns de ces articles.... 203
Boncompagni (B.). — Mémoire concernant le marquis Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano, jusqu'au mois de février de l'année 1752. Envoyé par le P. don Angelo Calogerà au comte Giovanni Maria Mazzuchelli, et tiré du manuscrit du Vatican n° 9281........... 147
Cayley (A.). — Remarque sur le calcul de logique.............. 274
Chasles (M.). — Rapport sur les progrès de la Géométrie....... 7
— Note relative à l'établissement de l'Observatoire.................. 208
— Réflexions sur les observations de M. Delaunay relatives à la Lettre du comte de Cassini.......... 209
— Sur la découverte de la variation lunaire...................... 336
— Réponse à un passage de la dernière Note de M. Bertrand...... 338
— Réponse aux observations présentées dans la dernière séance par M. Bertrand, à propos d'Aboul-Wefà.................... 341
Delaunay (Ch.). — Lettre de Cassini IV au comte d'Angivilliers.. 208
— Réponse aux observations de M. Chasles, relatives à la Lettre de Cassini IV au comte d'Angivilliers....................... 208
Egger. — Nouveaux documents sur les quatre livres conservés de l'*Optique* de Claude Ptolémée.... 337
Friedlein (G.). — Les signes numériques et le calcul élémentaire chez les Grecs et les Romains, et chez les chrétiens d'Occident, depuis le VIIe jusqu'au XIIIe siècle. (Analyse par *J. Hoüel*)....... 147
Genocchi (A.). — Notice sur quelques écrits relatifs à l'addition des intégrales elliptiques et abéliennes...................... 147
Govi (G.). — Sur trois Lettres de Galilée, tirées des archives des Gonzague.................... 147
— Recherches historiques sur l'invention du niveau à bulle d'air.. 147
Hoüel (J.). — Article bibliographique sur le *Compendium der höheren Analysis* de M. Schlömilch... 80
Martin (Th.-H.). — Sur un ouvrage faussement attribué à Aristarque de Samos....................
Nicolaïdès (N.). — Analectes, ou série de Mémoires sur les diverses parties des Mathématiques....... 71
Oppermann (L.). — Augustus de Morgan.......................... 16
Palermo (F.). — Sur la vie et les travaux de Giovanni-Battista Amici.......................... 147
Schering (E.) (traduit par P. Mansion). — Notice biographique sur Bernhard Riemann............. 148
Sédillot (L.-Am.). — Les professeurs de Mathématiques et de Physique générale au Collége de France... 147
Siacci (F.). — Sur le théorème du comte de Fagnano............. 146
Transon (A.). — Sur l'emploi de l'infini en Mathématiques....... 334
Vorsterman van Oijen (G.-A.). — Quelques arpenteurs hollandais de la fin du XVIe et du commencement du XVIIe siècle, et leurs instruments....................... 147
Wolstenholme (J.) — Sur un article concernant les porismes........ 269

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Intégrales définies et indéfinies.

Catalan (E.). — Sur la détermination de l'aire de l'ellipsoïde..... 295
Didon (F.). — Sur une intégrale double....................... 205

Pages.

Götting (R.). — Sur les dérivées successives de l'expression x^k, où x désigne une fonction quelconque d'une variable indépendante. 362

Grube (F.). — Sur deux intégrales définies.......................... 141

Hoüel (J.). — Cours de calcul infinitésimal, professé à la Faculté des Sciences de Bordeaux. 1re Partie. 257

Imchenetsky (V.). — Sur les fonctions de Jacques Bernoulli, et sur l'expresion de la différence entre une somme et une intégrale de mêmes limites.................. 144

Meyer (G.-F.). — Vorlesungen über die Theorie der bestimmtem Integrale zwischen reellen Grenzen. 228

— Note sur deux intégrales définies qui se présentent dans la théorie de la chaleur... 357

Oppermann (L.). — Sur les quadratures........................ 15

Schlömilch (O.). — Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis.......................... 66

— Note sur la rectification des courbes.......................... 138

— De la différentiation multiple sous le signe d'intégration....... 138

Tychsen (C.). — Sur une intégrale multiple, qui se rencontre dans la méthode des moindres carrés... 16

FONCTIONS PARTICULIÈRES.

Fonctions abéliennes, de Bessel, elliptiques, eulériennes, d'Hermite, de Laplace.

Bonsdorff (E.-V.). — Den geometriska theorie för complexa funktioner.......................... 136

Brill (A.). — Deuxième Note relative aux modules d'une classe d'équations algébriques......... 237

Catalan (E.). — Sur quelques questions relatives aux fonctions elliptiques........................ 20

Hermite (Ch.). — Sur la construction géométrique de l'équation relative à l'addition des intégrales elliptiques de première espèce .. 21

Königsberger. — La transformation linéaire des fonctions φ de M. Hermite 353

Kossak (E.). — Das Additionstheorem der ultra-elliptischen Functionen erster Ordnung.......... 68

Lommel (E.). — Sur l'application des fonctions de Bessel à la théorie de la diffraction............. 137

— Intégration de l'équation

$$x^{m+\frac{1}{2}}\frac{d^{2m+1}y}{dx^{2m+1}}\mp y=0$$

par les fonctions de Bessel...... 240

— Sur la théorie des fonctions de Bessel......................... 366

Neumann (C.). — Sur les produits et les carrés des fonctions de Bessel. 178

— Sur le développement d'une fonction suivant les carrés et les produits des fonctions de Fourier et de Bessel.......... 368

— Sur les intégrales elliptiques et hyperelliptiques................ 368

Richelot (F.-J.). — Die Landensche Transformation in ihrer Anwendung auf die Entwickelung der elliptischen Functionen......... 129

Schlaefli (L.). — Remarques sur les recherches de M. Neumann relatives aux fonctions de Bessel..... 357

Walton (W.). — Démonstration d'une propriété des fonctions elliptiques.................... 271

ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES ET PARTIELLES.

Catalan (E.). — Sur l'équation de Riccati. 297

Collet. — Intégration des équations simultanées aux dérivées partielles

Pages.

du 1er ordre d'une seule fonction. 263

— Du facteur intégrant pour les expressions différentielles du premier ordre renfermant un nombre quelconque de variables indépendantes.................... 264

Darboux (G.). — Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre.......................... 266

Glaisher (J.-W.-L.). — Sur l'équation de Riccati................. 274

Grelle (Fr.). — Intégration des équations différentielles ordinaires et partielles par la méthode de la séparation des symboles d'opération.................... 140

Laguerre. — Application du principe du dernier multiplicateur à l'intégration d'une équation différentielle du second ordre....... 246

Mayer (A.). — Sur la méthode d'intégration de Jacobi, pour les équations aux différentielles partielles du premier ordre......... 364

Most (R.).— Sur l'équation linéaire du $m^{ième}$ ordre

$$\sum_{r=0}^{r=m}(a_r+b_r x^{\rho})x^{m-r}y^{(m-r)}=\sum_{r=0}^{r=p}c_r x^{r\rho}.$$ 141

Riemann (B.). — Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen. Herausgegeben von K. Hattendorff. 225

Rosanes (J.). — Sur les équations différentielles algébriques....... 367

Spitzer (S.). — Intégration par des intégrales définies de l'équation

$$y^{(n)}=Ax^2y''+Bxy'+Cy,$$

dans laquelle n désigne un nombre entier positif et A, B, C des nombres constants..... 366

Tait. — Note sur les équations linéaires aux différentielles partielles......... 275

Tychsen (C.). — Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients variables.......... 15

CALCUL DES VARIATIONS. — CALCUL AUX DIFFÉRENCES FINIES.

Geiser (C.-F.). — Note sur les surfaces minima algébriques....... 367

Heine (E.). — Extraits de deux lettres: 1° Développement de $\cos n\varphi$; 2° Calcul des variations...... .. 177

Lindelöf (L.). — Problème de Géométrie............... 78

— Propriétés générales des polyèdres qui, sous une étendue superficielle donnée, renferment le plus grand volume............. 177

— Sur les limites entre lesquelles la caténoïde est une surface minima. 177

Mayer (A.). — Le théorème du calcul des variations qui correspond au principe de la moindre action. 176

GÉODÉSIE.

Aéronautique. — Réfractions.

Airy (G.-B.). — Sur un oculaire destiné à corriger l'effet de la dispersion atmosphérique.......... 149

Bourdin (J.). — Sur un instrument analogue au compas aéronautique, décrit par M. Janssen........... 210

Delaunay (Ch.). — Observations relatives à l'hypothèse de la fluidité intérieure du globe terrestre, à l'occasion de la lettre récente de M. Hennessy........ 210

Duprez (F.). — Discussion des observations d'électricité atmosphérique recueillies à Gand, et comparaison entre ces observations et celles faites en d'autres lieux. 2e Partie.......................... 298

Fonvielle (W. de). — Observations à propos de l'expédition du ballon *le Duquesne*.................... 209

— Programme d'une ascension aérostatique pour observer les étoiles filantes de novembre 1871....... 339

Gyldén (H.). — Recherches sur la

Pages.
constitution de l'atmosphère et sur la réfraction (1[er] et 2[e] Mémoire)..................... 321, 325
HEGER (R.). — Remarque sur la détermination des limites de l'aplatissement du sphéroïde terrestre $\left(\frac{1}{304} \text{ et } \frac{1}{578}\right)$, d'après la nutation.............................. 139
JANSSEN (J.). — Sur le compas aéronautique........................ 311
— Voyage aéronautique du *Volta*, entrepris le 2 décembre 1870, en vertu d'une mission scientifique.. 335
LABROUSSE. — Sur un appareil d'hélice à nacelle, emporté par un ballon qui s'est élevé de Paris le 9 janvier (1871)................ 208
PLÜCKER (J.). — Note sur le stéréographe de poche................ 297
PROCTOR (R.-A.). — Méthode de construction de cartes servant à donner, avec exactitude et en très-peu de temps, la trace du grand cercle qui joint deux points du globe.. 151
VILLARCEAU (Y.). — Nouvelle détermination de la *vraie* figure de la Terre ou de la surface de niveau, n'exigeant pas l'emploi des nivellements proprement dits........ 338

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Courbes et surfaces de degré supérieur.

BRILL (A.). — Sur celles des courbes d'un réseau qui ont un contact de deuxième ordre avec une courbe donnée......................... 366
CAYLEY (A.). — Sur les surfaces du 4[e] degré $(\star \between U, V, W)^2 = 0$ (suite). 268, 271
CLEBSCH (A.). — Sur la détermination des points d'inflexion d'une courbe du 3[e] ordre............ 184
DARBOUX (G.). — Des courbes tracées sur une surface, et dont la sphère osculatrice est tangente en chaque point à la surface.............. 337
DURRANDE (H.). — Note sur les surfaces du 4[e] ordre................ 80
ENNEPER (A.). — Sur la surface développable circonscrite à une surface donnée.................... 139
GORDAN (P.). — Sur les courbes du 3[e] ordre avec deux points doubles. 368
GÜSSFELDT (P.). — Sur les courbes qui ont un pôle harmonique et une droite harmonique......... 174
HAASE (J.-C.-F.). — Sur la théorie des courbes planes du $n^{ième}$ ordre avec $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points doubles ordinaires ou de rebroussement.......................... 239
HEGER (R.). — Formules fondamentales de la Géométrie analytique du plan en coordonnées homogènes.......................... 141
JOACHIMSTHAL. — Sur le nombre des normales réelles que l'on peut mener d'un point à un ellipsoïde. 81
LA GOURNERIE (DE). — Notes sur les singularités élevées des courbes planes........................ 33
— Note sur les quadricuspidales.. 37
LAGUERRE. — Sur un problème de Géométrie relatif aux courbes gauches du quatrième ordre. 35
— Sur l'emploi des imaginaires en Géométrie................. 77, 79
— Sur la règle des signes en Géométrie.......................... 78
LEMONNIER (H.). — Etude analytique sur la cyclide.................. 81
— Équation de Hesse pour la détermination des points d'inflexion. 81
— Problèmes de Géométrie analytique.......................... 82
PAINVIN (L.). — Note sur l'hypocycloïde à trois rebroussements.... 78
REIS (M.). — Etudes de Géométrie analytique.................... 235
REYE (Th.). — Les surfaces algébriques, leurs courbes d'intersection et leur génération par des faisceaux projectifs.............. 238
ROSANES (J.). — Sur les triangles placés en perspective............ 239
SCHRÖTER (H.). — Sur les triangles en perspective................ 239
STURM (R.). — Sur la surface romaine de Steiner.............. 356

Pages.

Tognoli (O.). — Note sur le nombre des surfaces d'un réseau qui ont un contact triponctuel avec la courbe d'intersection de deux surfaces algébriques 146

Weyr (Em.). — Des systèmes de points sur les courbes du troisième ordre.......................... 140

— Sur la Géométrie des courbes du 3e ordre...................... 141

— Rapport des courbures d'un faisceau de courbes en un sommet.. 142

— De la génération des courbes par involutions projectives..... 354

— Construction des rayons de courbure et des directions principales en un point d'une surface quelconque........ 358

— Sur les courbes à point double du troisième ordre............. 358

Sections coniques et surfaces du second ordre.

Carnoy. — Note sur le triangle circonscrit à une conique.......... 79

Cayley (A.). — Sur une relation qui existe entre deux cercles.. 269

— Sur le porisme relatif au polygone inscrit et circonscrit et à la correspondance réciproque des couples de points sur une conique. 270

— Sur l'enveloppe d'une certaine surface du second degré......... 273

Chasles. — Propriétés des systèmes de coniques relatives toutes à certaines séries de normales en rapport avec d'autres lignes de divers points........................ 241

— Propriétés des systèmes de coniques, dans lesquels se trouvent des conditions de perpendicularité entre diverses séries de droites. 241

— Théorèmes divers concernant les systèmes de coniques représentés par deux caractéristiques....... 242

Hierholzer (C.). — Sur les coniques dans l'espace................. . 239

Hochheim. — Courbes tangentielles des sections coniques........... 140

Laguerre. — Sur une propriété de l'hyperboloïde de révolution.... 279

Leclert (Ém.). — Propriétés de la parabole............ 79

Lüroth (J.). — Résolution de quelques problèmes sur les coniques dans l'espace.................. 357

Mannheim (A.). — Détermination simple et rapide d'une équation des surfaces du second ordre contenant six points donnés........ 125

Neuberg (J.). — Triangles et coniques combinés................. 76

— Théorie des indices des points des droites et des plans par rapport à une surface du second ordre. 79

Painvin (L.).—Note sur la construction géométrique des normales à une conique 80

Saltel (L.). — Sur la détermination des foyers d'une section plane dans une surface du second ordre. 80

Serret (P.). — Sur un théorème de Ferrers.......... 76

Welsch (J.). — Démonstration élémentaire d'un théorème de Monge. 77

GÉOMÉTRIE SYNTHÉTIQUE.

Géométrie élémentaire non euclidienne.

Bellavitis (G.). — Application du calcul des équipollences à la solution de deux problèmes......... 75

Béziat (L.). — Solutions de quelques problèmes célèbres par la méthode des équipollences du professeur *G. Bellavitis* 77

Chasles. — Propriétés des courbes d'ordre et de classes quelconques, démontrées par le principe de correspondance................. 243

— Propriétés des diamètres des courbes géométriques........... 276

— Propriétés générales des courbes géométriques relatives à leurs axes harmoniques.............. 333

— Théorèmes concernant la détermination sur une courbe géomé-

Pages.

trique d'une série de groupes de points en nombre déterminé..... 340

Dostor (G.). — Propriété des bissectrices des angles d'un triangle, avec application aux tangentes et normales de l'ellipse et de l'hyperbole.......... 82

Françoise (Ém.). — Application du calcul des équipollences à la résolution d'un problème de Géométrie élémentaire............ 76

Hirst.—Discours sur Euclide, comme livre de texte.................. 146

Hoüel (J.). — Note sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe des parallèles...................... 76

Klein (F.). — Sur la Géométrie dite *non-euclidienne*................ 341

Lemoine (E.). — Note sur l'expression de la distance entre quelques points remarquables d'un triangle. 79

Lemonnier (H.). — Solution d'une question géométrique... 81

Möller (C.-F.-C.). — Quelques remarques sur l'enseignement de la stéréométrie élémentaire........ 16

Niewenglowski (B.). — Étude de la sphère......................... 75

Smith (W.-R.). — Note sur la théorie du professeur *Bain* concernant la IVe proposition du Ier Livre d'Euclide..................... 275

Steen (Ad.). — Démonstration élémentaire de la formule de Simpson. 16

Wolff (J.-I.). — Note sur la proposition VII du VIe livre d'Euclide. 269

Zeuthen (H.-G.). — Sur le principe de dualité..................... 15

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE.

Courbure. — Coordonnées curvilignes. — Représentation géographique.

Allégret. — Note sur la propriété dont jouit le cercle osculateur en un point quelconque d'une certaine famille de courbes........ 75

Darboux (G.). — Sur une série de lignes analogues aux lignes géodésiques....... 266

Enneper (A.).— Recherches sur quelques points de la théorie générale des surfaces.................. 240

Hoppe (R.). – Représentation conforme d'une surface du second degré sur le plan.................. 238

Klein et Lie. — Sur les lignes asymptotiques de la surface de Kummer du 4e ordre à seize points singuliers......................... 72

Laguerre. — Sur une formule relative aux courbes tracées sur les surfaces du second ordre 75

Mylord (H.).— Application des coordonnées elliptiques à la détermination du système de trajectoires obliquangles pour certains systèmes de courbes et de surfaces. 15, 16

Painvin (L.). — Détermination des rayons de courbure en un point quelconque d'une surface définie par son équation tangentielle.... 340

Ruchonnet (Ch.). — Expression de la distance d'une courbe à la sphère osculatrice.............. 80

Stahl (H.). — Sur la théorie des lignes de courbure et des systèmes triples orthogonaux........ 366

Stahlberger (E.). — Sur le calcul de la température moyenne à l'aide des températures maximum et minimum....................... 141

Tilly (J.-M. de). — Note sur les surfaces à courbure moyenne constante......................... 294

Tisserand. — Sur les surfaces orthogonales.... 246

Tortolini (B.). — Sur un nouveau système de variables, introduites par M. O. Bonnet dans l'étude des propriétés des surfaces courbes.. 148

Transon (A.). — Lois des coniques surosculatrices dans les surfaces.. 78

Walton (W.). — Sur la courbure des surfaces rhiziques aux points multiples. 274

Weber (H.). — Sur un problème de représentation conforme........ 176

Wolstenholme (J.).—Sur les courbes osculatrices.................. 273

Transformations rationnelles. — Représentation des surfaces et des courbes unicursales.

Pages.

Brill (A.). — Sur les points doubles des courbes rationnelles........ 366

Cayley (A.). — Sur une propriété des projections stéréographiques. 153

— Sur l'inversion d'une surface de second degré.................. 274

— Sur la transformation des surfaces unicursales.............. 366

— Sur le déficient (ou genre) de certaines surfaces.............. 367

Clebsch (A.). — Sur la possibilité de transformer linéairement l'une dans l'autre deux formes linéaires données...................... 183

— De la représentation sur le plan des surfaces réglées du quatrième ordre, qui possèdent une courbe double du troisième degré 236

— Sur la relation entre la bissection des fonctions abéliennes et certaines représentations d'une classe de fonctions algébriques... 355

Darboux (G.). — Sur une méthode nouvelle pour l'étude des courbes tracées sur les surfaces algébriques.... ...... 23, 184, 221, 314

— Sur une surface du cinquième ordre et sa représentation sur le plan. 40

— Sur la représentation des surfaces algébriques............... 155

Klein (F.). — Sur la représentation des surfaces complexes de quatrième ordre et de quatrième classe......................... 183

Korndörfer (G.). — Représentation d'une surface du quatrième degré ayant une ligne double du second degré et un ou plusieurs points singuliers...................... 173

— Sur les courbes gauches pour lesquelles les coordonnées d'un point sont des fonctions rationnelles d'un paramètre................ 364

— De la représentation d'une surface du quatrième ordre à coniques doubles, dans le cas où celles-ci se décomposent en deux droites...................... 366

Müller (H.). — Sur une affinité géométrique du cinquième degré.... 181

Nöther (M.). — Sur la théorie de correspondance uniforme des formes algébriques d'un nombre quelconque de dimensions...... 181

— Sur les surfaces qui possèdent des séries de courbes rationnelles....................... 358

— Sur les transformations rationnelles de l'espace et leur application à la représentation des surfaces algébriques.............. 367

Painvin. — Note sur la transformation homographique........... 76

Wiener (Chr.). — De la correspondance multiple entre deux figures planes...... 354

Zeuthen (H.-G.). — Nouvelles démonstrations de théorèmes sur des séries de points correspondants sur deux courbes... 357

— Addition au Mémoire sur les séries de points correspondants sur deux courbes................. 362

Géométrie linéaire. — Complexes.

Clebsch (A.). — Sur les complexes de Plücker.................... 173

Drach (V.). — Sur la théorie de la droite dans l'espace et des complexes linéaires................. 176

Klein (F.). — Sur la théorie des complexes de lignes du premier et du deuxième ordre............... 179

— La transformation linéaire générale des coordonnées de la ligne droite........................ 181

Painvin. — Étude d'un complexe du second ordre.................. 368

Courbes et surfaces d'une génération particulière.

Pages.

Bösser (F.). — Théorie des lignes et des surfaces caustiques dans son développement historique... 138
Cayley (A.). — Sur les développées et les courbes parallèles......... 272
Chasles. — Détermination, par le principe de correspondance, de la classe de la développée et de la caustique par réflexion d'une courbe géométrique d'ordre m et de la classe n.......... ... 213
Darboux (G.). — Sur une classe particulière de surfaces réglées..... 301
Enneper (A.). — Sur les loxodromies des surfaces coniques........... 141
Gilbert (Ph.). — Sur les courbes planes à équations trinômes..... 80
Jeffery (H.). — Sur les développées des courbes du troisième degré..................... 269, 271
— Sur les conicoïdes concycliques. 273
Jouanne. — Trisection de l'angle au moyen du limaçon de Pascal.... 76
Steen (Ad.). — Note sur les surfaces de révolution.................. 15
Walton (W.). — Note sur les courbes rhiziques...................... 270
— Sur les asymptotes étoilées des courbes rhiziques............... 272

MÉCANIQUE.

Cinématique.

Brisse (Ch.). — Mémoire sur le déplacement des figures........... 37
Durrande (H.). — Extrait d'une théorie du déplacement d'une figure qui se déforme............ 337

Mécanique analytique. — Attraction. — Centre de gravité.

Besant (W.-H.). — Notes mathématiques..................... ... 269
— Les équations d'Euler déduites de celles de Lagrange.. 272
Chelini (D.). — Nouvelle démonstration élémentaire des propriétés fondamentales des axes conjugués de rotation et des axes permanents............... 148
Clausius. — De la fonction potentielle et du potentiel............ 65
Graindorge. — Mémoire sur l'intégration des équations de la mécanique......................... 199
Korkine (A.). — Sur les intégrales du mouvement d'un point matériel.......................... 173
Laurent (H.).—Traité de mécanique rationnelle, à l'usage des candidats à la licence et à l'agrégation. 193
Mathieu (E.). — Sur la généralisation du premier et du second potentiel....................... 33
Moutier (J.). — Sur la fonction potentielle et le potentiel......... 81
Neumann (C.). — Sur la théorie du potentiel...... 238
— Révision de quelques théorèmes généraux sur la théorie du potentiel logarithmique............. 363
— Recherches sur le mouvement d'un corps solide.............. 363
— Révision de quelques théorèmes généraux relatifs à la théorie du potentiel newtonien............ 364
Okatow (M.). — Sur l'équilibre d'un fil pesant, dont l'axe forme une hélice.... 173
Radau (R.). — Les équations différentielles de la dynamique...... 177
— Note sur la rotation des corps solides......................... 266
Routh (E.-J.). — Équilibre d'un corps pesant et rugueux reposant sur un autre corps de même nature......................... 271

Pages.
— Moment d'inertie d'un quadrilatère 271
SCHLÖMILCH (O.). — Attraction d'un ellipsoïde sur un point extérieur. 238
SERRET (J.-A.). — Mémoire sur le principe de la moindre action 97, 244
— Sur le principe de la moindre action 331, 334
WALTON (W.). — Sur la relation qui existe entre la vitesse de rotation instantanée et la vitesse angulaire de l'axe instantané d'un corps qui tourne librement autour d'un point fixe, et sur les axes de plus grande et de moindre mobilité 267
— Sur la pression que supporte un point fixe autour duquel tourne un corps solide invariablement lié à ce point 269
— Sur les axes de traction et de percussion 271
ZEUTHEN (H.-G.). — Rectification d'une remarque de Jacobi 16

Mécanique pratique.

BOUSSINESQ (J.). — Intégration de l'équation différentielle qui peut donner une deuxième approximation dans le calcul rationnel de la poussée exercée contre un mur par des terres dépourvues de cohésion 37
CURIE. — Sur la théorie de la poussée des terres 212
DEPREZ (M.). — Nouvel indicateur dynamométrique, faisant connaître toutes les circonstances du travail de la vapeur dans le cylindre d'une machine 337
— Instrument servant à calculer mécaniquement la valeur des aires, des centres de gravité et des moments d'inertie des figures planes. 338
GIORGI (F.). — Sur le calcul des quantités de terre à remuer dans les devis des travaux d'architecture. 149
MAXWELL (J.-C.). — Sur les figures, charpentes et diagrammes réciproques des forces 200, 203
MELSENS. — Note sur les explosions des chaudières à vapeur 298
MORIN. — Sur les cheminées d'appartement 208
PONCELET (J.-V.). — Introduction à la Mécanique industrielle 8
RESAL (H.). — Du mouvement d'un corps solide qui supporte un système matériel animé d'un mouvement relatif par rapport à ce corps 332
— Théorie du régulateur Larivière . 337
— Du profil rationnel des segments d'un piston de machine à vapeur. 335
— De l'insuffisance des chaînes de sûreté du matériel de chemins de fer 335
SAINT-VENANT (DE). — Rapport sur le Mémoire de M. Maurice Levy, relatif aux équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles, au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état 330
— Formules donnant les pressions ou forces élastiques dans un solide, quand il y en avait déjà en jeu d'une intensité considérable avant les petites déformations qu'on lui a fait éprouver . . 212, 213
— Recherche d'une deuxième approximation dans le calcul de la poussée exercée contre un mur dont la face postérieure a une inclinaison quelconque, par des terres non cohérentes dont la face supérieure s'élève en talus plan quelconque à partir du haut de cette face du mur 37
— Sur une détermination rationnelle de la poussée des terres dépourvues de cohésion contre un mur ayant une inclinaison quelconque 37
— Rapport fait à l'Académie des Sciences sur un Mémoire de M. Maurice Levy : « Sur une théorie rationnelle de l'équilibre des terres fraîchement remuées, etc. » 37
VILLARCEAU (Yvon). — Études sur le mouvement des meules horizontales de moulins à blé, et méthodes pour les équilibrer 38, 203

MOUVEMENT ET ÉQUILIBRE DES FLUIDES.

Pages

[Bo]USSINESQ (J.). — Théorie de l'intumescence liquide appelée *onde solitaire* ou *de translation*, se propageant dans un canal rectangulaire 276
— Sur le mouvement permanent varié de l'eau dans les tuyaux de conduite et dans les canaux découverts................. 330, 331
— Théorie générale des mouvements qui sont propagés dans un canal rectangulaire horizontal......... 334
[C]LEBSCH (A.). — Sur le mouvement d'un corps dans un fluide.. 358
[C]OCKLE (sir J.).— Sur le mouvement des fluides (suite).............. 271
[M]ELSENS. — Sur les forces élastiques des gaz liquéfiables......... ... 294
[S]AINT-VENANT (DE). Sur la houle et le clapotis............... 335, 336
— Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit...................... 331, 334
TAIT.— Sur le mouvement permanent d'un fluide incompressible parfait dans deux dimensions.......... 274
— Sur le mouvement le plus général d'un fluide incompressible parfait........................ 274
THOMSON (sir W.). — Sur les forces qui agissent sur les solides plongés dans un liquide en mouvement......................... 274
— Sur l'équilibre de la vapeur contre la surface courbe d'un liquide. 274
VELTMANN (W.). — La théorie des tourbillons fluides de Helmholtz. 141

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

Magnétisme. — Électricité.

CAZIN (A.). — Nouvelle méthode pour mesurer le magnétisme en unités mécaniques.................... 244
FROST (P.). — Sur la théorie du solénoïde d'Ampère............... 269
— Théorème relatif à l'action qu'un courant lancé dans une hélice, qui enveloppe un cylindre de forme quelconque, exerce sur le pôle d'un aimant.................... 269
REITLINGER (E.) et KUHN (M.). — Sur les spectres des électrodes négatives et des tubes de Geissler qui ont longtemps servi............ 141
SAINT-LOUP (L.). — Étude expérimentale de l'attraction exercée par une bobine sur un barreau de fer doux...................... 266
TAIT. — Sur le flux d'électricité sur les surfaces conductrices......... 274
VOLPICELLI (P.). — Analyse et rectification de quelques idées et de quelques expériences relatives à l'électrostatique 20

Thermodynamique.

CLAUSIUS (R.). — Remarques sur deux Mémoires de M. *Mohr*...... 142
MELLBERG (E.-J.). — Om ytspänningen hos vätskor................. 137
MENSBRUGGHE (G. van der). — Sur la viscosité superficielle des lames de solution de saponine......... 292
MOHR (D[r].). — Sur la cause de l'inégale conductibilité des gaz pour la chaleur...................... 137
— Calcul de la quantité de chaleur nécessaire pour échauffer et pour dilater l'eau, ou de la quantité de chaleur sous pression constante et sous volume constant...... 139
MOUTIER (J.). — Sur la chaleur dégagée par la dissolution des gaz dans les liquides................ 336
RESAL (H.).— Essai sur la théorie des vapeurs........................ 334

Optique.

Pages.

Browning (J.). — Sur un micromètre à fils brillants pour la mesure des positions des lignes d'un spectre faible 151
— Sur un spectroscope dans lequel les prismes s'adaptent automatiquement pour l'angle de déviation minimum qui correspond à la raie particulière soumise à l'examen 153
Cornu (A.). — Sur la détermination de la vitesse de la lumière 340
Deas (Fr.). — Sur les spectres formés par le passage de la lumière polarisée à travers les cristaux doublement réfringents 203
Graffweg (W.). — Sur les lentilles qui donnent une image mathématiquement exacte d'un point rayonnant de la lumière homogène 140
Ketteler (Ed.). — Sur les constantes qui entrent dans les formules de dispersion 83
Krumme. — Le parallélogramme des mouvements dans la théorie des ondes 139
Kurz (A.). — Calcul des faisceaux hyperboliques obscurs dans les cristaux à deux axes 138
Leitch (W.). — Moyen simple de déterminer approximativement la longueur d'onde de la lumière 275
Neumann (C.). — Sur le mouvement de l'éther dans les cristaux 177
Proctor (R.-A.). — Sur le spectroscope automatique de M. *Browning* 154

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE GÉNÉRALE.

Ball (R.-S.). — Les petites oscillations d'un point matériel et celles d'un corps solide 272
Betti (E.). — Sur la détermination des températures variables d'un cylindre 21
Bourget (J.). — Influence de la résistance de l'air dans le mouvement vibratoire des corps sonores. 242
Boussinesq. — Étude nouvelle sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques dont certaines dimensions sont très-petites par rapport à d'autres (1er et 2e Mémoire) 214, 241
Cornu et Mercadier. — Sur les intervalles musicaux (3e Note) 333
Lucas (F.). — Étude sur la mécanique des atomes 34
Mensbrugghe (G. van der). — Sur un principe de Statique moléculaire avancé par M. *Lüdtge* 296
Von der Mühll (K.). — Sur le problème des températures stationnaires 240
Roger (E.). — Théorie des phénomènes capillaires (2e Mémoire) 279
Sang (E.). — Remarques sur les théories de l'action capillaire 275
Somof (J.). — Note relative à une démonstration donnée par Cauchy des équations générales de l'équilibre 299
Steen (Ad.). — Sur la loi fondamentale de l'extension et de la compression des corps 19
Tait. — Sur le théorème de Green et sur d'autres théorèmes qui s'y rattachent 202
Terquem (A.). — Étude sur le timbre des sons produits par des chocs discontinus, et en particulier par la sirène 267
— Mémoire sur les sons produits par des ébranlements discontinus, et en particulier à l'aide de la sirène. 333
Volpicelli (P.). — Conditions algébriques pour obtenir la compensation thermométrique dans les baromètres, pour un quelconque des systèmes aptes à les produire 149
— Formules générales pour la variation du ton, produite par le mouvement du corps sonore et

Pages.
celui de l'observateur; corollaires de cette formule et considérations sur la manière dont on croit pouvoir expliquer le déplacement des raies de Frauenhofer, dans le spectre du Soleil, en raison de son mouvement rotatoire........... 149

PROBABILITÉS. — COMBINAISONS.

Frost (A.). — Solution générale du problème des 15 écolières 269
Lorenz (L.). — Sur un problème du jeu de cartes.................. 15
Neovius (V.). — Lärobok i minsta qvadrat-metoden.............. 134
Petersen (J.). — Sur un problème du jeu de cartes................ 16
Quetelet (A.). — Des lois concernant le développement de l'homme. 293
— Sur l'Anthropométrie ou sur la mesure des différentes facultés de l'homme. Développement de la taille humaine. Extension remarquable de cette loi.............. 297
Schröder (E.). — Quatre problèmes combinatoires.................. 140
Simon (Ch.). — Note sur la formule de Gompertz et sur son application au calcul des probabilités de la vie humaine................ 282

SÉRIES.

Binôme. — Fractions continues.

Anonyme. — Note relative à quelques cas de convergence ou de divergence des séries............. 76
Bourget (J.). — Note sur les séries de Taylor et de Maclaurin....... 81
Brisse (Ch.). — Démonstration d'un théorème relatif aux séries...... 76
Catalan. — (Sur quelques développements en séries.............. 78
Didon (F.). — Développements sur certaines séries de polynômes à un nombre quelconque de variables.......................... 266
Ermakof (V.). — Caractère de convergence des séries............. 250
Lucas (Éd.). — Note sur les coefficients du binôme de Newton..... 79
Réalis (S.). — Démonstration d'une formule de Trigonométrie....... 75
Schlaefli (L.). — Sur la série hypergéométrique de Gauss........ 362
Thomae (J.). — Sur les séries hypergéométriques supérieures, et en particulier sur la série

$$1 + \frac{a_0 a_1 a_2}{b_0 b_1 b_2} x + \ldots\ldots\ldots$$ 236



A

Airy, p. 149, 154.
Alexandre, p. 79.
Allégret, p. 75.
André, p. 89.
Anonyme, p. 76.
Argelander, p. 321.
Arzelà, p. 143.

B

Ball, p. 272.
Baltzer, p. 198.
Barillari, p. 145.
Battaglini, p. 142, 143, 145.
Beaujeux, p. 79.
Bellavitis, p. 75.
Bernaerts, p. 292.
Bertrand, p. 244, 335, 338, 340.
Besant, p. 269, 272.
Betti, p. 21.
Béziat, p. 77.
Bienaymé, p. 203.
Birmingham, p. 233.
Bitonti, p. 144.
Boillot, p. 246.
Boncompagni, p. 147.
Bonnet, p, 215.
Bonsdorff, p. 136.
Börgen, p. 231.
Borrelly, p. 337.
Bösser, p. 138.
Bouniakowsky, p. 299, 300,
Bourdin, p. 210.
Bourget, p. 81, 82, 242.
Boussinesq, p. 37, 214, 241, 334.
Briffaut, p. 276.
Brill, p. 237, 366.
Brioschi, p. 237.
Brisse, p. 37, 76.
Browning, p. 151, 153.
Bruhns, p. 233, 235, 321.
Brünnow, p. 169.

C

Campoux (de), p. 77.
Carnoy, p. 79.
Cassani, p. 145, 146.
Chelini, p. 19, 148.
Cheux, p. 276.
Clausius, p. 65, 142.

D

Darboux, p. 23, 40, 155, 184, 221, 266, 301, 337.
Deas, p. 203.
Delaunay, p. 208, 210, 242, 339, 340.
Denza, p. 335.
Deprez, p. 337, 338.
Didon, p 265, 266.
Dostor, p. 82.
Drach (v.), p. 176.
Dunér, p. 234.
Duprez, p. 298.
Durrande, p. 80, 337.

E

Egger, p. 332.
Enneper, p. 139, 141, 240.
Ermakof, p. 250.
Eugenio, p. 144.

F

Faye, p. 340.
Flammarion, p. 209.
Fonvielle (de), p. 209, 335, 339.
Françoise, p. 76.
Friedlein, p. 147.
Frost (A.), p. 269.
Frost (P.), p. 269, 271.
Fuortes, p. 144, 145.

G

Gasparis (de), p. 231.
Geelmuyden, p. 233.
Geiser, p. 367.
Genocchi, p. 147.
Gerono, p. 80, 81.
Gilbert, p. 80.
Giorgi, p. 149.
Glaisher, p. 274.
Gompertz, p. 282.
Gordan (P.), p. 180, 363, 368.
Götting, p. 362.
Govi, p. 147.
Graffweg, p. 140.
Graindorge, p. 199.
Grant, p. 231.
Grelle, p. 140.
Grube, p. 141.
Gruey, p. 266.
Guillemin, p. 338.
Gundelfinger, p. 361.
Güssfeldt, p. 174.
Guyot, p. 335.
Gyldén, p. 321, 325.

H

Haase, p. 239.
Hall, p. 234.
Heger, p. 139, 141.
Heine, p. 117.
Hennessy, p. 210.
Hermann, p. 78.
Hermite, p. 21.
Herschel (J.-F.-W.), p. 150.
Hess, p 140.
Hierholzer, p. 239.
Hirst, p. 146.
Hochheim, p. 140.
Hoppe, p. 238.
Horner, p. 269, 271, 273.
Hornstein, p. 233.
Hoüel, p. 76, 80, 257.

I

Imchenetsky, p. 144.

J

Janssen, p. 209, 211, 335, 338.
Jeffery, p. 269, 271, 273.
Joachimsthal, p. 81.
Jordan (C.), p. 161, 211, 279, 338, 339.
Jouanne, p. 76.

K

Kaiser, p. 232.
Ketteler, p. 83.
Kinkelin, p. 138.
Kirchhoff, p. 358.
Klein, p. 72, 179, 183, 341.
Königsberger, p. 353.
Korkine, p. 173.
Korndörfer, p. 173, 364, 366.
Kossak, p. 68.
Kötteritzsch, p. 138.
Kowalczyk, p. 234.
Krey, p. 141.
Krumme, p. 139.
Kuhn, p. 141.
Kurz, p. 138.

L

Labrousse, p. 208.
La Gournerie (de), p. 33, 37.
Laguerre, p. 35, 75, 77, 78, 79, 246, 279.
Laisant, p. 79.
Laterrade, p. 330.
Laurent (H.), p. 193.
Le Besgue, p. 81.
Leclert, p. 79.
Leitch, p. 275.
Lemaly, p. 332, 335.
Lemoine (E.), p. 79.
Lemoine (L.), p. 80.
Lemonnier, p. 81, 82.
Leveau, p. 209, 334.
Le Verrier, p. 335.
Lie, p. 72.
Lindelöf, p. 78, 177.
Liouville, p. 34.
Lœwy (B.), p. 150.
Lœwy (M.), p. 213, 339.
Lommel, p. 137, 240, 366.
Lorenz, p. 15, 16.
Lucas (Éd.), p. 76, 79.
Lucas (F.), p. 34.
Lüroth, p. 357.
Luther, p. 211, 231, 338, 339.

M

Mainardi, p. 20, 149.
Mannheim, p. 125.
Maquieu, p. 332.
Martin (Th.-H.), p. 147.
Mathieu (Ém.), p. 33.
Matthiessen, p. 234.
Maxwell, p. 200, 203.
Mayer (A.), p. 176, 364.
Maywald, p. 232.
Meissel, p. 240, 367.
Mellberg, p. 137.
Melsens, p. 294, 298.
Mensbrugghe (Van der), p. 292, 296.
Mercadier, p. 333.
Meunier (St.), p. 209.
Meyer (G.-F.), p. 228, 357.
Mohr, p. 139.
Mollame, p. 144, 145.
Möller, p. 16, 231, 232, 234.
Montigny, p. 289, 293.
Morin, p. 208.
Most, p. 141.
Moutier, p. 81, 336.
Mühll (Van der), p. 240.
Müller (H.), p. 181.
Mylord, p. 15, 18.

N

Neovius, p. 134.
Neuberg, p. 76, 79.
Neumann, p. 177, 238, 361, 364, 368.
Newcomb, p. 214.

Nicolaïdès, p. 71.
Niewenglowski, p. 75.
Nöther, p. 181, 358, 367.
Nyrén, p. 301.

O

Okatow, p. 173.
Oppermann, p. 15, 16.
Oppolzer, p. 232, 233, 234.
Ovidio (d'), p. 145.

P

Padova, p. 145.
Painvin, p. 76, 78, 80, 368.
Palermo, p. 147.
Palisa, p. 231, 232.
Partiot, p. 331.
Pépin, p. 36.
Peters (C.-F.-W.), p. 232.
Peters (F.), p. 337, 339.
Petersen, p. 16.
Pihl, p. 329.
Plücker, p. 297.
Plummer, p. 235.
Poncelet, p. 8.
Powell, p. 153.
Proctor, p. 151, 152, 154.
Proja, p. 19.
Puiseux, p. 33.

Q

Quetelet (Ad.), p. 293, 297.

R

Radau, p. 177, 266.
Réalis, p. 75.
Reis, p. 235.
Reitlinger, p. 141.
Renou, p. 210.
Resal, p. 332, 334, 335, 337.
Respighi, p. 19, 82, 83.
Reye, p. 238.
Richaud, p. 19.
Richelot, p. 129.
Riemann, p. 225.
Roberts (S.), p. 269.
Roger (E.), p. 279.
Rosanes, p. 239, 367.
Routh, p. 271.
Ruchonnet, p. 80
Rümker, p. 232, 23[illegible].

S

Sagols, p. 276.
Saint-Loup, p. 266.
Saint-Venant (de), p. 37, 212, 213, 330, 331, 334, 335, 336.
Saltel, p. 80.
Sandberg, p. 235.
Sang, p. 201, 275.
Schering, p. 148.
Schläfli, p. 357, 362.
Schlömilch, p. 66, 138.
Schröder, p. 140, 182, 362.
Schröter, p. 239.
Schulenburg (Van der), p. 289.
Schulhof, p. 235.
Secchi, p. 19, 82, 212, 233, 279, 334, 336, 339.
Sédillot, p. 147.
Senbroke, p. 153.
Serret (J.-A.), p. 97, 244, 331, 334.
Serret (P.), p. 76.
Siacci, p. 146.
Simon, p. 11, 282.
Smith (W.-R.), p. 275.
Somof, p. 299.
Spina, p. 83.
Spitzer, p. 366.

Spörer, p. 232.
Stahl, p. 366.
Stahlberger, p. 141.
Steen, p. 12, 16, 19.
Stephan, p. 232, 266.
Stewart (B.), p. 150.
Stiattesi, p. 148.
Stone, p. 154.
Sturm (R.), p. 356.

T

Tait, p. 202, 274, 275.
Tano, p. 144, 145.
Tchebychef, p. 259.
Tempel, p. 235.
Terquem (A.), p. 267, 333.
Thomae, p. 236.
Thomson (sir W.), p. 274.
Tiele, p. 232.
Tietjen, p. 232, 233.
Tilly (de), p. 294.
Tisserand, p. 213, 246, 339, 340.
Tognoli, p. 143, 144, 146.
Tortolini, p. 148.
Transon, p. 78, 334.
Tremeschini, p. 243.
Tychsen, p. 15, 16.

V

Valentiner, p. 329.
Veltmann, p. 141.
Villarceau (Y.), p. 38, 203, 334, 338.
Vogel (H.), p. 233.
Volpicelli, p. 20, 149.
Vorsterman van Oijen, p. 147.

W

Walton, p. 267, 269, 278, 271, 272, 273, 274.
Warren de la Rue, p. 150.
Weber (H.), p. 176.
Weiss (E.), p. 235.
Welsch, p. 77.
Weyr (Em.), p. 140, 141, 142, 145, 354, 358.
Wiener, p. 354.
Winnecke, p. 232, 235.
Wolf (R.), p. 152.
Wolfers, p. 152.
Wolff (J.-F.), p. 269.
Wolstenholme, p. 269, 273.

Z

Zenker, p. 235.
Zeuthen, p. 15, 16, 357, 362.

FIN DU TOME DEUXIÈME.

Paris. — Imprimerie de Gauthier-Villars, quai des Augustins, 55.